

Variable Compleja y Transformadas

Segundo Curso, I.T. Industrial (Electricidad)

Examen de operaciones básicas, 25 de junio de 2009

1. Expresa el número complejo $z = \frac{1}{5} - i\frac{\sqrt{3}}{5}$ en forma polar o exponencial.

Solución:

$$\text{Módulo: } |z| = \left| \frac{1}{5} - i\frac{\sqrt{3}}{5} \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{3}{25}} = \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$$

$$\text{Argumento: } \theta = \arctan \frac{-\sqrt{3}/5}{1/5} = \arctan -\sqrt{3}, \text{ como } z \text{ está en el } 4^\circ \text{ cuadrante, } \theta = -\frac{\pi}{3}$$

2. Calcula el inverso de $z = 1 + 5i$ y expresa el resultado en forma binómica.

Solución: Aplicamos la definición de inverso

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1 - 5i}{|1 + 5i|^2} = \frac{1 - 5i}{1^2 + 5^2} = \frac{1}{26} - \frac{5}{26}i$$

3. Calcula el módulo de $z = \frac{(1 + 5i)(1 - i)}{(1 + i)}$.

Solución: Utilizando las propiedades de los módulos

$$|z| = \left| \frac{(1 + 5i)(1 - i)}{(1 + i)} \right| = \frac{|(1 + 5i)| |(1 - i)|}{|1 + i|} = \frac{(\sqrt{1^2 + 5^2}) (\sqrt{1^2 + (-1)^2})}{(\sqrt{1^2 + 1^2})} = \frac{\sqrt{26}\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{26}$$

4. Calcula $z = (1 + i\sqrt{3})^4$ expresando el resultado en forma binómica.

Solución: Ponemos en forma polar o exponencial

$$\text{Módulo: } |z| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{Argumento: } \theta = \arctan \frac{\sqrt{3}}{1} = \arctan \sqrt{3}, \text{ como } z \text{ está en el primer cuadrante, } \theta = \frac{\pi}{3}$$

y por tanto $z = 2e^{i\pi/3}$. Si ahora elevamos a 4

$$z^4 = (2e^{i\pi/3})^4 = 2^4 e^{i4\pi/3} = 16 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = 16 \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -8 - i8\sqrt{3}$$

5. Calcula $z = \sqrt[4]{-1}$ y escribe los resultados en forma binómica.

Solución: Utilizamos la definición de raíz cuarta de -1 utilizando la forma polar o exponencial del radicando $w = -1$:

$$\text{Módulo: } |w| = |-1| = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2} = \sqrt{1+0} = \sqrt{1} = 1$$

$$\text{Argumento: } \theta_w = \arctan \frac{0}{-1} = \arctan 0, \text{ como } w \text{ está en el eje real negativo, } \theta_w = \pi$$

Las raíces cuartas de w son

$$w_k = \sqrt[4]{|w|} e^{i\varphi_k} \text{ siendo } \varphi_k = \frac{\theta_w + 2k\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} \text{ con } k = 0, 1, 2, 3$$

por tanto, teniendo en cuenta que $|w| = 1$

$$\begin{aligned} w_0 &= e^{i\varphi_0} = e^{i\pi/4} = \cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \\ w_1 &= e^{i\varphi_1} = e^{i3\pi/4} = \cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \\ w_2 &= e^{i\varphi_2} = e^{i5\pi/4} = \cos \frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \\ w_3 &= e^{i\varphi_3} = e^{i7\pi/4} = \cos \frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

6. Calcula $z = \frac{1-i}{3+8i}$ y expresa el resultado en forma binómica.

Solución: Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador para obtener

$$\frac{1-i}{3+8i} \frac{(3-8i)}{(3-8i)} = \frac{(1-i)(3-8i)}{|3-8i|^2} = \frac{3-8i-3i-8}{9+64} = \frac{-5}{73} - \frac{11}{73}i$$

7. Calcula $(1-i)(3+8i)$ y expresa resultado en forma binómica.

Solución: Realizamos la multiplicación de forma usual

$$(1-i)(3+8i) = 3+8i-3i-8 = 11+5i$$

8. Calcula $z = \frac{(i^{36} - i^{33})}{(i^{103} - i^{406})}$ y expresa el resultado en forma binómica.

Solución: En primer lugar reducimos los exponentes teniendo en cuenta el comportamiento cíclico de las potencias de i .

