

Variable Compleja y Transformadas
Grado Ingeniería Eléctrica/Electrónica Industrial y Automática

Examen de problemas, 5 de septiembre de 2012

1. **(1.5 ptos.)** Encuentre en \mathbb{C} las singularidades de la siguiente función e indique su tipo:

$$f(z) = \frac{1}{5 + 3 \operatorname{sen} z}$$

Solución: Las singularidades de $f(z)$ son los ceros del denominador, debemos resolver la ecuación:

$$5 + 3 \operatorname{sen} z = 0$$

Para ello utilizamos la definición de $\operatorname{sen} z$ en términos de la función exponencial

$$5 + 3 \underbrace{\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)}_{\operatorname{sen} z} = 0$$

Hacemos el cambio

$$e^{iz} = w$$

y como $w \neq 0$

$$e^{-iz} = \frac{1}{e^{iz}} = \frac{1}{w}$$

De esta forma se obtiene una ecuación en la nueva variable w

$$5 + 3 \frac{w - \frac{1}{w}}{2i} = 0 \Rightarrow 5 + 3 \frac{w^2 - 1}{2iw} = 0$$

Multiplicando por $2iw$ obtenemos una ecuación de segundo grado

$$10iw + 3(w^2 - 1) = 0 \Rightarrow 3w^2 + 10iw - 3 = 0$$

que podemos resolver mediante la correspondiente fórmula

$$w = \frac{-10i \pm \sqrt{(-10i)^2 - 4 \cdot (3) \cdot (-3)}}{2 \cdot 3} = \frac{-10i \pm \sqrt{-100 + 36}}{6} = \frac{-10i \pm \sqrt{-64}}{6} = \frac{-10i \pm 8i}{6}$$

lo que nos da dos soluciones

$$\begin{aligned} w_1 &= \left(\frac{-10i + 8i}{6} \right) = \frac{-2i}{6} = -\frac{i}{3} \\ w_2 &= \left(\frac{-10i - 8i}{6} \right) = -\frac{18i}{6} = -3i \end{aligned}$$

Con estos valores para w_1 y w_2 y teniendo en cuenta el cambio que se hizo al principio del ejercicio obtendremos, mediante la definición de logaritmo complejo $e^{iz} = w \Rightarrow iz = \log w = \ln |w| + i \arg w$

$$iz_1 = \log \left(-\frac{i}{3} \right) = \ln \frac{1}{3} + i \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right) \Rightarrow z_1 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi + i \ln 3$$

$$iz_2 = \log(-3i) = \ln 3 + i \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right) \Rightarrow z_2 = \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right) - i \ln 3$$

De este resultado se deduce que hay infinitas singularidades. Son todas de tipo polo simple.

2. **(1.75 pts.)** Encuentre, demostrando su existencia, una función $u(x, y)$, de manera que la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sea entera y se cumpla $f(0) = 1$, siendo $v(x, y)$ definida por

$$\operatorname{Im}(f(z)) = v(x, y) = -2x^2 + 2y^2 + 6x^2y - 2y^3$$

Expresa f como función de z .

Solución: Como se dice en el enunciado que $f(x, y)$ debe ser entera, su parte imaginaria $v(x, y)$ debe ser una función armónica y cumplirá la ecuación de Laplace

$$v_{xx} + v_{yy} = 0 \tag{1}$$

Derivando $v(x, y)$ respecto x e y , una vez

$$\begin{aligned} v_x &= -4x + 12xy \\ v_y &= 4y + 6x^2 - 6y^2 \end{aligned}$$

y otra

$$\begin{aligned} v_{xx} &= -4 + 12y \\ v_{yy} &= 4 - 12y \end{aligned}$$

y al sustituir en 1

$$\underbrace{(-4 + 12y)}_{v_{xx}} + \underbrace{(4 - 12y)}_{v_{yy}} = 0$$

luego $v(x, y)$ es armónica.

