

Variable Compleja y Transformadas

Segundo Curso, I.T. Industrial (Electricidad)

Examen de operaciones básicas, 2 de julio de 2010

1. Expresa el número complejo  $z = \frac{\sqrt{3}}{5} - i\frac{1}{5}$  en forma polar o exponencial.

**Solución:**

$$\text{Módulo: } |z| = \left| \frac{\sqrt{3}}{5} - i\frac{1}{5} \right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^2 + \left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{25} + \frac{1}{25}} = \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$$

$$\text{Argumento: } \theta = \arctan \frac{-1/5}{\sqrt{3}/5} = \arctan -1/\sqrt{3}, \text{ como } z \text{ está en el } 4^\circ \text{ cuadrante, } \theta = -\frac{\pi}{6}$$

2. Calcula el inverso de  $z = 5i - 1$  y expresa el resultado en forma binómica.

**Solución:** Aplicamos la definición de inverso para  $z = -1 + 5i$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{-1 + 5i} = \frac{-1 - 5i}{|-1 + 5i|^2} = \frac{-1 - 5i}{1^2 + 5^2} = -\frac{1}{26} - \frac{5}{26}i$$

3. Calcula el módulo de  $z = \frac{(2 - 5i)}{(1 - 2i)(2 + i)}$ .

**Solución:** No es necesario realizar las operaciones para pasarlo a forma binómica, ya que se utilizan las propiedades de los módulos

$$|z| = \left| \frac{(2 - 5i)}{(1 - 2i)(2 + i)} \right| = \frac{|(2 - 5i)|}{|1 - 2i||2 + i|} = \frac{\left(\sqrt{(2)^2 + (-5)^2}\right)}{\left(\sqrt{1^2 + (-2)^2}\right)(\sqrt{2^2 + 1^2})} = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{29}}{5}$$

4. Calcula  $z = \left(\frac{\sqrt{3}}{5} - i\frac{1}{5}\right)^4$  expresando el resultado en forma binómica.

**Solución:** Ponemos en forma polar o exponencial, notar para ello que es el complejo del ejercicio 1, por tanto  $z = \frac{2}{5}e^{-i\pi/6}$ . Si ahora elevamos a 4 utilizando la definición de potencia entera de un complejo en forma polar

$$z^4 = \left(2e^{-i\pi/6}\right)^4 = \left(\frac{2}{5}\right)^4 e^{-i4\pi/6}$$

El ángulo lo relacionamos con el correspondiente en el primer cuadrante

$$-\frac{4\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3} = -\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - \pi$$

luego utilizando las razones trigonométricas correspondientes a este ángulo

$$\left(\frac{2}{5}\right)^4 e^{-i4\pi/6} = \left(\frac{2}{5}\right)^4 e^{-i\pi} e^{i\pi/3} = -\left(\frac{2}{5}\right)^4 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) = -\left(\frac{2}{5}\right)^4 \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{8}{5^4} - i\frac{8\sqrt{3}}{5^4}$$

5. Calcula  $z = \sqrt[4]{-16}$  y escribe los resultados en forma binómica.

**Solución:** Escribimos el número 4 en forma polar

$$\text{Módulo: } |z| = |-16| = \sqrt{(-16)^2 + (0)^2} = \sqrt{16^2 + 0} = \sqrt{16^2} = 16$$

Argumento: Como  $z$  es un número real negativo  $\theta = \pi$

Las raíces cuartas de  $z$  son

$$w_k = \sqrt[4]{|z|} e^{i\varphi_k} \text{ siendo } \varphi_k = \frac{\theta_w + 2k\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} \text{ con } k = 0, 1, 2, 3$$

por tanto, teniendo en cuenta que  $|z| = 16$  y por tanto  $|w_k| = \sqrt[4]{16} = 2$

$$\begin{aligned} w_0 &= 2e^{i\varphi_0} = 2e^{i\pi/4} = 2 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = (\sqrt{2} + i\sqrt{2}) \\ w_1 &= 2e^{i\varphi_1} = 2e^{i3\pi/4} = 2 \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = (-\sqrt{2} + i\sqrt{2}) \\ w_2 &= 2e^{i\varphi_2} = 2e^{i5\pi/4} = 2 \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = (-\sqrt{2} - i\sqrt{2}) \\ w_3 &= 2e^{i\varphi_3} = 2e^{i7\pi/4} = 2 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = (\sqrt{2} - i\sqrt{2}) \end{aligned}$$

6. Calcula  $z = \frac{2i+1}{3+2i}$  y expresa el resultado en forma binómica.

**Solución:** Para dividir ambos complejos, multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador para obtener

$$\frac{2i+1}{3+2i} = \frac{(2i+1)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{(2i+1)(3-2i)}{|3+2i|^2} = \frac{6i-4i^2+3-2i}{9+4} = \frac{7}{13} + \frac{4}{13}i$$

7. Calcula  $(1-i)(i-2)$  y expresa resultado en forma binómica.

**Solución:** Operamos normalmente utilizando el producto entre complejos

$$(1-i)(i-2) = i - 2 - i^2 + 2i = -1 + 3i$$

8. Calcula  $z = \frac{(i^3-1)i^{40}}{(i^{110}-i^{413})}$  y expresa el resultado en forma binómica.

**Solución:** Reducimos los exponentes teniendo en cuenta el comportamiento cíclico de las potencias de  $i$ .

$$\begin{aligned} i^3 &= -i \\ 40 &= 4 \cdot 10 + 0 \Rightarrow i^{40} = i^0 = 1 \\ 110 &= 4 \cdot 27 + 2 \Rightarrow i^{110} = i^2 = -1 \\ 413 &= 4 \cdot 103 + 1 \Rightarrow i^{413} = i^1 = i \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{(i^3-1)i^{40}}{(i^{110}-i^{413})} = \frac{(-i-1) \cdot 1}{-1-i} = \frac{-1-i}{-1-i} = 1$$

9. Calcula y expresa  $z = \left(\frac{\sqrt{3}}{5} - i\frac{1}{5}\right)(1+i)$  en forma polar o exponencial.

**Solución:** Como el resultado se pide en forma exponencial, lo mejor es utilizar esta forma para cada uno de los complejos. El complejo del numerador  $z_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{5} - i\frac{1}{5}\right)$  ya se puso en forma polar en el ejercicio 1

$$z_1 = \left(\frac{2}{5}\right) e^{-i\pi/6}$$

Otenemos de forma muy rápida la forma polar para el complejo del denominador  $z_2 = (1+i)$

$$\text{Módulo: } |z_2| = |1+i| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\text{Argumento: } \theta_{z_2} = \arctan \frac{1}{1} = \arctan 1, \text{ como } z_2 \text{ está en el } 1^{er} \text{ cuadrante, } \theta_{z_2} = \frac{\pi}{4}$$

Finalmente realizamos el producto en forma exponencial

$$z_1 z_2 = \left(\frac{2}{5} e^{-i\pi/6}\right) \left(\sqrt{2} e^{i\pi/4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{5} e^{-i\pi/6 + i\pi/4} = \frac{2\sqrt{2}}{5} e^{i\pi/12}$$

10. Calcula y expresa  $z = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{5} - i\frac{1}{5}\right)}{(1-i)}$  en forma polar o exponencial.