$$\begin{aligned} 36 &= 4 \cdot 9 + 0 \Rightarrow i^{36} = i^0 = 1 \\ 33 &= 4 \cdot 8 + 1 \Rightarrow i^{33} = i^1 = i \\ 103 &= 4 \cdot 25 + 3 \Rightarrow i^{103} = i^3 = -i \\ 406 &= 4 \cdot 101 + 2 \Rightarrow i^{406} = i^2 = -1 \end{aligned}$$

por tanto

$$\frac{(i^{36} - i^{33})}{(i^{103} - i^{406})} = \frac{1 - i}{-i - (-1)} = \frac{1 - i}{-i + 1} = \frac{1 - i}{1 - i} = 1$$

9. Calcula y expresa $z = (1 + i\sqrt{3})(1 - i)$ en forma polar o exponencial.

Solución: Como el resultado se pide en forma polar, lo mejor es utilizar la forma polar para cada uno de los complejos. Para $z_1 = (1 + i\sqrt{3})$

$$\text{Módulo: } |z_1| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$

Argumento: $\theta_{z_1} = \arctan \frac{\sqrt{3}}{1} = \arctan \sqrt{3}$, como z_1 está en el primer cuadrante, $\theta_{z_1} = \frac{\pi}{3}$

Para $z_2 = (1 - i)$

$$\text{Módulo: } |z_2| = |1 - i| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

Argumento: $\theta_{z_2} = \arctan \frac{-1}{1} = \arctan -1$, como z_2 está en el cuarto cuadrante, $\theta_{z_2} = -\frac{\pi}{4}$

Hacemos el producto en forma exponencial

$$z_1 z_2 = (2e^{i\pi/3}) (\sqrt{2}e^{-i\pi/4}) = 2\sqrt{2}e^{i\pi/3 + (-i\pi/4)} = 2\sqrt{2}e^{i\pi/12}$$

10. Calcula y expresa $z = \frac{(1 - i)}{(1 + i\sqrt{3})}$ en forma polar o exponencial.

Solución: Como el resultado se pide en forma polar, lo mejor es utilizar la forma polar para cada uno de los complejos. Notar que los números complejos utilizados ya se han puesto en forma exponencial en el ejercicio anterior, por tanto, lo único que resta por hacer es realizar el cociente de complejos en forma exponencial:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2e^{i\pi/3})}{(\sqrt{2}e^{-i\pi/4})} = \frac{2}{\sqrt{2}}e^{i\pi/3 - (-i\pi/4)} = \frac{2}{\sqrt{2}}e^{i7\pi/12}$$

Nota: Los requisitos para aprobar la asignatura son: tener al menos 7 preguntas correctas en la parte de Ejercicios Básicos y obtener una puntuación mínima de 5 puntos en la parte de Problemas.

Variable Compleja y Transformadas

Segundo Curso, I.T.I. Electricidad y Electrónica

Examen de problemas, 25 de junio de 2009

OBSERVACIONES GENERALES AL EXAMEN:

- 1.- Responde razonadamente. Las preguntas contestadas correctamente sin incluir el desarrollo necesario para llegar a su resolución podrán ser valoradas con 0 puntos.
 - 2.- Se valorará el correcto uso del vocabulario y la notación empleada; así como la claridad y la presentación de los resultados.
 - 3.- Los errores importantes de cálculo o errores simples reiterados pueden conllevar una puntuación 0 en el apartado correspondiente.
 - 4.- Utiliza resultados exactos, sin decimales, recuerda que **no está permitido** el uso de calculadora.
-

1. Calcula y expresa en forma binómica las siguientes expresiones

a) (0.5 puntos) $z_0 = 2^i$ b) (0.5 puntos) $z_1 = \operatorname{sen}(i)$

Solución: Para el apartado a) aplicamos la definición de potencia compleja

$$2^i = e^{i \log(2)}$$

donde $\log(2)$ es el logaritmo complejo de 2, que calculamos fácilmente

$$\log(2) = \ln(2) + i(0 + 2k\pi) = \ln(2) + i2k\pi$$

y que sustituimos para obtener

$$2^i = e^{i \log(2)} = e^{i(\ln 2 + i2k\pi)} = e^{-2k\pi + i \ln 2}$$

Por último para obtener la forma binómica, tenemos en cuenta la definición de exponencial compleja

$$2^i = e^{-2k\pi + i \ln 2} = e^{-2k\pi} \cos(\ln 2) + i e^{-2k\pi} \operatorname{sen}(\ln 2)$$

