

Variable Compleja y Transformadas

Segundo Curso,
Ingeniería Técnica Industrial
Especialidades: Electricidad y Electrónica Industrial

24 de febrero de 2013

1. Conteste las siguientes cuestiones:

- (a) (0.25 pts.) Escriba en forma polar $z = \sqrt{6} - \sqrt{2}i$.

Solución: Necesitamos el módulo de z

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{6+2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

y el argumento

$$\theta_z = \arctan \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \arctan -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{3}} = \arctan -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6} \text{ (ya que está en el cuarto cuadrante)}$$

- (b) (0.25 pts.) Calcula e^z para $z = \frac{3\pi}{4}i$ y $z = \frac{2\pi}{3}i$

Solución: Por la definición de exponencial

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

Entonces para $z = \frac{3\pi}{4}i$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z) &= x = 0 \\ \operatorname{Im}(z) &= y = \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

por tanto

$$e^{\frac{3\pi}{4}i} = e^0 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} \right) = -\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

y para $z = \frac{2\pi}{3}i$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z) &= x = 0 \\ \operatorname{Im}(z) &= y = \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

por tanto

$$e^{\frac{2\pi}{3}i} = e^0 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} \right) = -\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- (c) (0.5 pts.) Utilice la fórmula de Moivre para calcular las soluciones complejas de

$$z^3 = \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} \right) \right)^{32}$$

Solución: Utilizando la fórmula de Moivre

$$\left(\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} \right) \right)^{32} = \left(\cos \left(\frac{32\pi}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{32\pi}{4} \right) \right) = (\cos(8\pi) + i \operatorname{sen}(8\pi)) = 1$$

y la ecuación queda

$$z^3 = 1$$

luego

$$z = \sqrt[3]{1}$$

son las raíces cúbicas de la unidad que calculamos en forma polar. Para ello ponemos 1 en forma polar o exponencial

$$1 = 1_0 = e^{i0}$$

y utilizaremos la expresión para el cálculo de raíces n -ésimas de un número complejo. Tenemos 3 raíces cúbicas cuyo módulo es

$$|z_k| = \sqrt[3]{|1|} = 1$$

y cuyos argumentos φ_k son

$$\varphi_k = \frac{\theta_1 + 2k\pi}{3} = \frac{2k\pi}{3} \quad k = 0, 1, 2$$

luego

$$\varphi_0 = \frac{2 \cdot 0 \cdot \pi}{3} = 0 \Rightarrow z_0 = 1e^{i \cdot 0} = 1$$

$$\varphi_1 = \frac{2 \cdot 1 \cdot \pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow z_1 = 1e^{i \cdot 2\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{calculado en el ejercicio anterior})$$

$$\varphi_2 = \frac{2 \cdot 2 \cdot \pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow z_2 = 1e^{i \cdot 4\pi/3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{conjugado de } z_1, \text{ } z^3 \text{ polinomio de coeficientes reales})$$

2. (1 pto.) Resuelva en \mathbb{C} la ecuación siguiente:

$$\operatorname{sen}(z) - 2 = 0.$$

Solución: Utilizamos la definición de $\operatorname{sen} z$ en términos de la función exponencial para reescribir la ecuación

$$\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right) - 2 = 0$$

Hacemos el cambio

$$e^{iz} = w$$

y como $w \neq 0$

$$e^{-iz} = \frac{1}{e^{iz}} = \frac{1}{w}$$

De esta forma se obtiene una ecuación en la variable w

$$\frac{w - \frac{1}{w}}{2i} - 2 = 0 \Rightarrow \frac{w^2 - 1}{2wi} - 2 = 0$$

y multiplicando por $2wi$ obtenemos una ecuación de segundo grado

$$(w^2 - 1) - 4wi = 0 \Rightarrow w^2 - 4wi - 1 = 0$$

que podemos resolver fácilmente mediante la correspondiente fórmula

$$w = \frac{4i \pm \sqrt{(-4i)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{4i \pm \sqrt{-16 + 4}}{2} = \frac{4i \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{4i \pm 2\sqrt{3}i}{2} = (2 \pm \sqrt{3})i$$