**Solución:** Como el resultado se pide en forma exponencial, de nuevo, la mejor estrategia es utilizar esta forma para cada uno de los complejos. El complejo del numerador  $z_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{5} - i\frac{1}{5}\right)$  ya lo hemos utilizado en forma polar en varios ejercicios

$$z_1 = \left(\frac{2}{5}\right) e^{-i\pi/6}$$

El complejo del denominador  $z_2 = (1-i)$  es el conjugado de  $1+i$ , cuya representación exponencial fue calculada en el ejercicio anterior, por tanto

$$z_2 = (1-i) = \overline{(1+i)} = \overline{\sqrt{2} e^{i\pi/4}} = \sqrt{2} e^{-i\pi/4}$$

lo único que queda por hacer es el cociente de complejos en forma exponencial:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\left(\frac{2}{5}\right) e^{-i\pi/6}}{\sqrt{2} e^{-i\pi/4}} = \frac{2}{\sqrt{2}5} e^{-i\pi/6 - (-i\pi/4)} = \frac{\sqrt{2}}{5} e^{i\pi/12}$$

Nota: Los requisitos para aprobar la asignatura son: tener al menos 7 preguntas correctas en la parte de Ejercicios Básicos y obtener una puntuación mínima de 5 puntos en la parte de Problemas.

## Variable Compleja y Transformadas

Segundo Curso, I.T.I. Electricidad y Electrónica  
Examen de problemas, 2 de julio de 2010

### OBSERVACIONES GENERALES AL EXAMEN:

- 1.- Responde razonadamente. Las preguntas contestadas correctamente sin incluir el desarrollo necesario para llegar a su resolución podrán ser valoradas con 0 puntos.
  - 2.- Se valorará el correcto uso del vocabulario y la notación empleada; así como la claridad y la presentación de los resultados.
  - 3.- Los errores importantes de cálculo o errores simples reiterados pueden conllevar una puntuación 0 en el apartado correspondiente.
  - 4.- Utiliza resultados exactos, sin decimales, recuerda que **no está permitido** el uso de calculadora.
- 

1. **(0.75 puntos)** Encuentra todas las soluciones de la ecuación

$$\operatorname{sen} z + \cos z = i\sqrt{2}$$

**Solución:** Utilizamos la definición de  $\operatorname{sen}(z)$  y  $\cos(z)$  en términos de la función exponencial para reescribir la ecuación

$$\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right) + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right) = i\sqrt{2}$$

Hacemos el cambio

$$e^{iz} = w$$

y como  $w \neq 0$

$$e^{-iz} = \frac{1}{e^{iz}} = \frac{1}{w}$$

De esta forma se obtiene una ecuación en la variable  $w$

$$\frac{w - \frac{1}{w}}{2i} + \frac{w + \frac{1}{w}}{2} = i\sqrt{2} \Rightarrow \frac{w^2 - 1}{2iw} + \frac{w^2 + 1}{2w} = i\sqrt{2}$$

y multiplicando por  $2iw$  obtenemos una ecuación de segundo grado

$$(w^2 - 1) + i(w^2 + 1) = -2w\sqrt{2} \Rightarrow (1 + i)w^2 + 2\sqrt{2}w + (i - 1) = 0$$

que podemos resolver fácilmente mediante la correspondiente fórmula

$$w = \frac{-2\sqrt{2} \pm \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 4 \cdot (1 + i)(i - 1)}}{2(1 + i)} = \frac{-\sqrt{2} \pm 2}{(1 + i)}$$

Por claridad pondremos  $w$  en forma binómica

$$w = \frac{(-\sqrt{2} \pm 2)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \left(\frac{-\sqrt{2} \pm 2}{2}\right)(1 - i)$$

Obtenemos dos soluciones

$$w_1 = \left(\frac{-\sqrt{2} + 2}{2}\right)(1 - i)$$

$$w_2 = \left(\frac{-\sqrt{2} - 2}{2}\right)(1 - i)$$

que en forma exponencial son

$$w_1 = \left( \frac{-\sqrt{2}+2}{2} \right) e^{-i\pi/4}$$

$$w_2 = \left( \frac{-\sqrt{2}-2}{2} \right) e^{-i\pi/4} = (-1) \left( \frac{\sqrt{2}+2}{2} \right) e^{-i\pi/4} = e^{i\pi} \left( \frac{\sqrt{2}+2}{2} \right) e^{-i\pi/4} = \left( \frac{\sqrt{2}+2}{2} \right) e^{i3\pi/4}$$

donde en  $w_2$  hemos tenido en cuenta que el módulo debe ser positivo y por tanto hemos sacado factor común  $-1$  antes de expresarlo en forma exponencial.

Con estos valores para  $w_1$  y  $w_2$  y teniendo en cuenta el cambio que se hizo al principio del ejercicio obtendremos, mediante la definición de logaritmo complejo

$$iz_1 = \log(w_1) = \ln \left( \frac{-\sqrt{2}+2}{2} \right) + i \left( -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) \Rightarrow z_1 = \left( -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) - i \ln \left( \frac{-\sqrt{2}+2}{2} \right)$$

$$iz_2 = \log(w_2) = \ln \left( \frac{\sqrt{2}+2}{2} \right) + i \left( \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \right) \Rightarrow z_2 = \left( \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \right) - i \ln \left( \frac{\sqrt{2}+2}{2} \right)$$

2. **(0.75 puntos)** Encuentra los números complejos  $z = x + iy$  en los que las siguientes funciones son derivables y calcula la derivada en dichos puntos.

$$f(x + iy) = (x^3 - y^2x + xy) + i(2x^2y + y^2)$$

**Solución:** La función  $f(z)$  será derivable en un punto si las funciones  $u$  y  $v$  cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en ese punto y serán por tanto las soluciones del sistema de ecuaciones

$$u_x = v_y \Rightarrow (3x^2 - y^2 + y) = (2x^2 + 2y) \Rightarrow x^2 - y^2 - y = 0$$

$$u_y = -v_x \Rightarrow (-2yx + x) = -(4xy) \Rightarrow 2xy + x = 0$$

De la segunda ecuación

$$x(1 + 2y) = 0$$

que tiene por soluciones

$$x = 0$$

$$\text{ó}$$

$$y = -\frac{1}{2}$$

Sustituyendo el valor  $x = 0$  en la primera ecuación

$$x = 0 \Rightarrow y^2 + y = 0 \Rightarrow y(y + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

y se obtienen dos puntos:  $P_1 = (0, 0)$  y  $P_2 = (0, -1)$  que son los afijos de los complejos  $z_1 = 0$  y  $z_2 = -i$ . Sustituyendo el valor  $y = -\frac{1}{2}$  en la primera ecuación

$$x^2 - \left( -\frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{4} = 0$$

que no tiene solución puesto que  $x$  debe ser un número real.