Para el apartado b) utilizamos directamente la definición del seno complejo

$$\operatorname{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \Rightarrow \operatorname{sen}(i) = \frac{e^{i \cdot i} - e^{-i \cdot i}}{2i} = \frac{e^{-1} - e^1}{2i}$$

y teniendo en cuenta que $\frac{1}{i} = -i$

$$\operatorname{sen}(i) = \frac{e^1 - e^{-1}}{2} i$$

que bien ponemos en términos del seno hiperbólico

$$\operatorname{sen}(i) = 0 + i \sinh(1)$$

o bien en términos de la exponencial como

$$\operatorname{sen}(i) = 0 + i \left(\frac{e^2 - 1}{2e} \right)$$

2. **(1.25 puntos)** Encuentra, demostrando su existencia, una función $v(x, y)$, de manera que la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sea entera y se cumpla $f(0) = 1$, con $u(x, y)$ definida por:

$$\operatorname{Re}(f(z)) = u(x, y) = x + e^x \cos(y)$$

Solución: En primer lugar debemos comprobar que la función $v(x, y)$ existe, para ello tendremos que comprobar que $u(x, y)$ es armónica, es decir, cumple la ecuación de Laplace: $u_{xx} + u_{yy} = 0$, lo que hacemos fácilmente derivando parcialmente respecto a x e y de forma adecuada

$$\left. \begin{array}{l} u_x = 1 + e^x \cos(y) \Rightarrow u_{xx} = e^x \cos(y) \\ u_y = -e^x \sin(y) \Rightarrow u_{yy} = -e^x \cos(y) \end{array} \right\} \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = e^x \cos(y) + (-e^x \cos(y)) = 0$$

Para encontrar el valor de $v(x, y)$ y puesto que queremos que $f(z)$ sea entera, tendremos que aplicar las ecuaciones de Cauchy-Riemann: $u_x = v_y$

$$\left. \begin{array}{l} u_x = v_y = 1 + e^x \cos(y) \\ u_y = -v_x = -e^x \sin(y) \end{array} \right\}$$

De la primera ecuación integramos respecto a y (se puede comenzar por la otra si se prefiere)

$$v = \int v_y dy = \int (1 + e^x \cos(y)) dy = y + e^x \sin(y) + C(x)$$

siendo $C(x)$ una función constante respecto a y .

Derivando v respecto a x y utilizando la segunda ecuación de Cauchy-Riemann

$$\left. \begin{array}{l} v_x = e^x \sin(y) + C'(x) \\ v_x = -u_y = -(-e^x \sin(y)) \end{array} \right\} \Rightarrow e^x \sin(y) + C'(x) = e^x \sin(y)$$

de donde se obtiene

$$C'(x) = 0 \Rightarrow C(x) = K$$

donde ahora K es una constante. La función $v(x, y)$ buscada pertenece a la familia

$$v(x, y) = y + e^x \sin(y) + K$$

Y la función $f(z)$ es

$$f(z) = f(x + iy) = \{x + e^x \cos(y)\} + i\{y + e^x \sin(y) + K\}$$

que podemos expresar fácilmente como

$$f(z) = z + e^z + iK$$

Para obtener el valor de K , tendremos que aplicar las condiciones del enunciado: $f(0) = 1$

$$f(0 + i \cdot 0) = 1 + i \cdot 0 \Rightarrow \{0 + e^0 \cos(0)\} + i\{0 + e^0 \sin(0) + K\} = 1 + iK = 1$$

y por tanto $K = 0$.

3. **(2.0 puntos)** Calcula dentro de los conjuntos indicados, el desarrollo de Laurent centrado en z_0 de la función

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)z(z-1)}$$

- (a) $D_1 = \{z \in \mathbb{C} | 0 < |z| < 1\} = A(0, 0, 1)$ y $z_0 = 0$.
 (b) $D_2 = \{z \in \mathbb{C} | 1 < |z-i| < \sqrt{2}\} = A(i, 1, \sqrt{2})$ y $z_0 = i$.

