

## Variable Compleja y Transformadas

### Segundo Curso, I.T. Industrial (Electricidad)

Examen de operaciones básicas, 12 de septiembre de 2009

1. Expresa el número complejo  $z = -\frac{1}{5} - i\frac{\sqrt{3}}{5}$  en forma polar o exponencial.

**Solución:**

$$\text{Módulo: } |z| = \left| -\frac{1}{5} - i\frac{\sqrt{3}}{5} \right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{3}{25}} = \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$$

$$\text{Argumento: } \theta = \arctan \frac{-\sqrt{3}/5}{-1/5} = \arctan \sqrt{3}, \text{ como } z \text{ está en el } 3^\circ \text{ cuadrante, } \theta = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$$

2. Calcula el inverso de  $z = 5 + i$  y expresa el resultado en forma binómica.

**Solución:** Aplicamos la definición de inverso

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{5-i}{|5+i|^2} = \frac{5-i}{5^2+1^2} = \frac{5}{26} - \frac{1}{26}i$$

3. Calcula el módulo de  $z = \frac{(1-5i)(1+i)}{(1-i)}$ .

**Solución:** Utilizando las propiedades de los módulos

$$|z| = \left| \frac{(1-5i)(1+i)}{(1-i)} \right| = \frac{|(1-5i)| |(1+i)|}{|1-i|} = \frac{\left(\sqrt{(1)^2 + (-5)^2}\right) (\sqrt{1^2+1^2})}{\left(\sqrt{1^2 + (-1)^2}\right)} = \frac{\sqrt{26}\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{26}$$

4. Calcula  $z = (-1 + i\sqrt{3})^4$  expresando el resultado en forma binómica.

**Solución:** Ponemos en forma polar o exponencial

$$\text{Módulo: } |z| = \left| -1 + i\sqrt{3} \right| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{Argumento: } \theta = \arctan \frac{\sqrt{3}}{-1} = \arctan -\sqrt{3}, \text{ como } z \text{ está en el } 2^\circ \text{ cuadrante, } \theta = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$$

y por tanto  $z = 2e^{i2\pi/3}$ . Si ahora elevamos a 4

$$z^4 = (2e^{i2\pi/3})^4 = 2^4 e^{i8\pi/3}$$

por otra parte

$$\frac{8\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = 2\pi + \frac{2\pi}{3}$$

luego

$$2^4 e^{i8\pi/3} = 2^4 e^{i2\pi/3} = 16 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 16 \left( -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -8 + i8\sqrt{3}$$

5. Calcula  $z = \sqrt[4]{4}$  y escribe los resultados en forma binómica.

**Solución:** Escribimos el número 4 en forma polar  $z = 4$ :

$$\text{Módulo: } |z| = |4| = \sqrt{(4)^2 + (0)^2} = \sqrt{16 + 0} = \sqrt{16} = 4$$

Argumento: Como  $z$  es un número real positivo  $\theta = 0$

Las raíces cuartas de  $z$  son

$$w_k = \sqrt[4]{|z|} e^{i\varphi_k} \text{ siendo } \varphi_k = \frac{\theta_w + 2k\pi}{4} = \frac{0 + 2k\pi}{4} \text{ con } k = 0, 1, 2, 3$$

por tanto, teniendo en cuenta que  $|z| = 4$  y por tanto  $|w_k| = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt{2} e^{i\varphi_0} = \sqrt{2} e^{i\pi \cdot 0} = \sqrt{2} \\ w_1 &= \sqrt{2} e^{i\varphi_1} = \sqrt{2} e^{i\pi/2} = \sqrt{2} i \\ w_2 &= \sqrt{2} e^{i\varphi_2} = \sqrt{2} e^{i\pi} = -\sqrt{2} \\ w_3 &= \sqrt{2} e^{i\varphi_3} = \sqrt{2} e^{i3\pi/2} = -\sqrt{2} i \end{aligned}$$

6. Calcula  $z = \frac{1+i}{3-i}$  y expresa el resultado en forma binómica.

**Solución:** Para dividir ambos complejos, multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador para obtener

$$\frac{1+i}{3-i} = \frac{1+i}{(3-i)(3+i)} = \frac{(1+i)(3+i)}{|3+i|^2} = \frac{3+i+3i-1}{9+1} = \frac{2}{10} + \frac{4}{10}i = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$$

7. Calcula  $(1+i)(3-i)$  y expresa resultado en forma binómica.

**Solución:** Operamos normalmente

$$(1+i)(3-i) = 3 - i + 3i - (i)^2 = 4 + 2i$$

8. Calcula  $z = \frac{(i^{33} - i^{30})}{(i^{100} - i^{403})}$  y expresa el resultado en forma binómica.

**Solución:** En primer lugar reducimos los exponentes teniendo en cuenta el comportamiento cíclico de las potencias de  $i$ .