En resumen, sólo tenemos dos números complejos para los que  $f(z)$  es derivable. Podemos calcular la derivada en esos puntos utilizando la definición correspondiente

$$f'(x_0 + iy_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = (3x_0^2 - y_0^2 + y_0) + i(-2y_0x_0 + x_0)$$

y para cada complejo

$$f'(0) = f'(0 + i0) = u_x(0, 0) + iv_x(0, 0) = 0 + i0 = 0$$

$$f'(-i) = f'(0 - i1) = u_x(0, -1) + iv_x(0, -1) = -2$$

3. **(1.25 puntos)** De una función entera  $f(z)$  se sabe que

$$\operatorname{Im}(f'(z)) = 6x(2y - 1)$$

$$f(0) = 3 - 2i$$

$$f(1) = 6 - 5i.$$

Calcula el valor de  $f(1 + i)$ . (Observa que se ha proporcionado la parte imaginaria de  $f'(z)$ , que es la derivada de  $f(z)$  o dicho de otro modo  $f(z)$  es una primitiva de  $f'(z)$ )

**Solución:** Teniendo en cuenta que si  $f(z)$  es entera, entonces  $f'(z)$  también lo es, podremos obtener la expresión para  $f'(z) = U + iV$ , siendo  $U = \operatorname{Re}(f')$  y  $V = \operatorname{Im}(f')$ . En primer lugar comprobamos que la función dada  $V = \operatorname{Im}(f'(z)) = 6x(2y - 1) = 12xy - 6x$  es armónica

$$V_x = 12y - 6 \Rightarrow V_{xx} = 0$$

$$V_y = 12x \Rightarrow V_{yy} = 0$$

por tanto se cumple la ecuación de Laplace

$$V_{xx} + V_{yy} = 0.$$

Utilizando la expresión de  $V$  y las ecuaciones de Cauchy-Riemann, podremos obtener la función  $U$ .

La primera ecuación establece

$$U_x = V_y = 12x$$

e integrando respecto a  $x$

$$U = \int U_x dx = \int 12x dx = \frac{12x^2}{2} + C(y) = 6x^2 + C(y)$$

Se utiliza ahora la segunda ecuación para encontrar el valor de  $C(y)$

$$U_y = -V_x \Rightarrow C'(y) = -(12y - 6) = 6 - 12y$$

e integrando respecto de  $y$

$$C(y) = \int 6 - 12y dy = 6y - \frac{12y^2}{2} + \alpha = 6y - 6y^2 + \alpha$$

con  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Obtenemos así la expresión de  $f'(z)$

$$f'(z) = U + iV = (6x^2 + 6y - 6y^2 + \alpha) + i(12xy - 6x)$$

Como  $f'(z)$  es entera, podremos expresarla en términos de la variable  $z$  y de esta forma utilizar que  $f(z)$  es una de sus primitivas. Es fácil darse cuenta de que la función es un polinomio de grado 2 y realizar las

oportunas operaciones, o también es posible buscar las expresiones conocidas para  $z^2 = (x^2 - y^2) + i2xy$  y  $z = x + iy$ , podemos poner la función anterior como

$$f'(z) = (6x^2 + 6y - 6y^2 + \alpha) + i(12xy - 6x) = 6 \left( \underbrace{(x^2 - y^2) + i2xy} \right) - 6i \underbrace{(x + iy)} + \alpha$$

de donde

$$f'(z) = 6z^2 - 6iz + \alpha$$

Si se integra ahora respecto a  $z$ , obtenemos la familia de primitivas de  $f'(z)$

$$f(z) = \int f'(z) dz = \int (6z^2 - 6iz + \alpha) dz = 2z^3 - 3iz^2 + \alpha z + z_0$$

donde en este caso  $z_0 \in \mathbb{C}$ , ya que estamos integrando en  $\mathbb{C}$ .

Los valores de  $\alpha$  y  $z_0$  se obtienen con las condiciones que debe cumplir la función  $f(z)$

$$f(0) = 3 - 2i \Rightarrow f(0) = z_0$$

$$f(1) = 6 - 5i \Rightarrow f(1) = 2 - 3i + \alpha + z_0$$

por tanto

$$z_0 = 3 - 2i$$

$$\alpha = 1$$

La función buscada es

$$f(z) = 2z^3 - 3iz^2 + z + (3 - 2i)$$

(*Método alternativo*) Existe otra forma de resolver este problema y que también se incluye a continuación. Si  $f(z) = u + iv$ , entonces

$$f'(z) = u_x + iv_x$$

por tanto en el enunciado se está dando el valor de  $v_x$  y podemos por una parte obtener  $v$ , integrando respecto a  $x$

$$v = \int v_x dx = \int (12xy - 6x) dx = \frac{12x^2y}{2} - \frac{6x^2}{2} + k_1(y) = 6x^2y - 3x^2 + k_1(y)$$

Pero también teniendo en cuenta las ecuaciones de Cauchy-Riemann, concretamente la segunda ecuación:  $v_x = -u_y$ , podremos obtener una expresión para  $u$ , integrando respecto de  $y$

$$u = \int u_y dy = \int -v_x dx = \int -(12xy - 6x) dx = -\frac{12xy^2}{2} + 6xy + k_2(x) = -6xy^2 + 6xy + k_2(x)$$

y la función  $f(z)$  puede ponerse como

$$f(z) = u + iv = (6xy - 6xy^2 + k_2(x)) + i(6x^2y - 3x^2 + k_1(y))$$

Para obtener  $k_1(y)$  y  $k_2(x)$  utilizaremos la primera ecuación de Cauchy-Riemann:  $u_x = v_y$

$$u_x = v_y \Leftrightarrow (6y - 6y^2 + k_2'(x)) = (6x^2 + k_1'(y))$$

De donde

$$k_2'(x) - 6x^2 = k_1'(y) - (6y - 6y^2)$$

Como el miembro de la derecha no depende de  $y$  y el miembro de la izquierda no depende de  $x$ , para que la igualdad sea cierta, ambas expresiones deben ser constantes, es decir, debe existir un cierto  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que

$$k_2'(x) - 6x^2 = k_1'(y) - (6y - 6y^2) = \alpha$$

De donde, despejando e integrando cada término

$$k_2'(x) = 6x^2 + \alpha \Rightarrow k_2(x) = 2x^3 + \alpha x + \beta$$

$$k_1'(y) = (6y - 6y^2) + \alpha \Rightarrow k_1(y) = 3y^2 - 2y^3 + \alpha y + \gamma$$

donde en este caso  $\beta$  y  $\gamma$  son también números reales. La función  $f(z)$  sería

$$f(z) = (6xy - 6xy^2 + 2x^3 + \alpha x + \beta) + i(6x^2y - 3x^2 + 3y^2 - 2y^3 + \alpha y + \gamma)$$

y ahora es sencillo expresar en términos de  $z$ , utilizando que

$$2z^3 = 2(x + iy)^3 = 2(x^3 + i3x^2y - 3xy^2 - iy^3) = 2x^3 + i6x^2y - 6xy^2 - i2y^3$$

$$-i3z^2 = -i3(x + iy)^2 = -i3(x^2 - y^2 + i2xy) = 6xy - i3x^2 + i3y^2$$

y obtenemos el mismo valor que antes para  $f(z)$

$$f(z) = 2z^3 - i3z^2 + \alpha z + \underbrace{(\beta + i\gamma)}_{z_0}$$

#### 4. Dada la función

$$f(z) = \frac{2z + 1}{z^5 + z^3}$$

- (a) **(1 punto)** Calcula su desarrollo de Laurent en el Anillo  $A_1(0, 0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ .

**Solución:** Buscamos el desarrollo de Laurent de  $f(z)$  en potencias de  $(z - z_0) = z$  dentro del anillo  $A$ . En primer lugar hacemos la descomposición de  $f(z)$  en fracciones simples, buscando las raíces del denominador

$$z^5 + z^3 = z^3(z^2 + 1) = z^3(z - i)(z + i)$$

De esta forma

$$\frac{2z + 1}{z^5 + z^3} = \frac{2z + 1}{z^3(z - i)(z + i)}$$

Como en este apartado estamos buscando potencias de  $z$ , en lugar de hacer la descomposición completa de la fracción, hacemos la siguiente descomposición

$$\frac{2z + 1}{z^3(z - i)(z + i)} = \frac{1}{z^3} \frac{2z + 1}{(z - i)(z + i)} = \frac{1}{z^3} \left( \frac{A}{z - i} + \frac{B}{z + i} \right)$$

Al final del apartado obtendremos los valores de  $A$  y  $B$ , lo interesante ahora es expresar cada fracción simple en la correspondiente serie de potencias. Lo haremos de forma individual, utilizando como siempre que

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \text{ siempre que } |z| < 1$$

- i. Fracción  $\frac{1}{z - i}$ : Como  $0 < |z| < 1$ , entonces  $\frac{|z|}{|i|} = \frac{|z|}{1} < 1$  y el desarrollo buscado es

$$\frac{1}{z - i} = \frac{1}{-i(1 - \frac{z}{i})} = -\frac{1}{i} \left( \frac{1}{1 - \frac{z}{i}} \right) = -\frac{1}{i} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{z}{i} \right)^k = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{i^{n+1}}$$



ii. Fracción  $\frac{1}{z+i}$ : Como  $0 < |z| < 1$ , entonces  $\frac{|z|}{|i|} = \frac{|z|}{1} < 1$  y el desarrollo buscado es

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{i\left(1+\frac{z}{i}\right)} = \frac{1}{i} \left( \frac{1}{1+\frac{z}{i}} \right) = \frac{1}{i} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{z}{i} \right)^k = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{i^{n+1}}$$

Calculamos ahora el valor de  $A$  y  $B$

$$\frac{2z+1}{(z-i)(z+i)} = \frac{A}{z-i} + \frac{B}{z+i} = \frac{A(z+i) + B(z-i)}{(z-i)(z+i)}$$

de donde

$$A(z+i) + B(z-i) = 2z+1$$

Por tanto si  $z = i$

$$\text{Para } z = i \Rightarrow A(2i) = 2i+1 \Rightarrow A = \frac{1+2i}{2i} = 1 - \frac{1}{2}i$$

$$\text{Para } z = -i \Rightarrow B(-2i) = -2i+1 \Rightarrow B = \frac{1-2i}{-2i} = 1 + \frac{1}{2}i$$

y el desarrollo final para la función  $f(z)$  será

$$\begin{aligned} \frac{2z+1}{z^5+z^3} &= \frac{1}{z^3} \left( \frac{A}{z-i} + \frac{B}{z+i} \right) = \frac{1}{z^3} \left( \left(1 - \frac{1}{2}i\right) \left( - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{i^{n+1}} \right) + \left(1 + \frac{1}{2}i\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{i^{n+1}} \right) \\ &= \frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \left(-1 + \frac{1}{2}i\right) + \left(1 + \frac{1}{2}i\right) (-1)^n \right) \frac{z^n}{i^{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \left(-1 + \frac{1}{2}i\right) + \left(1 + \frac{1}{2}i\right) (-1)^n \right) \frac{z^{n-3}}{i^{n+1}} \end{aligned}$$

Por último hacemos el cambio  $n-3$  por  $n$  ( $n$  se cambiará por  $n+3$ ) para expresar la serie correctamente

$$\sum_{n=-3}^{\infty} \left( \left(-1 + \frac{1}{2}i\right) + \left(1 + \frac{1}{2}i\right) (-1)^{n+3} \right) \frac{z^n}{i^{n+4}}$$

como  $i^{n+4} = i^n i^4 = i^n \cdot 1 = i^n$ , simplificamos el resultado

$$\frac{2z+1}{z^5+z^3} = \sum_{n=-3}^{\infty} \left( \left(-1 + \frac{1}{2}i\right) - \left(1 + \frac{1}{2}i\right) (-1)^n \right) \frac{z^n}{i^n}$$

(b) **(1.25 puntos)** Calcula su desarrollo de Laurent en el Anillo  $A_2(i, 1, 2) = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z-i| < 2\}$ .

Buscamos el desarrollo de Laurent de  $f(z)$  en potencias de  $(z-z_0) = (z-i)$  dentro del anillo  $A_2$ . Utilizamos la descomposición encontrada en el apartado anterior para el denominador

$$z^5+z^3 = z^3(z^2+1) = z^3(z-i)(z+i)$$

De esta forma

$$\frac{2z+1}{z^5+z^3} = \frac{2z+1}{z^3(z-i)(z+i)}$$

Como en este apartado estamos buscando potencias de  $z-i$ , en lugar de hacer la descomposición completa de la fracción, hacemos la siguiente descomposición

$$\frac{2z+1}{z^3(z-i)(z+i)} = \frac{1}{(z-i)} \frac{2z+1}{z^3(z+i)} = \frac{1}{(z-i)} \left( \frac{A}{z^3} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z} + \frac{D}{z+i} \right)$$

donde se ha tenido en cuenta la multiplicidad 3 de  $z^3$ . Al final del apartado obtendremos los valores de  $A, B, C$  y  $D$ , como en el apartado anterior, ahora expresaremos cada fracción simple en la correspondiente serie de potencias.

i. Fracción  $\frac{1}{z+i}$ : Como  $1 < |z-i| < 2$ , entonces  $\frac{|z-i|}{2} < 1$  y el desarrollo buscado es

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{(z-i)+i+i} = \frac{1}{(z-i)+2i} = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}} \right) = \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{z-i}{2i} \right)^k$$

ii. Fracción  $\frac{1}{z}$ : Como  $1 < |z-i| < 2$ , entonces  $\frac{|i|}{|z-i|} = \frac{1}{|z-i|} < 1$  y el desarrollo buscado es

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z-i)+i} = \frac{1}{(z-i)} \frac{1}{1+\frac{i}{z-i}} = \frac{1}{z-i} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{i^k}{(z-i)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{i^n}{(z-i)^{n+1}}$$

y haciendo el cambio adecuado para que las potencias estén en función de  $n$

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(z-i)^n}$$

iii. Fracción  $\frac{1}{z^2}$ : En este caso se tiene en cuenta que

$$\frac{1}{z^2} = -\frac{d}{dz} \left( \frac{1}{z} \right)$$

y utilizando el desarrollo de  $\frac{1}{z}$  que hemos calculado en el apartado anterior

$$\frac{1}{z^2} = -\frac{d}{dz} \left( \frac{1}{z} \right) = -\frac{d}{dz} \left( \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(z-i)^n} \right)$$