Solución: En el primer apartado buscamos el desarrollo de Laurent de $f(z)$ en potencias de z dentro del anillo D_1 , mientras que en el segundo apartado buscamos el desarrollo de Laurent de $f(z)$ en potencias de $(z-i)$ dentro del anillo D_2 . En ambos casos el problema se puede resolver de dos modos. Podemos elegir la descomposición de $f(z)$ en fracciones simples de la forma

$$\frac{1}{(z-i)z(z-1)} = \frac{A}{z-i} + \frac{B}{z} + \frac{C}{z-1}$$

Aunque también podemos, para el primer apartado, donde buscamos potencias de z , utilizar la siguiente descomposición

$$\frac{1}{(z-i)z(z-1)} = \frac{1}{z} \left(\frac{D}{z-i} + \frac{E}{z-1} \right)$$

y para el segundo apartado, donde las potencias que buscamos son de $(z-i)$, esta otra

$$\frac{1}{(z-i)z(z-1)} = \frac{1}{z-i} \left(\frac{F}{z} + \frac{G}{z-1} \right)$$

Notar que se utilizan distintas variables (A, B, \dots) puesto que en cada descomposición los numeradores serán distintos. Al final del ejercicio podemos obtener los valores de estos parámetros, sin embargo lo interesante ahora es expresar cada fracción simple en la correspondiente serie de potencias. Lo haremos de forma individual y para cada uno de los anillos y utilizando como siempre la suma de una progresión geométrica con razón menor que la unidad

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \text{ siempre que } |z| < 1$$

- (a) $D_1 = \{z \in \mathbb{C} | 0 < |z| < 1\}$ y $z_0 = 0$. En este caso buscamos desarrollos en potencias de $(z-z_0) = (z-0) = z$.

- i. Fracción $\frac{1}{z}$: En este caso ya es una potencia de z y su desarrollo sería directo

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z}$$

- ii. Fracción $\frac{1}{z-i}$: Podemos utilizar el siguiente desarrollo

$$\frac{1}{z-i} = -\frac{1}{i} \frac{1}{1 - \left(\frac{z}{i}\right)} = -\frac{1}{i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{i}\right)^n \text{ siempre que } \left|\frac{z}{i}\right| < 1$$

Pero $\left|\frac{z}{i}\right| < 1$ es equivalente a poner $\left|\frac{z}{i}\right| = \frac{|z|}{|i|} = \frac{|z|}{1} = |z| < 1$, desigualdad que se cumple por la definición de D_1 .

iii. Fracción $\frac{1}{z-1}$: Podemos utilizar el siguiente desarrollo

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n \text{ siempre que } |z| < 1$$

que es precisamente lo que pasa ya que estamos dentro del conjunto D_1 .

El desarrollo para $f(z)$ buscado es:

$$\frac{1}{(z-i)z(z-1)} = \frac{A}{z-i} + \frac{B}{z} + \frac{C}{z-1} = -A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{i^{n+1}} + \frac{B}{z} - C \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

(b) $D_2 = \{z \in \mathbb{C} | 1 < |z-i| < \sqrt{2}\}$ y $z_0 = i$. En este caso buscamos desarrollos en potencias de $(z-z_0) = (z-i)$.

i. Fracción $\frac{1}{z}$: Como buscamos potencias de $z-i$, el primer paso será intentar que dicho factor aparezca en la fracción, y para ello sumamos y restamos en el denominador la constante i

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{i + (z-i)}$$

Como en el conjunto D_2 ocurre que $1 < |z-i|$, entonces

$$\left| \frac{i}{z-i} \right| = \frac{1}{|z-i|} < 1$$

Por tanto, se transforma la fracción sacando factor común $(z-i)$

$$\frac{1}{i + (z-i)} = \frac{1}{(z-i)} \frac{1}{1 + \left(\frac{i}{z-i}\right)} = \left(\frac{1}{z-i}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{i}{z-i}\right)^n \text{ con } \frac{1}{|z-i|} < 1$$

ii. Fracción $\frac{1}{z-i}$: En este caso ya es una potencia de $(z-i)$ y su desarrollo es directo

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z-i}$$

iii. Fracción $\frac{1}{z-1}$: Como buscamos potencias de $z-i$, procedemos como en la primera fracción, sumando y restando en el denominador el complejo i .