$$\begin{aligned} 33 &= 4 \cdot 8 + 1 \Rightarrow i^{33} = i^1 = i \\ 30 &= 4 \cdot 7 + 2 \Rightarrow i^{30} = i^2 = -1 \\ 100 &= 4 \cdot 25 + 0 \Rightarrow i^{100} = i^0 = 1 \\ 403 &= 4 \cdot 100 + 3 \Rightarrow i^{403} = i^3 = -i \end{aligned}$$

por tanto

$$\frac{(i^{33} - i^{30})}{(i^{100} - i^{403})} = \frac{i - (-1)}{1 - (-i)} = \frac{i + 1}{1 + i} = \frac{1 + i}{1 + i} = 1$$

9. Calcula y expresa  $z = (-1 - i\sqrt{3})(1 + i)$  en forma polar o exponencial.

**Solución:** Como el resultado se pide en forma polar, lo mejor es utilizar la forma polar para cada uno de los complejos. Para  $z_1 = (-1 - i\sqrt{3})$

$$\text{Módulo: } |z_1| = |-1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{Argumento: } \theta_{z_1} = \arctan \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \arctan \sqrt{3}, \text{ como } z_1 \text{ está en el } 3^{\text{er}} \text{ cuadrante, } \theta_{z_1} = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$$

Para  $z_2 = (1 + i)$

$$\text{Módulo: } |z_2| = |1 + i| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

$$\text{Argumento: } \theta_{z_2} = \arctan \frac{1}{1} = \arctan 1, \text{ como } z_2 \text{ está en el } 1^{\text{er}} \text{ cuadrante, } \theta_{z_2} = \frac{\pi}{4}$$

Finalmente realizamos el producto en forma exponencial

$$z_1 z_2 = (2e^{i4\pi/3}) (\sqrt{2}e^{i\pi/4}) = 2\sqrt{2}e^{i4\pi/3 + i\pi/4} = 2\sqrt{2}e^{i19\pi/12}$$

10. Calcula y expresa  $z = \frac{(1 - i)}{(-1 + i\sqrt{3})}$  en forma polar o exponencial.

**Solución:** Como el resultado se pide en forma polar, lo mejor es utilizar la forma polar para cada uno de los complejos.

Notar que  $(1 - i)$  es el conjugado de  $1 + i$ , cuya representación exponencial ha sido calculada en el ejercicio anterior, por tanto

$$z_1 = (1 - i) = \overline{(1 + i)} = \overline{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$$

El complejo del denominador  $(-1 + \sqrt{3}i)$  también es el complejo conjugado en este caso de  $(-1 - i\sqrt{3})$ , cuya representación exponencial también ha sido calculada en el ejercicio anterior, por tanto

$$z_2 = (-1 + \sqrt{3}i) = \overline{(-1 - \sqrt{3}i)} = \overline{(2e^{i4\pi/3})} = (2e^{-i4\pi/3})$$

lo único que queda por hacer es el cociente de complejos en forma exponencial:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}}{(2e^{-i4\pi/3})} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\pi/4 - (-i4\pi/3)} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i13\pi/12}$$

Nota: Los requisitos para aprobar la asignatura son: tener al menos 7 preguntas correctas en la parte de Ejercicios Básicos y obtener una puntuación mínima de 5 puntos en la parte de Problemas.

## Variable Compleja y Transformadas

Segundo Curso, I.T.I. Electricidad y Electrónica  
Examen de problemas, 12 de septiembre de 2009

### OBSERVACIONES GENERALES AL EXAMEN:

- 1.- Responde razonadamente. Las preguntas contestadas correctamente sin incluir el desarrollo necesario para llegar a su resolución podrán ser valoradas con 0 puntos.
  - 2.- Se valorará el correcto uso del vocabulario y la notación empleada; así como la claridad y la presentación de los resultados.
  - 3.- Los errores importantes de cálculo o errores simples reiterados pueden conllevar una puntuación 0 en el apartado correspondiente.
  - 4.- Utiliza resultados exactos, sin decimales, recuerda que **no está permitido** el uso de calculadora.
- 

1. **(1 punto)** Resuelve en  $\mathbb{C}$  la ecuación de segundo grado en  $e^z$

$$e^{4z} - 2e^{2z} + 2 = 0$$

**Solución:** En primer lugar realizamos el cambio

$$e^{2z} = w$$

este cambio transforma la ecuación anterior en una ecuación de segundo grado:

$$w^2 - 2w + 2 = 0$$

que resolvemos

$$w = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

Para obtener el valor de  $z$  deshacemos el cambio anterior

$$w = e^{2z} \Leftrightarrow 2z = \log(w) \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} \log(w)$$

siendo en este caso la función  $\log()$ , el logaritmo complejo de un número complejo que como sabemos es

$$\log(w) = \ln|w| + i(\arg(w) + 2k\pi)$$

siendo  $\ln()$  el logaritmo neperiano real.