Es posible intercambiar la derivación con la suma infinita

$$\frac{1}{z^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{(z-i)^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (-n) \frac{1}{(z-i)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{(z-i)^{n+1}}$$

y haciendo el cambio adecuado para que las potencias estén en función de  $n$

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)}{(z-i)^n}$$

iv. Fracción  $\frac{1}{z^3}$ : En este caso se tiene en cuenta que

$$\frac{1}{z^3} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{z^2} \right)$$

y utilizando el desarrollo de  $\frac{1}{z^2}$  que hemos calculado en el apartado anterior, junto con el intercambio entre sumatorio y derivada, y el cambio de contador, obtenemos la expresión de  $\frac{1}{z^3}$  buscado

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^3} &= -\frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{z^2} \right) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left( \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)}{(z-i)^n} \right) = -\frac{1}{2} \left( \sum_{n=2}^{\infty} \frac{d}{dz} \frac{(-1)^n (n-1)}{(z-i)^n} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1) (-n)}{(z-i)^{n+1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n (n-1)}{2 (z-i)^{n+1}} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (n-1) (n-2)}{2 (z-i)^n} \end{aligned}$$

Calculamos ahora el valor de los parámetros

$$\frac{2z+1}{z^3(z+i)} = \left( \frac{A}{z^3} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z} + \frac{D}{z+i} \right) = \frac{A(z+i) + Bz(z+i) + Cz^2(z+i) + Dz^3}{(z-i)(z+i)}$$

de donde

$$A(z+i) + Bz(z+i) + Cz^2(z+i) + Dz^3 = 2z + 1$$

Desarrollando

$$z^3(C+D) + z^2(B+iC) + z(A+iB) + (iA) = 2z + 1$$

Por tanto

$$\begin{aligned} C+D &= 0 \\ B+iC &= 0 \\ A+iB &= 2 \\ iA &= 1 \end{aligned}$$

que tiene por solución

$$\begin{aligned} A &= -i \\ B &= 1-2i \\ C &= 2+i \\ D &= -2-i \end{aligned}$$

y el desarrollo final para la función  $f(z)$  será cambiar cada fracción por sus respectivos desarrollos. Hay un camino más rápido para encontrar este desarrollo y consiste en agrupar las fracciones en  $\frac{1}{z}$

$$\frac{A}{z^3} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z} = \frac{Cz^2 + Bz + D}{z^3}$$

y descomponer el numerador en potencias de  $(z-i)$  que como es un polinomio es muy fácil de hacer mediante Taylor

$$p(z) = Cz^2 + Bz + A = p(i) + p'(i)(z-i) + \frac{p''(i)}{2!}(z-i)^2$$

por tanto, derivamos dos veces  $p(z)$

$$p'(z) = 2Cz + B$$

$$p''(z) = 2C$$

y después sustituimos en  $i$

$$p(i) = -C + B + A$$

$$p'(i) = 2iC + B$$

$$p''(i) = 2C$$

y obtenemos el resultado buscado

$$p(z) = (-C + B + A) + (2iC + B)(z-i) + C(z-i)^2$$

que con los valores obtenidos anteriormente para  $A, B$  y  $C$

$$p(z) = (-1-4i) + (2i-1)(z-i) + (2+i)(z-i)^2$$

y la descomposición de  $f(z)$  es

$$f(z) = \frac{1}{z-i} \left( \frac{A}{z^3} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z} + \frac{D}{z+i} \right) = \frac{(-1-4i) + (2i-1)(z-i) + (2+i)(z-i)^2}{(z-i)z^3} - \frac{1}{(z-i)} \frac{2+i}{(z+i)}$$

y a continuación empleamos las series que hemos encontrado para  $1/z^3$  y  $1/z+i$

$$f(z) = \frac{(-1-4i) + (2i-1)(z-i) + (2+i)(z-i)^2}{z-i} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)(n-2)}{2(z-i)^n} - \frac{2+i}{z-i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2i)^{k+1}} (z-i)^k$$

para que quede más claro hacemos los cambios  $\alpha = -1-4i$ ,  $\beta = (2i-1)$ ,  $\gamma = (2+i)$  y obtenemos

$$f(z) = \left( \frac{\alpha + \beta(z-i) + \gamma(z-i)^2}{z-i} \right) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)(n-2)}{2(z-i)^n} - \left( \frac{\gamma}{z-i} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2i)^{k+1}} (z-i)^k$$

o agrupando

$$f(z) = \left( \frac{\alpha}{z-i} + \beta + \gamma(z-i) \right) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)(n-2)}{2(z-i)^n} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma(-1)^k}{(2i)^{k+1}} (z-i)^{k-1}$$

y todas las potencias empleadas son de  $(z-i)$ .

5. Calcula las siguientes integrales

$$(0.75 \text{ puntos}) \int_{\gamma_1} \frac{e^z}{\operatorname{sen}(z)} dz \quad \text{siendo } \gamma_1(t) = 4e^{it}; \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$(0.75 \text{ puntos}) \int_{\gamma_2} z e^z dz \quad \text{siendo } \gamma_2(t) = t^2 + it; \quad t \in [0, 2]$$

**Solución:** El primer apartado es el cálculo de la integral de una función sobre una curva cerrada que solamente tiene singularidades aisladas, que son los complejos que anulan el denominador

$$\operatorname{sen}(z) = 0 \Rightarrow z = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Aunque hay infinitas singularidades, solamente hay que tener en cuenta aquellas que están de la curva  $\gamma_1$ , que es una circunferencia de radio 4. Por tanto hay que tener en cuenta las singularidades que cumplen

$$d(k\pi, 0) \leq 4 \Rightarrow |k\pi - 0| = |k\pi| = |k|\pi < 4$$

inecuación que tiene por soluciones  $k = -1, 0, 1$ . Las singularidades que nos interesan son

$$\begin{aligned} z_0 &= 0 \\ z_1 &= \pi \\ z_2 &= -\pi \end{aligned}$$

y el valor de la integral es

$$\int_{\gamma_1} \frac{e^z}{\operatorname{sen}(z)} dz = 2\pi i \sum_{k=0}^2 \left( \operatorname{Res} \left( \frac{e^z}{\operatorname{sen}(z)}, z_k \right) \right)$$

Como las singularidades son todas simples el valor del residuo se puede obtener mediante el empleo de límites, o también utilizando que  $f(z) = p(z)/q(z)$ , siendo  $p(z) = e^z$  y  $q(z) = \cos(z)$  y se cumple además  $p(z_k) \neq 0$ ,  $q(z_k) = 0$  y  $q'(z_k) = \cos(z_k) \neq 0$  y por tanto

$$\operatorname{Res}(p(z)/q(z), z_k) = \frac{p(z_k)}{q'(z_k)} = \frac{e^{z_k}}{\cos(z_k)}$$