Para el cálculo de $u(x, y)$, la parte real de $f(x, y)$, tendremos que aplicar las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned}$$

De la primera de estas ecuaciones (aunque esta elección es indiferente para el resultado final):

$$u_x = v_y \Leftrightarrow u_x = 4y + 6x^2 - 6y^2$$

e integrando respecto a x obtenemos $u(x, y)$

$$u = \int (4y + 6x^2 - 6y^2) dx = 4xy + 2x^3 - 6y^2x + \varphi(y)$$

$\varphi(y)$ es constante para x y para encontrar su expresión derivamos respecto de y

$$u_y = 4x - 12yx + \varphi'(y)$$

Por la segunda de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, esta expresión debe coincidir con $-v_x = -(-4x + 12xy)$:

$$4x - 12yx + \varphi'(y) = 4x - 12xy$$

de donde se deduce que

$$\varphi'(y) = 0$$

e integrando respecto a y se obtiene

$$\varphi(y) = c \in \mathbb{R}$$

La expresión para $u(x, y)$ será

$$u(x, y) = 4xy + 2x^3 - 6y^2x + c$$

y la función $f(x, y)$

$$f(x, y) = (4xy + 2x^3 - 6y^2x + c) + i(-2x^2 + 2y^2 + 6x^2y - 2y^3)$$

Notar que si $z = x + iy$, entonces podemos expresar $f(x, y)$ como función de z de la forma

$$f(z) = 2z^3 - 2iz^2 + c$$

Como $f(0) = 1$, podemos comprobar que $c = 1$.

3. **(1.75 ptos.)** Calcule el desarrollo de Laurent de la función

$$f(z) = \frac{3z}{(2z+1)(z-1)}$$

en el anillo $A(0, \frac{1}{2}, 1) = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < |z| < 1\}$.

Indique la parte regular y esencial de dicho desarrollo.

Solución: La función puede expresarse como

$$f(z) = \frac{3z}{(2z+1)(z-1)} = \frac{3z}{2(z+1/2)(z-1)}$$

Como buscamos potencias de z la mejor descomposición en factores simples es la siguiente:

$$f(z) = \frac{3z}{2(z+1/2)(z-1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{A}{z+1/2} + \frac{B}{z-1} \right)$$

Para la expresión entre paréntesis tenemos

$$\frac{A(z-1) + B(z+1/2)}{(z+1/2)(z-1)}$$

Por tanto

$$A(z-1) + B(z+1/2) = 3z$$

y dando a z los valores de las raíces

$$\left. \begin{aligned} z = -\frac{1}{2} &\Rightarrow A \left(-\frac{1}{2} - 1 \right) = -\frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{3A}{2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow A = 1 \\ z = 1 &\Rightarrow B (1 + 1/2) = 3 \Rightarrow \frac{3}{2}B = 3 \Rightarrow B = 2 \end{aligned} \right\}$$

La descomposición es

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{A}{z + 1/2} + \frac{B}{z - 1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z + 1/2} + \frac{2}{z - 1} \right)$$

El desarrollo de Laurent en el conjunto indicado $\frac{1}{2} < |z| < 1$ de cada fracción se hace de forma independiente.

Para la primera fracción y como $\frac{1}{2} < |z|$, entonces $\frac{1}{2|z|} = \frac{1}{|2z|} < 1$

$$\frac{1}{z + 1/2} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 + \frac{1}{2z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2z} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} \frac{1}{z^n} \text{ con } \left| \frac{1}{2z} \right| < 1$$

Para la segunda fracción y como $|z| < 1$ el desarrollo es

$$\frac{1}{z - 1} = -\frac{1}{1 - z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad |z| < 1$$

La función tendrá el siguiente desarrollo de Laurent

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z + 1/2} + \frac{2}{z - 1} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} \frac{1}{z^n} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} \frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

agrupando potencias negativas y positivas obtendremos las partes regular y singular:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} \frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \text{Parte Regular:} & \quad -\sum_{n=0}^{\infty} z^n \\ \text{Parte Esencial:} & \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} \frac{1}{z^n} \end{aligned}$$

4. Calcule las siguientes integrales utilizando la teoría de variable compleja.

a) **1.5 ptos.**

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{26 - 10 \cos t} dt$$

b) **1.75 ptos.**

$$\int_{\gamma} \left(\operatorname{Re}(z)^2 - \operatorname{Im} z \right) + i(5 \operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z) dz, \quad \text{donde } \gamma(t) = t + it^2; \quad t \in [0, 1]$$

Solución: La primera es una integral trigonométrica que hay que resolver haciendo los cambios correspondientes. Para la segunda integral hay que emplear la definición puesto que comprobaremos posteriormente la curva no es cerrada.