obteniendo dos soluciones

$$w_1 = (2 + \sqrt{3})i$$

$$w_2 = (2 - \sqrt{3})i$$

Con estos valores para w_1 y w_2 y teniendo en cuenta el cambio que se hizo al principio del ejercicio obtendremos, mediante la definición de logaritmo complejo $e^{iz} = w \Rightarrow iz = \log w$, tenemos en cuenta además que w_1 y w_2 son dos números imaginarios puros, ambos con parte imaginaria positiva

$$iz_1 = \log \left((2 + \sqrt{3}) i \right) = \ln (2 + \sqrt{3}) + i \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) \Rightarrow z_1 = -i \ln (2 + \sqrt{3}) + \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right)$$

$$iz_2 = \log \left((2 - \sqrt{3}) i \right) = \ln (2 - \sqrt{3}) + i \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) \Rightarrow z_2 = -i \ln (2 - \sqrt{3}) + \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right)$$

3. (1.5 ptos.) Encuentre, demostrando su existencia, una función $u(x, y)$ de manera que la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sea entera y se cumpla $f(0) = \frac{\pi}{3}$. La función $v(x, y)$ se define mediante

$$\operatorname{Im}(f(z)) = v(x, y) = x^3 - 2y - 3xy^2$$

Expresa f como función de $z = x + iy$.

Solución: Como se dice en el enunciado que $f(x, y)$ debe ser entera, su parte imaginaria $v(x, y)$ debe ser una función armónica y debe cumplir la ecuación de Laplace

$$v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad (1)$$

Derivando $v(x, y)$ respecto x e y , una vez

$$\begin{aligned} v_x &= 3x^2 - 3y^2 \\ v_y &= -2 - 6xy \end{aligned}$$

y otra

$$\begin{aligned} v_{xx} &= 6x \\ v_{yy} &= -6x \end{aligned}$$

y al sustituir en 1

$$\underbrace{(6x)}_{v_{xx}} + \underbrace{(-6x)}_{v_{yy}} = 0$$

luego $v(x, y)$ es armónica.

Para el cálculo de $u(x, y)$, la parte real de $f(x, y)$, tendremos que aplicar las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned}$$

De la primera de estas ecuaciones (aunque esta elección es indiferente para el resultado final):

$$u_x = v_y \Leftrightarrow u_x = -2 - 6xy$$

e integrando respecto a x obtenemos $u(x, y)$

$$u = \int (-2 - 6xy) dx = -2x - 3x^2y + \varphi(y)$$

$\varphi(y)$ es constante para x y para encontrar su expresión derivamos respecto de y

$$u_y = -3x^2 + \varphi'(y)$$

Por la segunda de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, esta expresión debe coincidir con $-v_x = -(3x^2 - 3y^2)$:

$$-3x^2 + \varphi'(y) = -(3x^2 - 3y^2)$$

de donde se deduce que

$$\varphi'(y) = 3y^2$$

e integrando respecto a y se obtiene

$$\varphi(y) = y^3 + c \in \mathbb{R}$$

La expresión para $u(x, y)$ será

$$u(x, y) = -2x - 3x^2y + y^3 + c$$

y la función $f(x, y)$

$$f(x, y) = (-2x - 3x^2y + y^3 + c) + i(x^3 - 2y - 3xy^2)$$

Notar que si $z = x + iy$, entonces podemos expresar $f(x, y)$ como función de z de la forma

$$f(z) = iz^3 - 2z + c$$

Como $f(0) = \pi/3$, podemos comprobar que $c = \pi/3 \in \mathbb{R}$.

