

Variable Compleja y Transformadas
Segundo Curso, I.T.I. Electricidad y Electrónica
Examen de operaciones básicas, 3 de julio de 2008

1. **Calcula $(1 - 3i)(5 + 5i)$ y expresa el resultado en forma binómica.**

Solución: Multiplicando directamente y teniendo en cuenta que $i^2 = -1$

$$(1 - 3i)(5 + 5i) = 5 + 5i - 15i - 15i^2 = 20 - 10i$$

2. **Calcula $(2 - 3i)^3$ y expresa el resultado en forma binómica.**

Solución: Utilizando la expresión del binomio de Newton

$$(2 - 3i)^3 = 2^3 + 3(2)^2(-3i) + 3(2)(-3i)^2 + (-3i)^3 = 8 - 36i - 54 + 27i = -46 - 9i$$

3. **Calcula $\overline{(-2 + i)(1 - i)}(3 - i)$ y expresa el resultado en forma binómica.**

Solución: Podemos hacer el producto y después conjugar o bien conjugar y después realizar el producto, elegimos la primera opción. Realizamos la operación dentro de la operación conjugación

$$(-2 + i)(1 - i) = (-2 + 2i + i - i^2) = (-1 + 3i)$$

y a continuación conjugamos y multiplicamos por el tercer factor

$$\overline{(-1 + 3i)}(3 - i) = (-1 - 3i)(3 - i) = -3 + i - 9i + 3i^2 = -6 - 8i$$

1. **Calcula $\frac{(1 - 2i)}{(1 + i)(2 - 3i)}$ y expresa el resultado en forma binómica.**

Solución: En primer lugar calculamos el complejo del denominador

$$(1 + i)(2 - 3i) = 2 - 3i + 2i - 3i^2 = 5 - i$$

y después realizamos el cociente, multiplicando por el conjugado del denominador

$$\frac{(1 - 2i)}{(1 + i)(2 - 3i)} = \frac{1 - 2i}{5 - i} = \frac{(1 - 2i)(5 + i)}{(5 - i)(5 + i)} = \frac{5 + i - 10i - 2i^2}{25 + 1} = \frac{7 - 9i}{26} = \frac{7}{26} - \frac{9}{26}i$$

2. **Calcula el módulo de $\frac{(\sqrt{5} - 2i)}{(-4 + 3i)}$.**

Solución: Empleamos las propiedades del módulo del cociente, haciendo el cociente de módulos

$$\left| \frac{(\sqrt{5} - 2i)}{(-4 + 3i)} \right| = \frac{|(\sqrt{5} - 2i)|}{|(-4 + 3i)|} = \frac{\sqrt{(\sqrt{5})^2 + (-2)^2}}{\sqrt{(-4)^2 + (3)^2}} = \frac{\sqrt{5 + 4}}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$$

3. **Calcula $\sqrt[3]{-64}$ y escribe el resultado en forma binómica.**

Solución: Pondremos el complejo del radicando en forma polar (o exponencial)

$$-64 = 64_{\pi}$$

y aplicamos la definición de raíz n -ésima, en este caso cúbica de un número complejo

$$w_k = \left(\sqrt[3]{64} \right)_{\varphi_k} = 4_{\varphi_k}$$

siendo

$$\varphi_k = \frac{\pi + 2k\pi}{3} \quad k = 0, 1, 2$$

por tanto los números complejos que buscamos son

$$w_0 = 4_{\varphi_0} = 4_{\pi/3}$$

$$w_1 = 4_{\varphi_1} = 4_{\pi}$$

$$w_2 = 4_{\varphi_2} = 4_{5\pi/3} = 4_{-\pi/3}$$

y en forma binómica

$$w_0 = 4_{\pi/3} = 4 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \right) = 4 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 + 2\sqrt{3}i$$

$$w_1 = 4_{\varphi_1} = 4 (\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi) = 4 (-1 + i \cdot 0) = -4$$

$$w_2 = 4_{\varphi_2} = 4 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right) = 4 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 - 2\sqrt{3}i$$

4. **Expresa $-8 - 8i$ en forma polar, expresando el ángulo en radianes.**

Solución: Calculamos el módulo

$$|-8 - 8i| = \sqrt{(-8)^2 + (-8)^2} = 8\sqrt{2}$$

y el argumento, teniendo en cuenta que el complejo está en el tercer cuadrante

$$\theta = \arctan \frac{-8}{-8} = \arctan 1 + \pi = \pi/4 + \pi = \frac{5\pi}{4}$$

por tanto

$$-8 - 8i = 8\sqrt{2}_{5\pi/4} = 8\sqrt{2}e^{i5\pi/4}$$

5. **Expresa** $\frac{(i^{23} + 3i^{52})}{(i^{91} - 2i^{246})}$ **en forma binómica.**

Solución: Calcularemos cada potencia de i , de la forma usual

$$\begin{aligned} i^{23} &= i^{4 \cdot 5 + 3} = i^3 = -i \\ i^{52} &= i^{4 \cdot 13} = 1 \\ i^{91} &= i^{4 \cdot 22 + 3} = i^3 = -i \\ i^{246} &= i^{4 \cdot 61 + 2} = i^2 = -1 \end{aligned}$$

luego la fracción puede expresarse como

$$\frac{(i^{23} + 3i^{52})}{(i^{91} - 2i^{246})} = \frac{-i + 3}{-i + 2}$$

y realizando la división, multiplicando por el conjugado del denominador

$$\frac{-i + 3}{-i + 2} = \frac{3 - i}{2 - i} = \frac{(3 - i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{6 + 3i - 2i - i^2}{4 + 1} = \frac{7 + i}{5} = \frac{7}{5} + \frac{1}{5}i$$