a) Haciendo los cambios correspondientes

$$\begin{aligned} e^{it} &= z \\ \cos t &= \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z} \\ \operatorname{sen} t &= \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2zi} \\ dt &= \frac{1}{iz} dz \end{aligned}$$

la integral queda

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{26 - 10 \cos t} dt = \int_{\gamma} \frac{1}{26 - 10 \left(\frac{z^2 + 1}{2z} \right)} \frac{1}{iz} dz = \frac{1}{i} \int_{\gamma} \frac{1}{26z - 5z^2 - 5} dz = i \int_{\gamma} \frac{1}{5(z - 5) \left(z - \frac{1}{5} \right)} dz$$

siendo $\gamma(t) = e^{it}$, con $t \in [0, 2\pi]$, la circunferencia unidad. Para el cálculo de la integral mediante residuos, sólo se consideran las singularidades que están dentro de la curva, en este caso sólo es $z_1 = \frac{1}{5}$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{26 - 10 \cos t} dt = (2\pi i) i \operatorname{Res} \left(\frac{1}{5(z-5)(z-\frac{1}{5})}, \frac{1}{5} \right) = 2\pi i^2 \frac{1}{5 \left(\frac{1}{5} - 5 \right)} = \frac{\pi}{12}$$

b) La función

$$f(z) = \left((\operatorname{Re} z)^2 - \operatorname{Im} z \right) + i(5 \operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z) = (x^2 - y) + i(5y - x)$$

no es derivable en ningún punto, puesto que si planteamos las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned} u = x^2 - y &\Rightarrow \begin{cases} u_x = 2x \\ u_y = -1 \end{cases} \\ v = 5y - x &\Rightarrow \begin{cases} v_x = -1 \\ v_y = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

vemos que la segunda ecuación $u_y = -v_x$, no se cumple nunca, además la curva no es cerrada puesto que

$$\left. \begin{aligned} \gamma(0) &= 0 \\ \gamma(1) &= 1 + i \end{aligned} \right\} \Rightarrow \gamma(0) \neq \gamma(1)$$

y debemos utilizar la definición de integral a lo largo de una curva

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

siendo en este caso

$$\begin{aligned}\gamma &: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C} \\ \gamma(t) &= t + it^2 \quad t \in [0, 1] \Rightarrow \gamma'(t) = 1 + i2t\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}& \int_{\gamma} \left((\operatorname{Re} z)^2 - \operatorname{Im} z \right) + i (5 \operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z) dz \\ &= \int_0^1 \left\{ \left((\operatorname{Re} \gamma(t))^2 - \operatorname{Im} \gamma(t) \right) + i (5 \operatorname{Im} \gamma(t) - \operatorname{Re} \gamma(t)) \right\} \gamma'(t) dt\end{aligned}$$

que para $\gamma(t)$

$$\operatorname{Re}(\gamma(t)) = t$$

$$\operatorname{Im}(\gamma(t)) = t^2$$

La integral es

$$\int_0^1 \left\{ (t^2 - t^2) + i (5t^2 - t) \right\} (1 + i2t) dt = \int_0^1 i (5t^2 - t) (1 + i2t) dt = i \int_0^1 (5t^2 + 10it^3 - t - i2t^2) dt$$

e integrando directamente

$$i \int_0^1 (5t^2 + 10it^3 - t - i2t^2) dt = i \left(5\frac{t^3}{3} + 10i\frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} - i2\frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^1 = i \left(\frac{5}{3} + \frac{10i}{4} - \frac{1}{2} - i\frac{2}{3} \right) = -\frac{11}{6} + \frac{7}{6}i$$

5. (1.5 puntos) Resuelve mediante la transformada Z el siguiente problema del valor inicial:

$$\begin{cases} y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n & n \geq 0 \\ y_0 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

Solución: Para resolver la ecuación en diferencias

$$y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = \frac{1}{4^n}$$

junto con las condiciones iniciales $y_0 = 0$, $y_1 = 0$, aplicaremos la transformada \mathcal{Z} y sus propiedades: linealidad y desplazamiento

$$\mathcal{Z}[y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n](z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1}{4^n}\right](z)$$