Para los valores de  $w$  obtenidos tendremos

$$w = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4} \Rightarrow z = \frac{1}{2} \log(1 + i) = \frac{1}{2} \left\{ \ln \sqrt{2} + i \left( \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) \right\} = \frac{1}{4} \ln(2) + i \left( \frac{\pi}{8} + k\pi \right)$$

$$w = 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4} \Rightarrow z = \frac{1}{2} \log(1 - i) = \frac{1}{2} \left\{ \ln \sqrt{2} + i \left( -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) \right\} = \frac{1}{4} \ln(2) + i \left( -\frac{\pi}{8} + k\pi \right)$$

2. **(1.25 puntos)** Encuentra, demostrando su existencia, una función  $v(x, y)$ , de manera que la función  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  sea entera y se cumpla  $f(0) = 1$ , con  $u(x, y)$  definida por:

$$\operatorname{Re}(f(z)) = u(x, y) = e^{2x} \cos(2y)$$

**Solución:** Primero debemos comprobar que la función  $v(x, y)$  existe, para ello tendremos que comprobar que  $u(x, y)$  es armónica, es decir, cumple la ecuación de Laplace:  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ , lo que hacemos fácilmente derivando parcialmente respecto a  $x$  e  $y$  de forma adecuada

$$\left. \begin{array}{l} u_x = 2e^{2x} \cos(2y) \Rightarrow u_{xx} = 4e^{2x} \cos(2y) \\ u_y = -2e^{2x} \sin(2y) \Rightarrow u_{yy} = -4e^{2x} \cos(2y) \end{array} \right\} \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 4e^{2x} \cos(2y) + (-4e^{2x} \cos(2y)) = 0$$

Para encontrar el valor de  $v(x, y)$  y puesto que queremos que  $f(z)$  sea entera, tendremos que aplicar las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\left. \begin{array}{l} u_x = v_y = 2e^{2x} \cos(2y) \\ u_y = -v_x = -2e^{2x} \sin(2y) \end{array} \right\}$$

En la primera ecuación integramos respecto a  $y$  (se puede comenzar por la otra si se prefiere)

$$v = \int v_y dy = \int 2e^{2x} \cos(2y) dy = e^{2x} \sin(2y) + C(x)$$

siendo  $C(x)$  una función constante respecto a  $y$ .

Derivando  $v$  respecto a  $x$  y utilizando la segunda ecuación de Cauchy-Riemann

$$\left. \begin{array}{l} v_x = 2e^{2x} \sin(2y) + C'(x) \\ v_x = -u_y = -(-2e^{2x} \sin(2y)) \end{array} \right\} \Rightarrow 2e^{2x} \sin(2y) + C'(x) = 2e^{2x} \sin(2y)$$

de donde se obtiene

$$C'(x) = 0 \Rightarrow C(x) = K$$

donde ahora  $K$  es una constante. La función  $v(x, y)$  buscada pertenece a la familia

$$v(x, y) = e^{2x} \sin(2y) + K$$

Y la función  $f(z)$  es

$$f(z) = f(x + iy) = \{e^{2x} \cos(2y)\} + i \{e^{2x} \sin(2y) + K\}$$

que podemos expresar fácilmente como

$$f(z) = e^{2z} + iK$$

Para obtener el valor de  $K$  tendremos que aplicar las condiciones del enunciado:  $f(0) = 1$

$$f(0 + i \cdot 0) = 1 + 0 \cdot i \Rightarrow \{e^{2 \cdot 0} \cos(2 \cdot 0)\} + i \{e^{2 \cdot 0} \sin(2 \cdot 0) + K\} = 1 + iK = 1$$

y por tanto  $K = 0$ .

3. **2.0 puntos)** Calcula dentro de los conjuntos indicados, el desarrollo de Laurent centrado en  $z_0$  de la función

$$f(z) = \frac{z+2}{(z-1)(z-2)(z-3)}$$

- (a) En el Anillo  $A_1(0, 2, 3) = \{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z| < 3\}$ ; centrada en  $z_0 = 0$ .  
 (b) En el Anillo  $A_2(2, 0, 1) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-2| < 1\}$ ; centrada en  $z_0 = 2$ .

**Solución:** En el primer apartado buscamos el desarrollo de Laurent de  $f(z)$  en potencias de  $z$  dentro del anillo  $A_1$ , mientras que en el segundo apartado buscamos el desarrollo de Laurent de  $f(z)$  en potencias de  $(z-2)$  dentro del anillo  $D_2$ . En ambos casos hacemos la descomposición de  $f(z)$  en fracciones simples de la forma

$$\frac{z+2}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{z-3}$$

Al final del ejercicio obtendremos los valores de estos parámetros, sin embargo lo interesante ahora es expresar cada fracción simple en la correspondiente serie de potencias. Lo haremos de forma individual y para cada uno de los anillos, utilizando como siempre la suma de una progresión geométrica con razón menor que la unidad

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \text{ siempre que } |z| < 1$$

- (a)  $D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z| < 3\}$  y  $z_0 = 0$ .