4. (1.5 ptos.) Se considera la función racional $f(z) = \frac{z^2 - 1}{(z - i)}$. Calcule, justificando la validez de la región de convergencia, el desarrollo de Laurent de f convergente en el anillo

$$\mathcal{A}(0; 1, \infty) = \{z \in \mathbb{C}; |z| > 1\}.$$

Solución: En primer lugar buscamos las raíces del denominador para descomponer la función en fracciones simples. Está claro que sólo hay una raíces $z_1 = i$. Como estamos buscando potencias de z , podemos expresar la función como:

$$f(z) = (z^2 - 1) \frac{1}{z - i}$$

donde la expresión entre paréntesis ya está expresada en potencias de z . Para la fracción el desarrollo de Laurent en el conjunto indicado $|z| > 1$ es muy sencillo.

Puesto que $|z| > 1 \Rightarrow \left|\frac{i}{z}\right| = \frac{1}{|z|} < 1$ y entonces

$$\frac{1}{z - i} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{i}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n-1}}{z^n} \text{ con } \left|\frac{i}{z}\right| < 1$$

Donde se ha cambiado el contador en la última suma para que la potencia de z sea la n -ésima. La función tendrá el siguiente desarrollo

$$f(z) = (z^2 - 1) \frac{1}{z - i} = (z^2 - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n-1}}{z^n} = z^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n-1}}{z^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n-1}}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n-1}}{z^{n-2}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n-1}}{z^n}$$

separamos las potencias negativas y positivas de forma que

$$f(z) = \left(\underbrace{z}_{n=1} + \underbrace{i}_{n=2} \right) + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{i^{n-1}}{z^{n-2}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n-1}}{z^n}$$

cambiamos el contador en el primer sumatorio ($n - 2 \rightarrow n \Rightarrow n - 1 \rightarrow n + 1$)

$$f(z) = (z + i) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n+1}}{z^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n-1}}{z^n}$$

y podemos agrupar ambos sumatorios

$$f(z) = (z + i) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i^{n+1}}{z^n} - \frac{i^{n-1}}{z^n} \right)$$

y sacamos factor común

$$f(z) = (z+i) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n-1}}{z^n} (i^2 - 1) = (z+i) - \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{i^{n-1}}{z^n}$$

donde se ha tenido en cuenta que $i^2 = -1$.

Existe otra forma alternativa de encontrar el desarrollo. En primer lugar hay que tener en cuenta que el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, por tanto hay que hacer una división

$$f(z) = \frac{z^2 - 1}{z - i} = (z+i) - \frac{2}{z-i} = (z+i) - 2 \frac{1}{z-i}$$

Como ya conocemos el desarrollo de la fracción

$$f(z) = (z+i) - 2 \frac{1}{z-i} = (z+i) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n-1}}{z^n} = (z+i) - \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{i^{n-1}}{z^n}$$

y podemos comprobar que el desarrollo es el mismo que antes.

5. Calcule las siguientes integrales:

(a) (1 pto.)

$$\int_{\gamma} \frac{e^z - 1}{(z - 5/4)^k} dz; \quad k \in \mathbb{Z}, \gamma(t) = 1 + e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Solución: La integral se puede calcular directamente utilizando la fórmula integral de Cauchy para las derivadas (también se puede hacer por residuos), puesto que

$$d\left(1, \frac{5}{4}\right) = \left|\frac{5}{4} - 1\right| = \left|\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4} < 1$$

es decir $\frac{5}{4}$ es un punto del interior de la circunferencia y el numerado $e^z - 1$ es una función entera y por tanto derivable dentro de y sobre la curva.

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \Rightarrow \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

en este caso

$$n + 1 = k$$

y distinguimos según el valor de k . Si $k = 0$, entonces la integral es 0, por el teorema de Cauchy-Goursat, ya que $e^z - 1$ es analítica y γ cerrada.

$$\int_{\gamma} \frac{e^z - 1}{(z - 5/4)^0} dz = \int_{\gamma} e^z - 1 dz = 0$$

Para $k > 0$ y teniendo en cuenta que $f'(z) = e^z$, tendremos por tanto:

$$f\left(\frac{5}{4}\right) = e^{5/4} - 1$$

$$f^{(k)}(5/4) = e^{5/4}$$

$$\int_{\gamma} \frac{e^z - 1}{(z - 5/4)^k} dz = \frac{2\pi i}{(k-1)!} f^{(k-1)}\left(\frac{5}{4}\right) = \begin{cases} 2\pi i (e^{5/4} - 1) \Rightarrow k = 1 \\ \frac{2\pi i}{(k-1)!} e^{5/4} \Rightarrow k > 1 \end{cases}$$