Primero la linealidad

$$\mathcal{Z}[y_{n+2}](z) - 3\mathcal{Z}[y_{n+1}](z) + 2\mathcal{Z}[y_n](z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1}{4^n}\right](z)$$

y a continuación la propiedad de desplazamiento junto con las condiciones iniciales $y_0 = y_1 = 0$

$$\mathcal{Z}[y_{n+2}](z) = z^2 \mathcal{Z}[y_n](z) - z^2 y_0 - z y_1 = z^2 \mathcal{Z}[y_n](z)$$

$$\mathcal{Z}[y_{n+1}](z) = z \mathcal{Z}[y_n](z) - z y_0 = z \mathcal{Z}[y_n](z)$$

$$\mathcal{Z}[y_n](z) = \mathcal{Z}[y_n](z)$$

Sustituyendo en la ecuación

$$z^2 \mathcal{Z}[y_n](z) - 3z \mathcal{Z}[y_n](z) + 2 \mathcal{Z}[y_n](z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1}{4^n}\right](z)$$

$$(z^2 - 3z + 2) \mathcal{Z}[y_n](z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1}{4^n}\right](z)$$

y despejando

$$\mathcal{Z}(y_n)[z] = \frac{\mathcal{Z}\left[\frac{1}{4^n}\right](z)}{(z^2 - 3z + 2)}$$

El valor de $\mathcal{Z}\left[\frac{1}{4^n}\right](z)$ lo obtenemos mediante la aplicación directa la definición de transformada \mathcal{Z} (aunque también se pueden emplear las propiedades de la transformada)

$$\mathcal{Z}[x_n](z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{z^n} \Rightarrow \mathcal{Z}\left[\frac{1}{4^n}\right](z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/4)^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n z^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4z}} = \frac{4z}{4z - 1}$$

y por fin

$$\mathcal{Z}(y_n)[z] = \frac{\frac{4z}{4z-1}}{(z^2 - 3z + 2)} = \frac{4z}{(4z - 1)(z^2 - 3z + 2)}$$

Para obtener el valor de y_n tendremos que calcular la transformada \mathcal{Z} inversa

$$y_n = \mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{4z}{(4z - 1)(z^2 - 3z + 2)}\right)$$

Para calcular la transformada \mathcal{Z} inversa, hay que encontrar las raíces del denominador y hacer la descomposición de la función racional en fracciones simples y teniendo en cuenta que $(4z - 1) = 4\left(z - \frac{1}{4}\right)$

$$\frac{4z}{(4z - 1)(z^2 - 3z + 2)} = \frac{z}{\left(z - \frac{1}{4}\right)(z - 1)(z - 2)} = \left(\frac{A}{z - 1/4} + \frac{B}{z - 1} + \frac{C}{z - 2}\right)$$

A continuación desarrollamos cada fracción en series de Laurent dentro de conjuntos de la forma $A(0, r, \infty)$, es decir en el exterior de bolas de centro 0 y radio r , en todas hay que hacer la misma operación, transformar la fracción para poder emplear la suma de una serie geométrica

$$\frac{1}{z - \frac{1}{4}} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{4z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1} z^n} \quad |z| > \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{z - 1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \quad |z| > 1$$

$$\frac{1}{z - 2} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n} \quad |z| > 2$$

y sustituyendo en la expresión para $F(z)$

$$F(z) = \frac{z}{(z-\frac{1}{4})(z-1)(z-2)} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{4^{n-1}z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C2^{n-1}}{z^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A}{4^{n-1}} + B + C2^{n-1} \right) \frac{1}{z^n} \quad |z| > 2$$

Los coeficientes de las potencias de z son los elementos de la sucesión que buscamos

$$y_n = \left(\frac{A}{4^{n-1}} + B + C2^{n-1} \right) \quad n \geq 1$$

mientras que

$$y_0 = 0$$

como se indicaba en las condiciones iniciales.