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{(i-1) + (z-i)}$$

Como en D_2 ocurre $|z-i| < \sqrt{2}$, entonces

$$\frac{|z-i|}{|i-1|} = \frac{|z-i|}{\sqrt{2}} < 1$$

y transformamos la fracción sacando factor común $(i-1)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-1} &= \frac{1}{(i-1) + (z-i)} = \frac{1}{(i-1)} \frac{1}{1 + \left(\frac{z-i}{i-1}\right)} \\ &= \left(\frac{1}{i-1}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-i}{i-1}\right)^n \text{ con } \left|\frac{z-i}{i-1}\right| < 1 \end{aligned}$$

El desarrollo para $f(z)$ buscado es:

$$\frac{1}{(z-i)z(z-1)} = \frac{A}{z-i} + \frac{B}{z} + \frac{C}{z-1} = \frac{A}{z-i} + B \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{i^n}{(z-i)^{n+1}} + C \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-i)^n}{(i-1)^{n+1}}$$

Finalmente lo único que queda por hacer es calcular los valores de A , B y C .

4. Calcula en función de $r > 0$, cada una de las siguientes integrales; indicando, cuando proceda, las singularidades y su tipo.

(a) **(1.25 punto)** $\int_{\gamma} \frac{z^2 + 1}{z^2(z-i)} dz$ $\gamma(t) = i + re^{it}; \quad t \in [0, 2\pi]$

(b) **(1.25 punto)** $\int_{\gamma} z^6 \left(\sin\left(\frac{1}{z}\right) + \cos(z) \right) dz$ $\gamma(t) = 1 + re^{it}; \quad t \in [0, 2\pi]$

(c) **(1.25 punto)** $\int_{\gamma} z \bar{z} dz$ siendo $\gamma(t)$ el segmento lineal que une $z_1 = 0$ con $z_2 = r + ir$.

Solución: Resolvemos cada integral de forma independiente:

- (a) Se trata de la integral de una función racional a lo largo de una curva cerrada (circunferencia de centro i y radio r), como las funciones racionales sólo tienen singularidades aisladas, el método que tenemos que emplear es el teorema de los residuos. En primer lugar buscamos las singularidades de la función, que en este caso serán los ceros del denominador:

$$z^2(z-i) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = i \\ z_2 = 0 \end{cases}$$

A continuación estudiamos el tipo de singularidad. Para $z_1 = i$

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 + 1}{z^2(z-i)} = \frac{i^2 + 1}{i^2 \cdot (i-i)} = \frac{0}{0}$$

que es una indeterminación que podemos deshacer utilizando L'Hopital

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 + 1}{z^2(z-i)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{\frac{d}{dz}(z^2 + 1)}{\frac{d}{dz}(z^2(z-i))} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{2z}{2z(z-i) + z^2} = \frac{2i}{2i(i-i) + i^2} = -2i \in \mathbb{C}$$

y por tanto como existe el límite de la función en la singularidad, ésta es evitable y $\text{Res}(f(z), i) = 0$. Para $z_2 = 0$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 + 1}{z^2(z-i)} = \frac{0^2 + 1}{0^2 \cdot (0-i)} = \frac{1}{0} = \infty \Rightarrow z_2 = 0 \text{ es un polo}$$

y para comprobar que es de orden 2

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^2 \frac{z^2 + 1}{z^2(z - i)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 + 1}{(z - i)} = \frac{0^2 + 1}{-i} = -\frac{1}{i} = i \neq \infty, 0$$

y el residuo puede calcularse como

$$\text{Res}(f(z), 0) = \text{Res}\left(\frac{z^2 + 1}{z^2(z - i)}, 0\right) = \text{Res}\left(\frac{\varphi(z)}{z^2}, 0\right) = \frac{\varphi'(0)}{1!}$$

siendo $\varphi(z) = \frac{z^2 + 1}{z - i}$ y por tanto

$$\varphi'(z) = \frac{2z \cdot (z - i) - 1 \cdot (z^2 + 1)}{(z - i)^2} = \frac{z^2 - i2z - 1}{(z - i)^2} \Rightarrow \varphi'(0) = \frac{0^2 - i \cdot 2 \cdot 0 - 1}{(0 - i)^2} = \frac{-1}{(-i)^2} = 1$$

luego

$$\text{Res}(f(z), 0) = 1$$

Notar que la función se puede poner como

$$\frac{z^2 + 1}{z^2(z - i)} = \frac{(z - i)(z + i)}{z^2(z - i)} = \frac{z + i}{z^2} \quad \text{si } z \neq i$$