(b) (0.75 ptos.)

$$\int_{\gamma} \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{(z+1)(z-1/3)} dz; \quad \gamma(t) = r \exp(it), r > 1 \text{ y } t \in [0, 2\pi].$$

Solución: Es la integral de un cociente de funciones derivables a lo largo de una curva cerrada, por tanto utilizaremos el teorema de los residuos teniendo en cuenta solamente las singularidades que caen dentro de la curva. Las singularidades de la función son los números complejos que anulan el denominador de la función, por tanto

$$(z+1)(z-1/3) = 0$$

que tiene por soluciones

$$z_1 = -1$$

$$z_2 = \frac{1}{3}$$

Teniendo en cuenta que $r > 1$, tanto z_1 como z_2 están dentro de la curva, ya que la distancia de cada z_k al centro de la circunferencia es:

$$d(z_1, 0) = |z_1 - 0| = |z_1| = |-1| = 1 < r$$

$$d(z_2, 0) = |z_2 - 0| = |z_2| = \left| \frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3} < 1 < r$$

La singularidad z_1 es evitable, puesto que es un cero simple del denominador, pero también anula al numerador, ya que

$$\operatorname{sen}(\pi \cdot -1) = \operatorname{sen}(-\pi) = 0$$

y podemos comprobar que el límite de la función existe en ese punto, aplicando L'Hôpital:

$$\lim_{z \rightarrow -1} \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{(z+1)(z-1/3)} = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{\pi \cos(\pi z)}{2z + 2/3} = \frac{-\pi}{-4/3} = \frac{3\pi}{4} \in \mathbb{C}$$

y por tanto z_1 es una singularidad evitable y su residuo será por tanto 0.

El residuo para z_2 se puede calcular mediante límites por ser un polo simple

$$\operatorname{Res} \left(\frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{(z+1)(z-1/3)}, \frac{1}{3} \right) = \lim_{z \rightarrow 1/3} \left(z - \frac{1}{3} \right) \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{(z+1)(z-1/3)} = \lim_{z \rightarrow 1/3} \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{(z+1)} = \frac{\operatorname{sen} \pi/3}{(1/3+1)} = \frac{\sqrt{3}/2}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

y la integral será

$$\int_{\gamma} \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{(z+1)(z-1/3)} dz = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{(z+1)(z-1/3)}, \frac{1}{3} \right) = 2\pi i \left(\frac{3\sqrt{3}}{8} \right) = \frac{3\pi\sqrt{3}}{4} i$$

(c) (1.75 ptos.) Calcule razonadamente, aplicando la teoría de variable compleja, la integral real

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} + \cos t} dt.$$

Solución: Es una integral trigonométrica de una función racional en $(\operatorname{sen} t, \cos t)$, por tanto haremos el cambio usual

$$\cos t = \frac{z^2 + 1}{2z}$$

$$dt = \frac{1}{iz} dz$$

en este caso la función del integrando es

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} + \cos t} dt = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} + \frac{z^2+1}{2z}} \frac{1}{iz} dz = \frac{1}{i} \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}z + z^2 + 1} dz$$

y la integral trigonométrica se transforma en

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} + \cos t} dt = \frac{1}{i} \int_{\gamma} \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}z + z^2 + 1} dz$$

siendo γ la circunferencia unidad.

$$\gamma(t) = e^{it} \quad t \in [0, 2\pi]$$

Utilizando el teorema de los residuos podremos resolver dicha integral. En primer lugar buscaremos los ceros del denominador de la función

$$z^2 + 2\sqrt{5}z + 1 \Leftrightarrow z = \frac{-2\sqrt{5} \pm \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 4}}{2} = \frac{-2\sqrt{5} \pm \sqrt{20 - 4}}{2} = \frac{-2\sqrt{5} \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = (-\sqrt{5} + 2) \\ z_2 = (-\sqrt{5} - 2) \end{cases}$$