Para cada singularidad

$$z_0 = 0 \Rightarrow \operatorname{Res} \left( \frac{e^z}{\operatorname{sen}(z)}, 0 \right) = \frac{e^0}{\cos(0)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$z_1 = \pi \Rightarrow \operatorname{Res} \left( \frac{e^z}{\operatorname{sen}(z)}, \pi \right) = \frac{e^\pi}{\cos(\pi)} = \frac{e^\pi}{-1} = -e^\pi$$

$$z_2 = -\pi \Rightarrow \operatorname{Res} \left( \frac{e^z}{\operatorname{sen}(z)}, -\pi \right) = \frac{e^{-\pi}}{\cos(-\pi)} = \frac{e^{-\pi}}{-1} = -e^{-\pi}$$

y sustituyendo en la integral

$$\int_{\gamma_1} \frac{e^z}{\operatorname{sen}(z)} dz = 2\pi i \sum_{k=0}^2 \left( \operatorname{Res} \left( \frac{e^z}{\operatorname{sen}(z)}, z_k \right) \right) = 2\pi i (1 - e^\pi - e^{-\pi})$$

Teniendo en cuenta la definición del coseno hiperbólico

$$\cosh(\pi) = \frac{e^\pi + e^{-\pi}}{2}$$

obtenemos

$$\int_{\gamma_1} \frac{e^z}{\operatorname{sen}(z)} dz = 2\pi i (1 - 2 \cosh \pi)$$

6.  $\int_{\gamma_2} ze^z dz$  es la integral de una función analítica, sin singularidades a lo largo de la curva  $\gamma_2$  que no es cerrada puesto que

$$\gamma(0) = 0^2 + i \cdot 0 = 0$$

$$\gamma(2) = 2^2 + i \cdot 2 = 4 + 2i$$

y por tanto  $\gamma(0) \neq \gamma(2)$ . De esta forma debemos calcular la integral, o bien encontrando una primitiva de la función del integrando o bien mediante la definición de integral a lo largo de una curva. Para este caso es más sencillo encontrar una primitiva de  $f(z)$ , ya que integrando por partes del mismo modo cómo se haría en el cálculo real, encontraremos fácilmente la primitiva

$$F(z) = (z-1)e^z$$

Utilizando la regla de Barrow

$$\int_{\gamma_2} ze^z dz = F(\gamma(2)) - F(\gamma(0)) = F(4+2i) - F(0) = (4+2i-1)e^{4+2i} - (0-1)e^0 = (3+2i)e^{4+2i} + 1$$

o en forma binómica

$$\int_{\gamma_2} ze^z dz = \{e^4(3 \cos 2 - 2 \operatorname{sen} 2) + 1\} + i \{e^4(2 \cos 2 + 3 \operatorname{sen} 2)\}$$

7. Calcula en función de  $r > 0$ , cada una de las siguientes integrales; indicando, cuando proceda, las singularidades y su tipo

$$(1 \text{ punto}) \int_{\gamma_3} \frac{(z-2)}{32z^3 - 4z^2 - z} dz \quad \text{siendo } \gamma_3(t) = i + 3re^{it}; \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$(1 \text{ punto}) \int_{\gamma_4} \left( \frac{e^z}{(z-1)^5} + z^9 \operatorname{sen} \left( \frac{1}{z^2} \right) \right) dz \quad \text{siendo } \gamma_4(t) = re^{it}; \quad t \in [0, 2\pi]$$

**Solución:** Resolveremos cada integral de forma independiente:

- (a)  $\int_{\gamma_3} \frac{(z-2)}{32z^3 - 4z^2 - z} dz$  integral de una función racional a lo largo de una curva cerrada, por tanto tendremos que utilizar el teorema de los residuos. En primer lugar veremos quienes son las singularidades de la función racional, es decir, los ceros del denominador:

$$32z^3 - 4z^2 - z = 0 \Leftrightarrow z(32z^2 - 4z - 1) = 32z \left( z - \frac{1}{4} \right) \left( z + \frac{1}{8} \right)$$

Comprobaremos que son todos polos simples y a la misma vez calcularemos los residuos correspondientes

$$\begin{aligned} z_1 = 0 &\Rightarrow \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(z-2)}{32(z-\frac{1}{4})(z+\frac{1}{8})} = \frac{-2}{32(-\frac{1}{4})(\frac{1}{8})} = 2 \\ z_2 = \frac{1}{4} &\Rightarrow \lim_{z \rightarrow \frac{1}{4}} \left(z - \frac{1}{4}\right) f(z) = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{(z-2)}{32z(z+\frac{1}{8})} = \frac{\frac{1}{4}-2}{32(\frac{1}{4})(\frac{1}{4}+\frac{1}{8})} = -\frac{7}{12} \\ z_3 = -\frac{1}{8} &\Rightarrow \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{8}} \left(z + \frac{1}{8}\right) f(z) = \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{8}} \frac{(z-2)}{32z(z-\frac{1}{4})} = \frac{-\frac{1}{8}-2}{32(-\frac{1}{8})(-\frac{1}{8}-\frac{1}{4})} = -\frac{17}{12} \end{aligned}$$

El valor de la integral depende del valor que tome  $r$ , ya que según el valor que tome la curva (circunferencia) contendrá o no a las singularidades de la función. Calculamos las distancias del centro de la circunferencia a cada una de las singularidades:

$$\begin{aligned} z_1 = 0 &\Rightarrow d(i, 0) = |i - 0| = |i| = 1 \\ z_2 = \frac{1}{4} &\Rightarrow d\left(i, \frac{1}{4}\right) = \left|i - \frac{1}{4}\right| = \sqrt{1 + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{17}{16}} = \frac{\sqrt{17}}{4} \\ z_3 = -\frac{1}{8} &\Rightarrow d\left(i, -\frac{1}{8}\right) = \left|i + \frac{1}{8}\right| = \sqrt{1 + \frac{1}{64}} = \sqrt{\frac{65}{64}} = \frac{\sqrt{65}}{8} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$1 < \sqrt{\frac{65}{64}} < \sqrt{\frac{17}{16}}$$

podemos distinguir los siguientes casos

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < 3r < 1 \Rightarrow 0 < r < \frac{1}{3} \Rightarrow z_1, z_2, z_3 \notin \gamma_3^\circ \Rightarrow \int_{\gamma_3} f(z) dz = 0 \\ 1 < 3r < \frac{\sqrt{65}}{8} \Rightarrow \frac{1}{3} < r < \frac{\sqrt{65}}{24} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z_1 \in \gamma_3^\circ \\ z_2, z_3 \notin \gamma_3^\circ \end{array} \right. \Rightarrow \int_{\gamma_3} f(z) dz = 2\pi i (\text{Res}(f, 0)) = 4\pi i \\ \frac{\sqrt{65}}{8} < 3r < \frac{\sqrt{17}}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{65}}{24} < r < \frac{\sqrt{17}}{12} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z_1, z_3 \in \gamma_3^\circ \\ z_2 \notin \gamma_3^\circ \end{array} \right. \Rightarrow \int_{\gamma_3} f(z) dz = 2\pi i (\text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, -\frac{1}{8})) = \frac{7}{6}i\pi \\ 3r > \frac{\sqrt{17}}{4} \Rightarrow r > \frac{\sqrt{17}}{12} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z_1, z_2, z_3 \in \gamma_3^\circ \end{array} \right. \Rightarrow \int_{\gamma_3} f(z) dz = 2\pi i (\text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, -\frac{1}{8}) + \text{Res}(f, \frac{1}{4})) = 0 \end{array} \right.$$