En este caso buscamos desarrollos en potencias de  $(z - z_0) = (z - 0) = z$ .

- i. Fracción  $\frac{1}{z-1}$ : Como  $2 < |z|$ , entonces  $\frac{1}{|z|} < \frac{1}{2} < 1$  y la razón debe ser  $\frac{1}{z}$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}$$

- ii. Fracción  $\frac{1}{z-2}$ : Como  $2 < |z|$ , entonces  $\frac{2}{|z|} < 1$  y la razón debe ser  $\frac{2}{z}$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z(1-\frac{2}{z})} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n}$$

- iii. Fracción  $\frac{1}{z-3}$ : Como  $|z| < 3$ , entonces  $\frac{|z|}{3} < 1$  y la razón debe ser  $\frac{z}{3}$

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{3} \frac{1}{\frac{z}{3}-1} = -\frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}$$

El desarrollo para  $f(z)$  buscado es

$$\frac{z+2}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{z-3} = A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n} - C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}$$

(b)  $D_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - 2| < 1\}$  y  $z_0 = 2$ .

En este caso buscamos desarrollos en potencias de  $(z - z_0) = (z - 2)$ .

- i. Fracción  $\frac{1}{z-1}$ : Como buscamos potencias de  $z - 2$ , el primer paso será intentar que dicho factor aparezca en la fracción y para ello sumamos y restamos en el denominador la constante 1

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1+(z-2)}$$

Como en el conjunto  $D_2$  ocurre que  $|z - 2| < 1$ , emplearemos  $(z - 2)$  como razón

$$\frac{1}{1+(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n$$

- ii. Fracción  $\frac{1}{z-2}$ : En este caso ya es una potencia de  $(z - 2)$  y su desarrollo es directo

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-2}$$

- iii. Fracción  $\frac{1}{z-3}$ : Como buscamos potencias de  $z - 2$ , en primer lugar intentamos que aparezca el factor  $(z - 2)$

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{-1+(z-2)} = \frac{-1}{1-(z-2)}$$

Como en el conjunto  $D_2$  ocurre que  $|z - 2| < 1$  entonces este factor es de nuevo la razón buscada

$$\frac{1}{z-3} = \frac{-1}{1-(z-2)} = -\sum_{n=0}^{\infty} (z-2)^n$$

El desarrollo para  $f(z)$  buscado es:

$$\frac{z+2}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{z-3} = A \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n + B \frac{1}{z-2} - C \sum_{n=0}^{\infty} (z-2)^n$$

Finalmente lo único que queda por hacer es calcular los valores de  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Para ello utilizamos la descomposición correspondiente

$$\frac{z+2}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{z-3}$$

y sumando las fracciones e igualando numeradores

$$A(z-2)(z-3) + B(z-1)(z-3) + C(z-1)(z-2) = z+2$$

Y dando a  $z$  los valores de las raíces 1, 2 y 3

$$\begin{aligned} z &= 1 \Rightarrow A(1-2)(1-3) = 1+2 \Leftrightarrow 2A = 3 \Leftrightarrow A = \frac{3}{2} \\ z &= 2 \Rightarrow B(2-1)(2-3) = 2+2 \Leftrightarrow -B = 4 \Leftrightarrow B = -4 \\ z &= 3 \Rightarrow C(3-1)(3-2) = 3+2 \Leftrightarrow 2C = 5 \Leftrightarrow C = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

4. Calcula en función de  $r > 0$ , cada una de las siguientes integrales; indicando, cuando proceda, las singularidades y su tipo.

**(1.25 punto)**  $\int_{\gamma} \frac{(z-2)}{z^3-6z^2+11z-6} dz \quad \gamma(t) = re^{it}; \quad t \in [0, 2\pi]$

(a) **(1.25 punto)**  $\int_{\gamma} \left( e^{\frac{1}{z-1}} + \operatorname{sen} \left( \frac{1}{z} \right) \right) dz \quad \gamma(t) = 1 + re^{it}; \quad t \in [0, 2\pi]$

(b) **(1.25 punto)**  $\int_{\gamma} \operatorname{Re}(z) \operatorname{Im}(z) dz$  siendo  $\gamma(t)$  el segmento que une  $z_1 = 0$  con  $z_2 = r + ir$ .

**Solución:** Resolvemos cada integral de forma independiente:

- (a) Se trata de la integral de una función racional a lo largo de una curva cerrada (circunferencia de centro  $i$  y radio  $r$ ). Como las funciones racionales sólo tienen singularidades aisladas, el método que tenemos que emplear es el teorema de los residuos. En primer lugar buscamos las singularidades de la función, que serán los ceros del denominador y que podemos calcular fácilmente por la regla de Ruffini

$$z^3 - 6z^2 + 11z - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 = 2 \\ z_3 = 3 \end{cases}$$

Luego la función del integrando se puede expresar como

$$\frac{z-2}{z^3-6z^2+11z-6} = \frac{(z-2)}{(z-1)(z-2)(z-3)}$$

de donde se deduce que 1 y 3 son polos simples, mientras que 2 es una singularidad evitable.