Sólo z_1 está en la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 1, puesto que

$$|z_1| = |-\sqrt{5} + 2| = \sqrt{5} - 2 < 1$$

mientras que z_2 estará fuera puesto que

$$|z_2| = |-2 - \sqrt{5}| = 2 + \sqrt{5} > 1$$

Para la integral sólo tendremos en cuenta a z_1

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} + \cos t} dt = 2\pi i \frac{1}{i} \text{Res} \left(\frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}z + z^2 + 1}, -\sqrt{5} + 2 \right) = 2\pi \frac{2\sqrt{5}}{(-\sqrt{5} + 2 - (-\sqrt{5} - 2))} = \sqrt{5}\pi$$

a) (1 pto.) Resuelva la ecuación en diferencias

$$\begin{cases} y_{n+2} - 3y_n = 0 & n \geq 2 \\ y_0 = 0 \\ y_1 = \sqrt{3} \end{cases}$$

b) (0.5 ptos.) Compruebe que la solución verifica las condiciones iniciales y la propia ecuación en diferencias.

Solución: Para resolver la ecuación en diferencias

$$y_{n+2} - 3y_n = 0$$

junto con las condiciones iniciales $y_0 = 0$, $y_1 = \sqrt{3}$, aplicaremos la transformada \mathcal{Z} y sus propiedades: linealidad y desplazamiento

$$\mathcal{Z}[y_{n+2} - 3y_n](z) = \mathcal{Z}[0](z)$$

Primero la linealidad

$$\mathcal{Z}[y_{n+2}](z) - 3\mathcal{Z}[y_n](z) = \mathcal{Z}[0](z)$$

y a continuación la propiedad de desplazamiento junto con las condiciones iniciales $y_0 = 0$, $y_1 = \sqrt{3}$

$$\mathcal{Z}[y_n](z) = Y(z)$$

$$\mathcal{Z}[y_{n+2}](z) = z^2 \mathcal{Z}[y_n](z) - z^2 y_0 - z y_1 = z^2 Y(z) - z\sqrt{3}$$

Sustituyendo en la ecuación

$$\left(z^2 Y(z) - z\sqrt{3}\right) - 3Y(z) = \mathcal{Z}[0](z)$$

$$(z^2 - 3)Y(z) - z\sqrt{3} = \mathcal{Z}[0](z)$$

y despejando

$$Y(z) = \frac{\mathcal{Z}[0](z) + z\sqrt{3}}{(z^2 - 3)}$$

El valor de $\mathcal{Z}[0](z)$ es trivialmente la función nula, luego

$$Y(z) = \frac{z\sqrt{3}}{(z^2 - 3)} = \frac{z\sqrt{3}}{(z - \sqrt{3})(z + \sqrt{3})}$$

Para obtener el valor de y_n tendremos que calcular la transformada \mathcal{Z} inversa

$$y_n = \mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{z\sqrt{3}}{(z - \sqrt{3})(z + \sqrt{3})}\right)$$

Para calcular la transformada \mathcal{Z} inversa, hay que encontrar las raíces del denominador y hacer la descomposición de la función racional en fracciones simples

$$\frac{z\sqrt{3}}{(z - \sqrt{3})(z + \sqrt{3})} = \left(\frac{A}{z - \sqrt{3}} + \frac{B}{z + \sqrt{3}}\right)$$