(b) Utilizando la propiedad de la linealidad en la integral

$$\int_{\gamma_4} \left( \frac{e^z}{(z-1)^5} + z^9 \sin \frac{1}{z^2} \right) dz = \int_{\gamma} \frac{e^z}{(z-1)^5} dz + \int_{\gamma} z^9 \sin \frac{1}{z^2} dz$$

La función  $\frac{e^z}{(z-1)^5}$  tiene una única singularidad  $z_1 = 1$ , en este caso es un polo de orden 5, puesto que

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^5 f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} e^z = e \neq 0$$

y como la función es de la forma  $f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-z_0)^k}$ , el residuo se calcula a través de la fórmula  $\text{Res}\left(\frac{\phi(z)}{(z-z_0)^k}, z_0\right) = \frac{\phi^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$

$$\text{Res}\left(\frac{e^z}{(z-1)^5}, 1\right) = \frac{1}{4!} \frac{d^4 e^z}{dz^4} \Big|_{z=1} = \frac{e}{4!}$$

La función  $z^9 \text{sen} \frac{1}{z^2}$  también tiene una única singularidad,  $z_2 = 0$ , que es aislada y además por estar dentro del argumento de una función seno complejo es esencial, para calcular el residuo de la función en esta singularidad utilizaremos también el desarrollo de Laurent alrededor de su correspondiente singularidad. Utilizamos el desarrollo en series de potencias de la función  $\text{sen}(z)$

$$\text{sen}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \Rightarrow z^9 \text{sen}\left(\frac{1}{z^2}\right) = z^9 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{z^2}\right)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{4n-7}}$$

Para encontrar el residuo buscaremos en la serie el coeficiente que acompaña a la potencia  $(z-z_0)^{-1} = \frac{1}{z-z_0}$ . Para el caso de  $z^9 \text{sen} \frac{1}{z^2}$  y la singularidad  $z_2 = 0$  obtenemos

$$4n - 7 = 1 \Rightarrow 4n = 8 \Rightarrow n = 2$$

por tanto

$$\text{Res}\left(z^9 \text{sen} \frac{1}{z^2}, 0\right) = \frac{(-1)^2}{(2 \cdot 2 + 1)!} = \frac{1}{5!}$$

Para finalizar el ejercicio tendremos que ver cuando cada singularidad está dentro de la curva, como esta curva depende del radio  $r$ , tendremos que distinguir cada uno de los casos. Calculamos las distancias del centro  $z_0 = 0$  a la singularidades

$$z_1 = 1 \Rightarrow |z_1 - z_0| = |1 - 0| = 1$$

$$z_2 = 0 \Rightarrow |z_2 - z_0| = |0 - 0| = 0$$

Por tanto:

$$0 < r < 1 \Rightarrow \begin{cases} z_1 \notin \overset{\circ}{\gamma} \\ z_2 \in \overset{\circ}{\gamma} \end{cases} \Rightarrow \int_{\gamma_4} \frac{e^z}{(z-1)^5} dz + \int_{\gamma_4} z^9 \text{sen} \frac{1}{z^2} dz = 0 + 2\pi i \text{Res}\left(z^9 \text{sen} \frac{1}{z^2}, 0\right) = \frac{2\pi i}{5!}$$

$$r > 1 \Rightarrow z_1, z_2 \in \overset{\circ}{\gamma} \Rightarrow \int_{\gamma_4} \frac{e^z}{(z-1)^5} dz + \int_{\gamma_4} z^9 \text{sen} \frac{1}{z^2} dz = 2\pi i \text{Res}\left(\frac{e^z}{(z-1)^5}, 1\right) + 2\pi i \text{Res}\left(z^9 \text{sen} \frac{1}{z^2}, 0\right) = \frac{\pi i}{10}$$

8. Elige uno, y sólo uno, de los siguientes problemas

**OPCIÓN A.- (1.5 puntos)** Utiliza la transformada  $\mathcal{Z}$  para resolver la ecuación en diferencias

$$32y_{n+2} - 4y_{n+1} - y_n = \frac{1}{2^n}$$

junto con las condiciones iniciales  $y_0 = 8$ ,  $y_1 = 1$ .

**Solución:** Aplicaremos la transformada  $\mathcal{Z}$  y sus propiedades de linealidad y desplazamiento

$$\mathcal{Z}[32y_{n+2} - 4y_{n+1} - y_n](z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1}{2^n}\right](z)$$

Primero la linealidad

$$32\mathcal{Z}[y_{n+2}](z) - 4\mathcal{Z}[y_{n+1}](z) - \mathcal{Z}[y_n](z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1}{2^n}\right](z)$$

y a continuación la propiedad de desplazamiento junto con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[y_{n+2}](z) &= z^2\mathcal{Z}[y_n](z) - z^2y_0 - zy_1 = z^2\mathcal{Z}[y_n](z) - 8z^2 - z \\ \mathcal{Z}[y_{n+1}](z) &= z\mathcal{Z}[y_n](z) - zy_0 = z\mathcal{Z}[y_n](z) - 8z \\ \mathcal{Z}[y_n](z) &= \mathcal{Z}[y_n](z)\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación

$$\begin{aligned}32(z^2\mathcal{Z}[y_n](z) - 8z^2 - z) - 4(z\mathcal{Z}[y_n](z) - 8z) - \mathcal{Z}[y_n](z) &= \mathcal{Z}\left[\frac{1}{2^n}\right](z) \\ (32z^2 - 4z - 1)\mathcal{Z}[y_n](z) - 32 \cdot 8z^2 - 32z + 4 \cdot 8z &= \mathcal{Z}\left[\frac{1}{2^n}\right](z) \\ (32z^2 - 4z - 1)\mathcal{Z}[y_n](z) - 32 \cdot 8z^2 &= \mathcal{Z}\left[\frac{1}{2^n}\right](z) \\ (32z^2 - 4z - 1)\mathcal{Z}[y_n](z) &= \mathcal{Z}\left[\frac{1}{2^n}\right](z) + 32 \cdot 8z^2\end{aligned}$$

y despejando

$$\mathcal{Z}(y_n)[z] = \frac{\mathcal{Z}\left[\frac{1}{2^n}\right](z) + 256z^2}{(32z^2 - 4z - 1)}$$

El valor de  $\mathcal{Z}\left[\frac{1}{2^n}\right](z)$  lo obtenemos mediante la aplicación directa de la definición de transformada  $\mathcal{Z}$

$$\mathcal{Z}\left[\frac{1}{2^n}\right](z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2^n)}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2z}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2z}} = \frac{2z}{2z - 1} = \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

y sustituyendo

$$\mathcal{Z}(y_n)[z] = \frac{\frac{z}{z - \frac{1}{2}} + 256z^2}{(32z^2 - 4z - 1)} = \frac{z + 256z^2(z - \frac{1}{2})}{(z - \frac{1}{2})(32z^2 - 4z - 1)}$$