Teniendo en cuenta que  $z_2 = 2$  es evitable, por una parte  $\operatorname{Res}(f(z), 2) = 0$  y por otra la función puede expresarse, para  $z \neq 2$ , como

$$\frac{1}{(z-1)(z-3)}$$

A continuación calcularemos los residuos en cada una de las restantes singularidades

$$\operatorname{Res}(f(z), 1) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{(z-3)} = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Res}(f(z), 3) = \lim_{z \rightarrow 3} (z-3)f(z) = \lim_{z \rightarrow 3} \frac{1}{(z-1)} = \frac{1}{2}$$



Para finalizar el ejercicio tendremos que ver qué singularidades están dentro de la curva; como esta curva depende del radio  $r$ , tendremos que distinguir cada uno de los casos. Para ello calculamos las distancias del centro  $z_0 = 0$ , a cada una de las singularidades

$$z_1 = 1 \Rightarrow |z_1 - z_0| = |1 - 0| = |1| = 1$$

$$z_2 = 2 \Rightarrow |z_2 - z_0| = |2 - 0| = |2| = 2$$

$$z_3 = 3 \Rightarrow |z_3 - z_0| = |3 - 0| = |3| = 3$$

Por tanto:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < r < 1 \Rightarrow z_1, z_2, z_3 \notin \overset{\circ}{\gamma} \Rightarrow \int_{\gamma} \frac{z^2 + 1}{z^2(z - i)} dz = 0 \\ 1 < r < 2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z_1 \in \overset{\circ}{\gamma} \\ z_2, z_3 \notin \overset{\circ}{\gamma} \end{array} \right. \Rightarrow \int_{\gamma} \frac{z^2 + 1}{z^2(z - i)} dz = 2\pi i (\text{Res}(f, 1)) = 2\pi i \left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi i \\ 2 < r < 3 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z_1, z_2 \in \overset{\circ}{\gamma} \\ z_3 \notin \overset{\circ}{\gamma} \end{array} \right. \Rightarrow \int_{\gamma} \frac{z^2 + 1}{z^2(z - i)} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^2 \text{Res}(f, z_k) = 2\pi i \left\{-\frac{1}{2} + 0\right\} = -\pi i \\ r > 3 \Rightarrow z_1, z_2, z_3 \in \overset{\circ}{\gamma} \Rightarrow \int_{\gamma} \frac{z^2 + 1}{z^2(z - i)} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^3 \text{Res}(f, z_k) = 2\pi i \left\{-\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}\right\} = 0 \end{array} \right.$$

(b) Utilizando la linealidad la integral se puede poner como

$$\int_{\gamma} \left( e^{\frac{1}{z-1}} + \text{sen} \left( \frac{1}{z} \right) \right) dz = \int_{\gamma} e^{\frac{1}{z-1}} dz + \int_{\gamma} \text{sen} \left( \frac{1}{z} \right) dz$$

La función  $e^{1/z-1}$  tiene una única singularidad,  $z_1 = 1$ , que es aislada y además por estar dentro del argumento de una función exponencial es esencial.

La función  $\text{sen} \frac{1}{z}$  también tiene una única singularidad  $z_2 = 0$ , que por estar dentro del argumento de una función  $\text{sen}(z)$  también es esencial.

En ambos casos para encontrar el valor del residuo tendremos que encontrar el desarrollo de la función correspondiente alrededor de su singularidad.

Estos desarrollos son muy sencillos utilizando el desarrollo en series de potencias de las funciones  $e^z$  y  $\text{sen}(z)$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \Rightarrow e^{1/(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(z-1)^n}$$

$$\operatorname{sen}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1}}$$

Para encontrar el residuo buscaremos en cada serie el coeficiente que acompaña a la potencia  $(z - z_0)^{-1} = \frac{1}{z - z_0}$ . Para el caso de  $e^{1/z-1}$  y la singularidad  $z_1 = 1$  obtenemos

$$n = 1 \Rightarrow \frac{1}{1!} = 1$$

por tanto

$$\operatorname{Res}(e^{1/z-1}, 1) = 1$$

Para el caso  $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right)$  y  $z_2 = 0$

$$n = 0 \Rightarrow \frac{(-1)^0}{(2 \cdot 0 + 1)!} = 1$$

por tanto

$$\operatorname{Res}\left(\operatorname{sen} \frac{1}{z}, 0\right) = 1$$

Para finalizar el ejercicio tendremos que ver cuando cada singularidad está dentro de la curva, como esta curva depende del radio  $r$ , tendremos que distinguir cada uno de los casos. Calculamos las distancias del centro  $z_0 = 1$  a la singularidades

$$z_1 = 1 \Rightarrow |z_1 - z_0| = |1 - 1| = |0| = 0$$

$$z_2 = 0 \Rightarrow |z_2 - z_0| = |0 - 1| = |-1| = 1$$

Por tanto:

$$0 < r < 1 \Rightarrow \begin{cases} z_1 \in \overset{\circ}{\gamma} \\ z_2 \notin \overset{\circ}{\gamma} \end{cases} \Rightarrow \int_{\gamma} e^{\frac{1}{z-1}} dz + \int_{\gamma} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(e^{1/z-1}, 1) + 0 = 2\pi i$$

$$r > 1 \Rightarrow z_1, z_2 \in \overset{\circ}{\gamma} \Rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \left\{ \operatorname{Res}(e^{1/z-1}, 1) + \operatorname{Res}\left(\operatorname{sen} \frac{1}{z}, 0\right) \right\} = 2\pi \{1 + 1\} = 4\pi i$$