y directamente vemos que $z_1 = i$ es evitable y que el residuo de $z_2 = 0$ es mucho más fácil de calcular, ya que

$$\text{Res}(f(z), 0) = \text{Res}\left(\frac{z^2 + 1}{z^2(z - i)}, 0\right) = \text{Res}\left(\frac{z + i}{z^2}, 0\right) = \text{Res}\left(\frac{\psi(z)}{z^2}, 0\right) = \frac{\psi'(0)}{1!}$$

siendo en este caso $\psi(z) = z + i$, de donde $\psi'(z) = 1$ y de nuevo se obtiene $\text{Res}(f(z), 0) = 1$.

Para finalizar el ejercicio tendremos que ver qué singularidades están dentro de la curva, como esta curva depende del radio r , tendremos que distinguir cada uno de los casos. Calculamos las distancias del centro $z_0 = i$, a cada una de las singularidades

$$z_1 = i \Rightarrow |z_1 - z_0| = |i - i| = |0| = 0$$

$$z_2 = 0 \Rightarrow |z_2 - z_0| = |0 - i| = |-i| = 1$$

Por tanto:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < r < 1 \Rightarrow z_1 \in \overset{\circ}{\gamma}, z_2 \notin \overset{\circ}{\gamma} \Rightarrow \int_{\gamma} \frac{z^2 + 1}{z^2(z - i)} dz = 2\pi i \text{Res}(f, i) = 2\pi i \cdot 0 = 0 \\ r > 1 \Rightarrow z_1, z_2 \in \overset{\circ}{\gamma} \Rightarrow \int_{\gamma} \frac{z^2 + 1}{z^2(z - i)} dz = 2\pi i (\text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, 0)) = 2\pi i \end{array} \right.$$

(b) Utilizando la linealidad la integral se puede poner como

$$\int_{\gamma} z^6 \left(\operatorname{sen} \left(\frac{1}{z} \right) + \cos(z) \right) dz = \int_{\gamma} z^6 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{z} \right) dz + \int_{\gamma} z^6 \cos(z) dz$$

La segunda de las integrales tiene un integrando que es una función entera y por tanto derivable y sin singularidades, como la curva γ es cerrada (circunferencia de centro 1 y radio variable r), esta integral es 0, por el teorema de Cauchy-Goursat, independientemente del valor de r , es decir

$$\int_{\gamma} z^6 \cos(z) dz = 0 \text{ (Teorema de Cauchy-Goursat)}$$

De forma que sólo queda por calcular cuanto vale la integral

$$\int_{\gamma} z^6 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{z} \right) dz$$

El integrando de esta función solamente tiene problemas (singularidades) en el punto $z_1 = 0$, y además claramente es una singularidad esencial, por tanto tendremos que utilizar la serie de Laurent del integrando para poder encontrar los residuos y de esta forma calcular el valor de la integral. Este desarrollo es muy sencillo utilizando el desarrollo en series de potencias de la función $\operatorname{sen}(z)$

$$\operatorname{sen}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \Rightarrow \operatorname{sen} \left(\frac{1}{z} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1}}$$

y multiplicando por z^6

$$z^6 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{z} \right) = z^6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{z^6}{z^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n-5}}$$

Buscamos el coeficiente que acompaña a la potencia $z^{-1} = \frac{1}{z}$, en este caso se debe cumplir

$$\frac{1}{z^{2n-5}} = \frac{1}{z} \Leftrightarrow 2n - 5 = 1 \Leftrightarrow n = 3$$

por tanto

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{(-1)^3}{(2 \cdot 3 + 1)!} = \frac{-1}{7!}$$

Para finalizar el ejercicio tendremos que ver cuando la singularidad está dentro de la curva, como esta curva depende del radio r , tendremos que distinguir cada uno de los casos. Calculamos las distancias del centro $z_0 = 1$ a la singularidades

$$z_1 = 0 \Rightarrow |z_1 - z_0| = |0 - 1| = |-1| = 1$$

Por tanto:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < r < 1 \Rightarrow z_1 \notin \overset{\circ}{\gamma} \Rightarrow \int_{\gamma} z^6 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{z} \right) dz = 0 \text{ (Teorema de Cauchy-Goursat)} \\ r > 1 \Rightarrow z_1 \in \overset{\circ}{\gamma} \Rightarrow \int_{\gamma} z^6 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{z} \right) dz = 2\pi i (\operatorname{Res}(f, 0)) = 2\pi i \left(\frac{-1}{7!} \right) = -\frac{2\pi i}{7!} \end{array} \right.$$