Para obtener el valor de  $y_n$  tendremos que calcular la transformada  $\mathcal{Z}$  inversa de la expresión anterior

$$y_n = \mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{z + 256z^2(z - \frac{1}{2})}{(z - \frac{1}{2})(32z^2 - 4z - 1)}\right)(z)$$

Para calcular la transformada  $\mathcal{Z}$  inversa, hay que encontrar las raíces del denominador y hacer la descomposición de la función racional en fracciones simples. Las raíces se obtienen fácilmente y más teniendo en cuenta que ya ha aparecido este polinomio en un ejercicio anterior

$$(32z^2 - 4z - 1) = 32\left(z - \frac{1}{4}\right)\left(z + \frac{1}{8}\right)$$

y la función queda

$$F(z) = \frac{z + 256z^2(z - \frac{1}{2})}{32\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)\left(z + \frac{1}{8}\right)}$$

Necesitamos obtener el desarrollo de Laurent de  $F(z)$  dentro de un conjunto de la forma  $A(0, r, \infty)$ , es decir en el exterior de bolas de centro 0 y radio  $r$ , en todas hay que hacer la misma operación.



Para hacer la descomposición en fracciones simples, es necesario, dividir los polinomios, ya que ambos tienen el mismo grado. Sin embargo, puesto que buscamos desarrollos centrados en 0, es decir, desarrollos en potencias de  $z$ , lo mejor es sacar factor común en el numerador como sigue

$$F(z) = \frac{z}{32} \frac{256z(z - \frac{1}{2}) + 1}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{4})(z + \frac{1}{8})}$$

y buscar una descomposición en fracciones simples de la forma

$$F(z) = \frac{z}{32} \left( \frac{A}{(z - \frac{1}{2})} + \frac{B}{(z - \frac{1}{4})} + \frac{C}{(z + \frac{1}{8})} \right)$$

Después cada fracción se desarrolla de la misma forma utilizando la suma de la serie geométrica en las condiciones de convergencia adecuada

$$\frac{1}{z - \frac{1}{2}} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{2z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2z} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1}{z^n} \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{z - \frac{1}{4}} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{4z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{4z} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}} \frac{1}{z^n} \quad |z| > \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{z + \frac{1}{8}} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 + \frac{1}{8z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{8z} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{8^n} \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{8^{n-1}} \frac{1}{z^n} \quad |z| > \frac{1}{8}$$

Queda por calcular los valores de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$

$$\frac{256z(z - \frac{1}{2}) + 1}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{4})(z + \frac{1}{8})} = \frac{A}{(z - \frac{1}{2})} + \frac{B}{(z - \frac{1}{4})} + \frac{C}{(z + \frac{1}{8})}$$

Operando

$$A \left( z - \frac{1}{4} \right) \left( z + \frac{1}{8} \right) + B \left( z - \frac{1}{2} \right) \left( z + \frac{1}{8} \right) + C \left( z - \frac{1}{2} \right) \left( z - \frac{1}{4} \right) = 256z \left( z - \frac{1}{2} \right) + 1$$

Y dando a  $z$  los valores de las raíces  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ , y  $-\frac{1}{8}$

$$z = \frac{1}{2} \Rightarrow A \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \right) = 1 \Leftrightarrow A = \frac{32}{5}$$

$$z = \frac{1}{4} \Rightarrow B \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) = 256 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) + 1 \Leftrightarrow B = \frac{15 \cdot 32}{3} = 160$$

$$z = -\frac{1}{8} \Rightarrow C \left( -\frac{1}{8} - \frac{1}{2} \right) \left( -\frac{1}{8} - \frac{1}{4} \right) = 256 \left( -\frac{1}{8} \right) \left( \left( -\frac{1}{8} \right) - \frac{1}{2} \right) + 1 \Leftrightarrow C = \frac{21 \cdot 64}{15} = \frac{448}{5}$$

de donde

$$\frac{z}{32} \left( \frac{A}{(z - \frac{1}{2})} + \frac{B}{(z - \frac{1}{4})} + \frac{C}{(z + \frac{1}{8})} \right) = z \left( \frac{1}{5} \frac{1}{(z - \frac{1}{2})} + 5 \frac{1}{(z - \frac{1}{4})} + \frac{14}{5} \frac{1}{(z + \frac{1}{8})} \right)$$

y en forma de serie

$$\begin{aligned} F(z) &= z \left( \frac{1}{5} \frac{1}{(z - \frac{1}{2})} + 5 \frac{1}{(z - \frac{1}{4})} + \frac{14}{5} \frac{1}{(z + \frac{1}{8})} \right) \\ &= z \left( \frac{1}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1}{z^n} + 5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}} \frac{1}{z^n} + \frac{14}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{8^{n-1}} \frac{1}{z^n} \right) \\ &= z \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{5} \frac{1}{2^{n-1}} + 5 \frac{1}{4^{n-1}} + \frac{14}{5} (-1)^{n-1} \frac{1}{8^{n-1}} \right) \frac{1}{z^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{5} \frac{1}{2^{n-1}} + 5 \frac{1}{4^{n-1}} + \frac{14}{5} (-1)^{n-1} \frac{1}{8^{n-1}} \right) \frac{1}{z^{n-1}} \end{aligned}$$

Descomposición que es válida para  $|z| > \frac{1}{2}$ . Si cambiamos para que la potencia de  $\frac{1}{z}$  sea  $n$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{5} \frac{1}{2^n} + 5 \frac{1}{4^n} + \frac{14}{5} (-1)^n \frac{1}{8^n} \right) \frac{1}{z^n} \quad |z| > \frac{1}{2}$$

Los coeficientes de las potencias de  $z$  son los elementos de la sucesión que buscamos

$$y_n = \left( \frac{1}{5} \frac{1}{2^n} + 5 \frac{1}{4^n} + \frac{14}{5} (-1)^n \frac{1}{8^n} \right) \quad n \geq 0$$

Podemos comprobar que para  $n = 0$  y  $n = 1$ , se obtienen los valores de las condiciones iniciales

$$y_0 = \left( \frac{1}{5} \frac{1}{2^0} + 5 \frac{1}{4^0} + \frac{14}{5} (-1)^0 \frac{1}{8^0} \right) = \frac{1}{5} + 5 + \frac{14}{5} = 8$$

$$y_1 = \left( \frac{1}{5} \frac{1}{2^1} + 5 \frac{1}{4^1} + \frac{14}{5} (-1)^1 \frac{1}{8^1} \right) = \frac{1}{10} + \frac{5}{4} - \frac{14}{40} = 1$$

**OPCIÓN B.- (1.5 puntos)** Se considera la curva  $\gamma_5(t) = 2e^{it}$ , con  $t \in [0, 2\pi]$  y  $a > 0$ .

(a) Calcula

$$I(a) = \int_{\gamma_5} \frac{1}{\sin(az)(z^2 - 2z + 2)} dz$$

(b) Deduce que  $\lim_{a \rightarrow 0} I(a) = 0$ .

Nota: Los requisitos para aprobar la asignatura son: tener al menos 7 preguntas correctas en la parte de Ejercicios Básicos y obtener una puntuación mínima de 5 puntos en la parte de Problemas.