(c) La función dentro del integrando es

$$f(z) = \operatorname{Re}(z) \operatorname{Im}(z) = xy = xy + i \cdot 0 \Rightarrow \begin{cases} u = xy \\ v = 0 \end{cases}$$

Utilizando las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} u_x = y \\ v_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow u_x = v_y \Leftrightarrow y = 0$$

$$\begin{cases} u_y = x \\ v_x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow u_y = -v_x \Leftrightarrow x = 0$$

vemos que el único punto donde  $f(z)$  es derivable es el  $(0, 0)$ , por tanto será necesario utilizar la definición de integral de una función compleja a lo largo de una curva. Necesitamos conocer la expresión (parametrización) de la curva; al ser un segmento lineal es muy sencilla utilizando la definición correspondiente

$$\gamma(t) = (1-t)z_1 + tz_2 \quad t \in [0, 1]$$

con  $z_1 = 0$  y  $z_2 = r + ir$ , obtenemos

$$\gamma(t) = t(r + ir) = rt + irt \quad t \in [0, 1]$$

Para aplicar la definición de integral a lo largo de una curva necesitamos el valor de  $\gamma'(t)$

$$\gamma'(t) = r(1 + i)$$

Ya estamos en condiciones de aplicar la fórmula correspondiente para  $f(z) = \operatorname{Re}(z) \operatorname{Im}(z)$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_0^1 \operatorname{Re}(\gamma(t)) \operatorname{Im}(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^1 \operatorname{Re}(rt + irt) \operatorname{Im}(rt + irt) r(1 + i) dt = \int_0^1 (rt)(rt) r(1 + i) dt \end{aligned}$$

Realizamos las operaciones correspondientes e integrando se obtiene el valor buscado

$$r^3(1 + i) \int_0^1 t^2 dt = r^3(1 + i) \int_0^1 t^2 dt = r^3(1 + i) \left. \frac{t^3}{3} \right|_{t=0}^{t=1} = \frac{r^3}{3}(1 + i)$$

5. Elige uno, y sólo uno, de los problemas siguientes sobre la transformada  $\mathcal{Z}$

**OPCIÓN A.-** Resuelve cada uno de los siguientes apartados:

- (a) **(1 punto)** Calcula la transformada  $\mathcal{Z}$  de la siguiente sucesión  $x_n = (n^2 + n) 2^n$
- (b) **(1 punto)** Calcula la transformada  $\mathcal{Z}$  inversa de la función  $F(z) = \frac{z+2}{(z-1)(z-2)(z-3)}$

**OPCIÓN B.- (2 puntos)** Utiliza la transformada  $\mathcal{Z}$  para resolver la ecuación en diferencias

$$y_{n+3} + 2y_{n+2} - y_{n+1} - 2y_n = 0$$

con condiciones iniciales  $y_0 = 0$ ,  $y_1 = 0$  e  $y_2 = 1$ .

**Solución: OPCIÓN A.** Resolvemos cada apartado de forma independiente

(a) Utilizamos las propiedades de la transformada  $\mathcal{Z}$ . Primero la linealidad para poner

$$\mathcal{Z}[x_n](z) = \mathcal{Z}[(n^2 + n) 2^n](z) = \mathcal{Z}[n^2 2^n](z) + \mathcal{Z}[n 2^n](z)$$

Y ahora utilizamos la propiedad de la potenciación

$$\mathcal{Z}[n^k y_n](z) = \left(-z \frac{d}{dz}\right)^k (\mathcal{Z}[y_n](z))$$

Para el primer sumando

$$\left. \begin{array}{l} k = 2 \\ y_n = 2^n \end{array} \right\} \Rightarrow \mathcal{Z} [n^2 2^n] (z) = \left( -z \frac{d}{dz} \right)^2 (\mathcal{Z} [2^n] (z))$$

para  $y_n = 2^n$  es muy fácil, utilizando la definición (o la propiedad correspondiente), calcular su transformada  $\mathcal{Z}$

$$(\mathcal{Z} [2^n] (z)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{2}{z} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} = \frac{z}{z-2} \quad \text{si } |z| > 2$$