A continuación desarrollamos cada fracción en series de Laurent dentro de conjuntos de la forma $A(0, r, \infty)$, es decir en el exterior de bolas de centro 0 y radio r , en todas hay que hacer la misma operación, transformar la fracción para poder emplear la suma de una serie geométrica

$$\frac{1}{z - \sqrt{3}} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{3})^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{3})^{n-1}}{z^n} \quad |z| > \sqrt{3}$$

$$\frac{1}{z + \sqrt{3}} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{3}}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\sqrt{3}}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{3})^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (\sqrt{3})^{n-1}}{z^n} \quad |z| > \sqrt{3}$$

y sustituyendo en la expresión para $F(z)$

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{z\sqrt{3}}{(z - \sqrt{3})(z + \sqrt{3})} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(\sqrt{3})^{n-1}}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B(-1)^{n-1}(\sqrt{3})^{n-1}}{z^n}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(A + (-1)^{n-1} B\right) (\sqrt{3})^{n-1} \frac{1}{z^n} \quad |z| > \sqrt{3} \end{aligned}$$

Los coeficientes de las potencias de z son los elementos de la sucesión que buscamos

$$y_n = \left(A + (-1)^{n-1} B\right) (\sqrt{3})^{n-1} \quad n \geq 1$$

mientras que

$$y_0 = 0$$

como se indicaba en las condiciones iniciales.

Calculamos los valores de A y B . Para ello se tiene en cuenta que

$$\frac{z\sqrt{3}}{(z - \sqrt{3})(z + \sqrt{3})} = \left(\frac{A}{z - \sqrt{3}} + \frac{B}{z + \sqrt{3}}\right)$$

podemos sumar e identificar coeficientes

$$\frac{z\sqrt{3}}{(z-\sqrt{3})(z+\sqrt{3})} = \left\{ \frac{A(z+\sqrt{3}) + B(z-\sqrt{3})}{(z-\sqrt{3})(z+\sqrt{3})} \right\}$$

por tanto

$$A(z+\sqrt{3}) + B(z-\sqrt{3}) = z\sqrt{3}$$

Dando a z los valores de las raíces $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$

$$z = \sqrt{3} \Rightarrow A(2\sqrt{3}) = 3 \Leftrightarrow A = \frac{3}{2\sqrt{3}}$$

$$z = -\sqrt{3} \Rightarrow B(-2\sqrt{3}) = -3 \Leftrightarrow B = \frac{3}{2\sqrt{3}}$$

y obtendremos el valor de y_n

$$y_n = \frac{3}{2\sqrt{3}} (1 + (-1)^{n-1}) (\sqrt{3})^{n-1} = \frac{(1 + (-1)^{n-1}) (\sqrt{3})^n}{2}$$

Podemos comprobar que para $n = 1$, se obtienen el correspondiente valor para la segunda condición inicial

$$y_1 = \frac{(1 + (-1)^{1-1}) (\sqrt{3})^1}{2} = \sqrt{3}$$

Notar que también es válido para $n = 0$

$$y_0 = \frac{(1 + (-1)^{0-1}) (\sqrt{3})^0}{2} = 0$$

También se cumple la ecuación en diferencias

$$y_{n+2} = \frac{(1 + (-1)^{n+1}) (\sqrt{3})^{n+2}}{2}$$

$$y_n = \frac{(1 + (-1)^{n-1}) (\sqrt{3})^n}{2}$$

y sumando, teniendo en cuenta que $3 = (\sqrt{3})^2$

$$\begin{aligned} y_{n+2} - 3y_n &= \frac{(1 + (-1)^{n+1}) (\sqrt{3})^{n+2}}{2} - 3 \frac{(1 + (-1)^{n-1}) (\sqrt{3})^n}{2} = \\ &= \frac{(1 + (-1)^{n+1}) (\sqrt{3})^{n+2}}{2} - \frac{(1 + (-1)^{n-1}) (\sqrt{3})^{n+2}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{3})^{n+2}}{2} (1 + (-1)^{n+1} - 1 - (-1)^{n-1}) \\ &= \frac{(\sqrt{3})^{n+2}}{2} ((-1)^{n+1} - (-1)^{n-1}) \end{aligned}$$

y si $n \geq 2$

$$(-1)^{n+1} = (-1)^{n-1} (-1)^2 = (-1)^{n-1}$$

luego

$$y_{n+2} - 3y_n = 0$$