- (c) Debido a la presencia de la función conjugada \bar{z} dentro del integrando, y de que además la curva no es cerrada, no es posible utilizar el teorema de los residuos para calcular la integral y será necesario utilizar la definición de integral de una función compleja a lo largo de una curva. En primer lugar necesitamos conocer la expresión (parametrización) de la curva, que al ser un segmento lineal es muy sencilla utilizando la definición correspondiente

$$\gamma(t) = (1-t)z_1 + tz_2 \quad t \in [0, 1]$$

con $z_1 = 0$ y $z_2 = r + ir$, obtenemos

$$\gamma(t) = t(r + ir) = rt(1 + i) \quad t \in [0, 1]$$

Para aplicar la definición de integral a lo largo de una curva, necesitamos el valor de $\gamma'(t)$

$$\gamma'(t) = r(1 + i)$$

Ya estamos en condiciones de aplicar la fórmula correspondiente para $f(z) = z\bar{z}$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_0^1 \gamma(t) \overline{\gamma(t)} \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^1 rt(1+i) \overline{rt(1+i)} r(1+i) dt = \int_0^1 rt(1+i) rt(1-i) r(1+i) dt \end{aligned}$$

Realizamos las operaciones correspondientes e integrando se obtiene el valor buscado

$$\int_0^1 rt(1+i) rt(1-i) r(1+i) dt = 2r(1+i) \int_0^1 t^2 dt = 2r(1+i) \left. \frac{t^3}{3} \right|_{t=0}^{t=1} = \frac{2r}{3} (1+i)$$

5. Resuelve cada uno de los siguientes apartados:

- (a) **(1 punto)** Calcula la transformada \mathcal{Z} de la siguiente sucesión $x_n = n^2 3^n + n$
(b) **(1 punto)** Calcula la transformada \mathcal{Z} inversa de la función $F(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)(z-2)}$

Solución: Resolvemos cada apartado de forma independiente

(a) Utilizamos las propiedades de la transformada \mathcal{Z} . Primero la linealidad para poner

$$\mathcal{Z}[x_n](z) = \mathcal{Z}[n^2 3^n + n](z) = \mathcal{Z}[n^2 3^n](z) + \mathcal{Z}[n](z)$$

Y ahora utilizamos la propiedad de la potenciación

$$\mathcal{Z}[n^k y_n](z) = \left(-z \frac{d}{dz}\right)^k (\mathcal{Z}[y_n](z))$$

Para el primer sumando

$$\left. \begin{matrix} k = 2 \\ y_n = 3^n \end{matrix} \right\} \Rightarrow \mathcal{Z}[n^2 3^n](z) = \left(-z \frac{d}{dz}\right)^2 (\mathcal{Z}[3^n](z))$$

para $y_n = 3^n$ es muy fácil, utilizando la definición (o la propiedad correspondiente), calcular su transformada \mathcal{Z}

$$(\mathcal{Z}[3^n](z)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{z}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{3}{z}} = \frac{z}{z-3} \quad \text{si } |z| > 3$$

Sustituyendo

$$\mathcal{Z}[n^2 3^n](z) = \left(-z \frac{d}{dz}\right)^2 \left(\frac{z}{z-3}\right) = -z \frac{d}{dz} \left(-z \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z-3}\right)\right)$$

o en pasos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z-3}\right) &= \frac{1(z-3) - z \cdot 1}{(z-3)^2} = \frac{-3}{(z-3)^2} \\ -z \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z-3}\right) &= -z \left(\frac{-3}{(z-3)^2}\right) = \frac{3z}{(z-3)^2} \\ \frac{d}{dz} \left(\frac{3z}{(z-3)^2}\right) &= \frac{3(z-3)^2 - 2(z-3)3z}{(z-3)^4} = \frac{3(z-3) - 6z}{(z-3)^3} = \frac{-3z-9}{(z-3)^3} \\ -z \frac{d}{dz} \left(\frac{3z}{(z-3)^2}\right) &= -z \left(\frac{-3z-9}{(z-3)^3}\right) = \frac{3z(z+3)}{(z-3)^3} \end{aligned}$$

y

$$\mathcal{Z}[n^2 3^n](z) = \frac{3z(z+3)}{(z-3)^3}$$

Para el segundo sumando

$$\left. \begin{matrix} k = 1 \\ y_n = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \mathcal{Z}[n \cdot 1](z) = \left(-z \frac{d}{dz}\right) (\mathcal{Z}[1](z))$$

para $y_n = 1$ utilizamos la definición para calcular su transformada \mathcal{Z} (aunque se ha hecho muchas veces)

$$(\mathcal{Z}[1](z)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1} \quad \text{si } |z| > 1$$