Sustituyendo

$$\mathcal{Z} [n^2 2^n] (z) = \left( -z \frac{d}{dz} \right)^2 \left( \frac{z}{z-2} \right) = -z \frac{d}{dz} \left( -z \frac{d}{dz} \left( \frac{z}{z-2} \right) \right)$$

o en pasos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left( \frac{z}{z-2} \right) &= \frac{1(z-2) - z \cdot 1}{(z-2)^2} = \frac{-2}{(z-2)^2} \\ -z \frac{d}{dz} \left( \frac{z}{z-2} \right) &= -z \left( \frac{-2}{(z-2)^2} \right) = \frac{2z}{(z-2)^2} \\ \frac{d}{dz} \left( \frac{2z}{(z-2)^2} \right) &= \frac{2(z-2)^2 - 2(z-2)2z}{(z-2)^4} = \frac{2(z-2) - 4z}{(z-2)^3} = \frac{-2z-4}{(z-2)^3} \\ -z \frac{d}{dz} \left( \frac{2z}{(z-2)^2} \right) &= -z \left( \frac{-2z-4}{(z-2)^3} \right) = \frac{2z(z+2)}{(z-2)^3} \end{aligned}$$

y

$$\mathcal{Z} [n^2 2^n] (z) = \frac{2z(z+2)}{(z-2)^3}$$

Para el segundo sumando

$$\left. \begin{array}{l} k = 1 \\ y_n = 2^n \end{array} \right\} \Rightarrow \mathcal{Z} [n \cdot 2^n] (z) = \left( -z \frac{d}{dz} \right) (\mathcal{Z} [2^n] (z))$$

Y podemos emplear el apartado anterior para obtener fácilmente que

$$(\mathcal{Z} [n 2^n] (z)) = \frac{2z}{(z-2)^2} \quad \text{si } |z| > 2$$

Por tanto la respuesta buscada es

$$\mathcal{Z} [n^2 2^n + n 2^n] (z) = \frac{2z(z+2)}{(z-2)^3} + \frac{2z}{(z-2)^2} = \frac{4z^2}{(z-2)^3}$$

6. Para calcular la transformada  $\mathcal{Z}$  inversa, hay que hacer la descomposición de la función racional en fracciones simples

$$F(z) = \frac{z+2}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{z-3}$$

y encontrar los desarrollos de Laurent de cada fracción en conjuntos de la forma  $A(0, r, \infty)$ , es decir en el exterior de bolas de centro 0 y radio  $r$ , en todas hay que hacer la misma operación, transformar la fracción para poder emplear la suma de una serie geométrica

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-1} &= \frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \quad |z| > 1 \\ \frac{1}{z-2} &= \frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n} \quad |z| > 2 \\ \frac{1}{z-3} &= \frac{1}{z\left(1-\frac{3}{z}\right)} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{3}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{z^n} \quad |z| > 3 \end{aligned}$$

Ahora tocaría calcular los valores de  $A$ ,  $B$  y  $C$  pero como podemos comprobar, esta descomposición ya se realizó en el ejercicio 3, ya que la función  $f(z)$  es la misma, así que

$$A = \frac{3}{2}$$

$$B = -4$$

$$C = \frac{5}{2}$$

Por tanto

$$F(z) = \frac{z+2}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \frac{3}{2} \frac{1}{z-1} - \frac{4}{z-2} + \frac{5}{2} \frac{1}{z-3}$$

utilizando las series

$$\frac{3}{2} \frac{1}{z-1} - \frac{4}{z-2} + \frac{5}{2} \frac{1}{z-3} = \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n} + \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{z^n}$$

agrupando en un único sumatorio

$$\frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{z^n} + \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3}{2} - 2^{n+1} + \frac{5}{2} 3^{n-1} \right) \frac{1}{z^n}$$

Como

$$\mathcal{Z}[x_n](z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3}{2} - 2^{n+1} + \frac{5}{2} 3^{n-1} \right) \frac{1}{z^n}$$

la solución buscada es identificando elementos

$$x_0 = 0$$

$$x_n = \left( \frac{3}{2} - 2^{n+1} + \frac{5}{2} 3^{n-1} \right)$$

7. **OPCIÓN 2:** Para resolver la ecuación en diferencias

$$y_{n+3} + 2y_{n+2} - y_{n+1} - 2y_n = 0$$

junto con las condiciones iniciales  $y_0 = 0$ ,  $y_1 = 0$  e  $y_2 = 1$ , aplicaremos la transformada  $\mathcal{Z}$  y sus propiedades: linealidad y desplazamiento

$$\mathcal{Z}(y_{n+3} + 2y_{n+2} - y_{n+1} - 2y_n)[z] = \mathcal{Z}(0)$$

Primero la linealidad

$$\mathcal{Z}(y_{n+3})[z] + 2\mathcal{Z}(y_{n+2})[z] - \mathcal{Z}(y_{n+1})[z] - 2\mathcal{Z}(y_n)[z] = 0$$