Calculamos los valores de A , B y C . Para ello se tiene en cuenta que

$$\frac{z}{(z-\frac{1}{4})(z-1)(z-2)} = \left(\frac{A}{z-1/4} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z-2} \right)$$

podemos sumar e identificar coeficientes

$$\frac{z}{(z-\frac{1}{4})(z-1)(z-2)} = \left\{ \frac{A(z-1)(z-2) + B(z-\frac{1}{4})(z-2) + C(z-\frac{1}{4})(z-1)}{(z-\frac{1}{4})(z-1)(z-2)} \right\}$$

por tanto

$$A(z-1)(z-2) + B(z-\frac{1}{4})(z-2) + C(z-\frac{1}{4})(z-1) = z$$

Dando a z los valores de las raíces $\frac{1}{4}$, 1 y 2

$$z = \frac{1}{4} \Rightarrow A \left(\frac{1}{4} - 1 \right) \left(\frac{1}{4} - 2 \right) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow A \frac{21}{16} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow A = \frac{4}{21}$$

$$z = 1 \Rightarrow B \left(1 - \frac{1}{4} \right) (1 - 2) = 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}B = 1 \Leftrightarrow B = -\frac{4}{3}$$

$$z = 2 \Rightarrow C \left(2 - \frac{1}{4} \right) (2 - 1) = 2 \Leftrightarrow \frac{7}{4}C = 2 \Leftrightarrow C = \frac{8}{7}$$

y obtendremos el valor de y_n

$$y_n = \left(\frac{4}{21} \frac{1}{4^{n-1}} - \frac{4}{3} + \frac{8}{7} 2^{n-1} \right)$$

Si tenemos en cuenta que $\frac{4}{4} = 1$ y que $8 = 4 \cdot 2$ es posible expresar y_n como

$$y_n = \left(\frac{16}{21} \frac{1}{4^n} - \frac{4}{3} + \frac{4}{7} 2^n \right)$$

Podemos comprobar que para $n = 1$, se obtienen el correspondiente valor para la segunda condición inicial

$$y_1 = \left(\frac{16}{21} \frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{4}{7} 2 \right) = \frac{4}{21} - \frac{4}{3} + \frac{8}{7} = \frac{4 - 28 + 24}{21} = 0$$

Notar que también es válido para $n = 0$

$$y_0 = \frac{16}{21} - \frac{4}{3} + \frac{4}{7} = \frac{16 - 28 + 12}{21} = 0$$

También se cumple la ecuación en diferencias

$$\begin{aligned} y_{n+2} &= \left(\frac{16}{21} \frac{1}{4^{n+2}} - \frac{4}{3} + \frac{4}{7} 2^{n+2} \right) \Rightarrow y_{n+2} = \left(\frac{16}{21} \frac{1}{4^{n+2}} - \frac{4}{3} + \frac{4}{7} 2^{n+2} \right) = \frac{1}{21} \frac{1}{4^n} - \frac{4}{3} + \frac{16}{7} 2^n \\ y_{n+1} &= \left(\frac{16}{21} \frac{1}{4^{n+1}} - \frac{4}{3} + \frac{4}{7} 2^{n+1} \right) \Rightarrow -3y_{n+1} = -3 \left(\frac{16}{21} \frac{1}{4^{n+1}} - \frac{4}{3} + \frac{4}{7} 2^{n+1} \right) = -\frac{12}{21} \frac{1}{4^n} + 4 - \frac{24}{7} 2^n \\ y_n &= \left(\frac{16}{21} \frac{1}{4^n} - \frac{4}{3} + \frac{4}{7} 2^n \right) \Rightarrow 2y_n = 2 \left(\frac{16}{21} \frac{1}{4^n} - \frac{4}{3} + \frac{4}{7} 2^n \right) = \frac{32}{21} \frac{1}{4^n} - \frac{8}{3} + \frac{8}{7} 2^n \end{aligned}$$

y sumando

$$\begin{aligned} y_{n+2} - 3y_{n+1} + 3y_n &= \left(\frac{1}{21} \frac{1}{4^n} - \frac{4}{3} + \frac{16}{7} 2^n \right) + \left(-\frac{12}{21} \frac{1}{4^n} + 4 - \frac{24}{7} 2^n \right) + \left(\frac{32}{21} \frac{1}{4^n} - \frac{8}{3} + \frac{8}{7} 2^n \right) \\ &= \frac{1}{4^n} \left(\frac{1}{21} - \frac{12}{21} + \frac{32}{21} \right) + 2^n \left(\frac{16}{7} - \frac{24}{7} + \frac{8}{7} \right) + \left(-\frac{4}{3} + 4 - \frac{8}{3} \right) \\ &= \frac{1}{4^n} \cdot 1 + 2^n \cdot 0 + 0 \\ &= \frac{1}{4^n} \end{aligned}$$