Sustituyendo

$$\mathcal{Z}[n](z) = \left(-z \frac{d}{dz}\right) \left(\frac{z}{z-1}\right)$$

o en pasos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z-1}\right) &= \frac{1(z-1) - z \cdot 1}{(z-1)^2} = \frac{-1}{(z-1)^2} \\ -z \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z-1}\right) &= -z \left(\frac{-1}{(z-1)^2}\right) = \frac{z}{(z-1)^2} \end{aligned}$$

y

$$\mathcal{Z}[n](z) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

Por tanto la respuesta buscada es

$$\mathcal{Z}[n^2 3^n + n](z) = \frac{3z(z+3)}{(z-3)^3} + \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{2z(2z-3)(z^2+3)}{(z-3)^3(z-1)^2}$$

- (b) Para calcular la transformada \mathcal{Z} inversa, en primer lugar hay que hacer la descomposición de la función racional en fracciones simples:

$$F(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1} + \frac{C}{z-2}$$

y hallar los desarrollos de Laurent de cada fracción en conjuntos de la forma $A(0, r, \infty)$, es decir en el exterior de bolas de centro 0 y radio r , en todas hay que hacer la misma operación, transformar la fracción para poder emplear la suma de una serie geométrica

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \quad |z| > 1$$

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z(1+\frac{1}{z})} = \frac{1}{z} \frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{z^n} \quad |z| > 1$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z(1-\frac{2}{z})} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n} \quad |z| > 2$$

Calcularemos ahora los valores de A , B y C

$$f(z) = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1} + \frac{C}{z-2} = \frac{A(z+1)(z-2) + B(z-1)(z-2) + C(z-1)(z+1)}{(z-1)(z+1)(z-2)}$$

es decir

$$\frac{z}{(z-1)(z+1)(z-2)} = \frac{A(z+1)(z-2) + B(z-1)(z-2) + C(z-1)(z+1)}{(z-1)(z+1)(z-2)}$$

e igualando numeradores

$$A(z+1)(z-2) + B(z-1)(z-2) + C(z-1)(z+1) = z$$

Como son raíces simples podemos utilizar dichos valores para calcular los coeficientes

$$z = -1 \Rightarrow B(-1-1)(-1-2) = -1 \Leftrightarrow B(-2)(-3) = -1 \Leftrightarrow B = -\frac{1}{6}$$

$$z = 1 \Rightarrow A(1+1)(1-2) = 1 \Leftrightarrow A(2)(-1) = 1 \Leftrightarrow A = -\frac{1}{2}$$

$$z = 2 \Rightarrow C(2-1)(2+1) = 2 \Leftrightarrow C(1)(3) = 2 \Leftrightarrow C = \frac{2}{3}$$

Por tanto

$$F(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)(z-2)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{z-1} - \frac{1}{6} \frac{1}{z+1} + \frac{2}{3} \frac{1}{z-2}$$

y utilizando las series

$$-\frac{1}{2} \frac{1}{z-1} - \frac{1}{6} \frac{1}{z+1} + \frac{2}{3} \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{z^n} + \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n}$$

y agrupando en un único sumatorio

$$-\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{z^n} + \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6} (-1)^n + \frac{1}{3} 2^n \right) \frac{1}{z^n}$$

Como

$$\mathcal{Z}[x_n](z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6} (-1)^n + \frac{1}{3} 2^n \right) \frac{1}{z^n}$$

la solución buscada es identificando elementos

$$x_0 = 0$$

$$x_n = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6} (-1)^n + \frac{1}{3} 2^n \right)$$

Nota: Los requisitos para aprobar la asignatura son: tener al menos 7 preguntas correctas en la parte de Ejercicios Básicos y obtener una puntuación mínima de 5 puntos en la parte de Problemas.