y a continuación la propiedad de desplazamiento junto con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}(y_{n+3})[z] &= z^3 \mathcal{Z}(y_n)[z] - z^3 y_0 - z^2 y_1 - z y_2 = z^3 \mathcal{Z}(y_n)[z] - z \\ \mathcal{Z}(y_{n+2})[z] &= z^2 \mathcal{Z}(y_n)[z] - z^2 y_0 - z y_1 = z^2 \mathcal{Z}(y_n)[z] \\ \mathcal{Z}(y_{n+1})[z] &= z \mathcal{Z}(y_n)[z] - z y_0 = z \mathcal{Z}(y_n)[z] \\ \mathcal{Z}(y_n)[z] &= \mathcal{Z}(y_n)[z]\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación

$$(z^3 \mathcal{Z}(y_n)[z] - z) + 2(z^2 \mathcal{Z}(y_n)[z]) - z \mathcal{Z}(y_n)[z] - 2\mathcal{Z}(y_n)[z] = 0$$

$$(z^3 + 2z^2 - z - 2) \mathcal{Z}(y_n)[z] - z = 0$$

$$(z^3 + 2z^2 - z - 2) \mathcal{Z}(y_n)[z] = z$$

y despejando

$$\mathcal{Z}(y_n)[z] = \frac{z}{(z^3 + 2z^2 - z - 2)}$$

Para obtener el valor de  $y_n$  tendremos que calcular la transformada  $\mathcal{Z}$  inversa

$$y_n = \mathcal{Z}^{-1} \left( \frac{z}{z^3 + 2z^2 - z - 2} \right)$$

Para calcular la transformada  $\mathcal{Z}$  inversa, hay que encontrar las raíces del denominador y hacer la descomposición de la función racional en fracciones simples. Las raíces se obtienen muy fácilmente mediante Ruffini

$$z^3 + 2z^2 - z - 2 = (z - 1)(z + 1)(z + 2)$$

y la descomposición en fracciones simples será

$$F(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)(z+2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1} + \frac{C}{z+2}$$

y hallar los desarrollos de Laurent de cada fracción en conjuntos de la forma  $A(0, r, \infty)$ , es decir en el exterior de bolas de centro 0 y radio  $r$ , en todas hay que hacer la misma operación, transformar la fracción para poder emplear la suma de una serie geométrica

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-1} &= \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \quad |z| > 1 \\ \frac{1}{z+1} &= \frac{1}{z(1+\frac{1}{z})} = \frac{1}{z} \frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z^n} \quad |z| > 1 \\ \frac{1}{z+2} &= \frac{1}{z(1+\frac{2}{z})} = \frac{1}{z} \frac{1}{1+\frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{n-1}}{z^n} \quad |z| > 2 \end{aligned}$$

Finalmente lo único que queda por hacer es calcular los valores de  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Para ello utilizamos la descomposición correspondiente

$$\frac{z}{(z-1)(z+1)(z+2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1} + \frac{C}{z+2}$$

y sumando las fracciones e igualando numeradores

$$A(z+1)(z+2) + B(z-1)(z+2) + C(z-1)(z+1) = z$$

Y dando a  $z$  los valores de las raíces 1,  $-1$  y  $-2$

$$\begin{aligned} z = 1 &\Rightarrow A(1+1)(1+2) = 1 \Leftrightarrow 6A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{6} \\ z = -1 &\Rightarrow B(-1-1)(-1+2) = -1 \Leftrightarrow -2B = -1 \Leftrightarrow B = \frac{1}{2} \\ z = -2 &\Rightarrow C(-2-1)(-2+1) = -2 \Leftrightarrow 3C = -2 \Leftrightarrow C = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{z}{(z-1)(z+1)(z+2)} = \frac{1}{6} \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{z+1} - \frac{2}{3} \frac{1}{z+2}$$

y en forma de serie

$$\begin{aligned} \frac{z}{(z-1)(z+1)(z+2)} &= \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z^n} - \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{n-1}}{z^n} \quad |z| > 2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{2} (-1)^{n-1} + \frac{1}{3} (-1)^n 2^n \right) \frac{1}{z^n} \quad |z| > 2 \end{aligned}$$

Los coeficientes de las potencias de  $z$  son los elementos de la sucesión que buscamos

$$y_n = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} (-1)^{n-1} + \frac{1}{3} (-1)^n 2^n \quad n > 1$$

o también

$$y_n = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{3}(-1)^n 2^n \quad n > 1$$

mientras que

$$y_0 = 0$$

Podemos comprobar que para  $n = 1$  y  $n = 2$ , se obtienen los valores de las condiciones iniciales

$$y_1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}(-1)^1 + \frac{1}{3}(-1)^1 2^1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = 0$$

$$y_2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}(-1)^2 + \frac{1}{3}(-1)^2 2^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{4}{3} = 1$$

Nota: Los requisitos para aprobar la asignatura son: tener al menos 7 preguntas correctas en la parte de Ejercicios Básicos y obtener una puntuación mínima de 5 puntos en la parte de Problemas.