6. **Expresa** $\frac{(1 + \sqrt{3}i)}{(1 - i)}$ **en forma polar, expresando el ángulo en radianes.**

Solución: Como pide el resultado en radianes, expresaremos en primer lugar numerador y denominador de esa forma

$$\begin{aligned} 1 + \sqrt{3}i &\Rightarrow \begin{cases} |1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = 2 \\ \theta = \arctan \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3} \text{ (está en el primer cuadrante)} \end{cases} \Rightarrow 2_{\pi/3} = 2e^{i\pi/3} \\ 1 - i &\Rightarrow \begin{cases} |1 - i| = \sqrt{1 + (-1)^2} = \sqrt{2} \\ \theta = \arctan \frac{-1}{1} = -\frac{\pi}{4} \text{ (está en el cuarto cuadrante)} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2}_{-\pi/4} = \sqrt{2}e^{-i\pi/4} \end{aligned}$$

Y ahora haremos el cociente

$$\frac{(1 + \sqrt{3}i)}{(1 - i)} = \frac{2e^{i\pi/3}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}} = \sqrt{2}e^{i\pi(1/3+1/4)} = \sqrt{2}e^{i7\pi/12}$$

7. **Expresa** $\frac{2e^{i\pi/3}6e^{i17\pi/12}}{4e^{-i\pi/4}}$ **en forma binómica.**

Solución: Realizamos las operaciones en forma exponencial

$$\frac{2e^{i\pi/3}6e^{i17\pi/12}}{4e^{-i\pi/4}} = \frac{2 \cdot 6}{4} e^{i\pi(1/3+17/12-(-1/4))} = 3e^{i\pi 24/12} = 3e^{i\pi 2}$$

y pasamos a forma binómica

$$3e^{i\pi 2} = 3$$

Nota: Los requisitos para aprobar la asignatura son: tener al menos 7 preguntas correctas en la parte de **ejercicios básicos** y obtener una puntuación mínima de 5 puntos en la parte de **problemas**.

Variable Compleja y Transformadas
Segundo Curso, I.T.I. Electricidad y Electrónica
Examen de problemas, 3 de julio de 2008

1. (1.25 puntos) Prueba que las únicas funciones complejas diferenciables de la forma

$$f(x + iy) = u(x) + iv(y)$$

donde u y v son funciones reales, son de la forma

$$f(z) = \lambda z + \alpha \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ y } \alpha \in \mathbb{C}$$

(Observa que $u(x)$ depende solamente de x , mientras que $v(y)$ depende solamente de y)

Solución: El problema se puede resolver de dos formas, aunque en ambos casos y teniendo en cuenta que la función f es derivable se utilizarán las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

- (a) *Utilizando la armonicidad de u y v :* Como $f(x + iy) = u(x) + iv(y)$ es derivable, su parte real $u(x)$ y su parte imaginaria $v(y)$ deben ser funciones armónicas, es decir

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$v_{xx} + v_{yy} = 0$$

pero teniendo en cuenta que $u(x)$ sólo depende de x y que $v(y)$ sólo depende de y , se cumple

$$u(x) \Rightarrow u_y = 0 \Rightarrow u_{yy} = 0$$

$$v(y) \Rightarrow v_x = 0 \Rightarrow v_{xx} = 0$$

por lo que al sustituir en la ecuación anterior se obtiene

$$u_{xx} = 0$$

$$v_{yy} = 0$$

integrando dos veces cada ecuación, la primera respecto de x y la segunda respecto de y , se obtiene

$$u_{xx} = 0 \Rightarrow u_x = c_1 \Rightarrow u = c_1x + c_2$$

$$v_{yy} = 0 \Rightarrow v_y = d_1 \Rightarrow v = d_1y + d_2$$

con c_1, c_2, d_1 y d_2 constantes. La función $f(x, y)$ puede expresarse entonces como

$$f(x, y) = u(x) + iv(y) = (c_1x + c_2) + i(d_1y + d_2)$$

Pero como $f(x, y)$ es derivable, u y v deben cumplir las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned}u_x &= v_y \Leftrightarrow c_1 = d_1 \\u_y &= -v_x \Leftrightarrow 0 = 0\end{aligned}$$

y se deduce la igualdad entre c_1 y d_1 (la segunda ecuación se cumple siempre). Este resultado nos conduce a que $f(x, y)$ debe ser de la forma

$$f(x, y) = u(x) + iv(y) = (c_1x + c_2) + i(c_1y + d_2)$$

o agrupando términos

$$f(x, y) = c_1(x + iy) + c_2 + id_2$$

si llamamos $\lambda = c_1 \in \mathbb{R}$ y $\alpha = c_2 + id_2 \in \mathbb{C}$ y tenemos en cuenta que $z = x + iy$ se obtiene el resultado pedido

$$f(x, y) = c_1(x + iy) + (c_2 + id_2) = \lambda z + \alpha$$

- (b) *Directamente utilizando las ecuaciones de Cauchy-Riemann:* Como f es derivable, u y v cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned}u_x &= v_y \\u_y &= -v_x\end{aligned}$$

Pero como $u(x)$ depende sólo de x y $v(y)$ depende sólo de y , por una parte está claro que

$$u_y = v_x = 0$$

y se cumple la segunda ecuación de forma trivial; mientras que la primera solamente se puede cumplir si

$$u_x(x) = v_y(y) = c_1$$

con c_1 constante, ya que obviamente u_x depende sólo de x y v_y depende sólo de y . Integrando cada ecuación por separado

$$\begin{aligned}u_x &= c_1 \Rightarrow u(x) = c_1x + a \\u_y &= c_1 \Rightarrow v(y) = c_1y + b\end{aligned}$$

y la función f se puede poner como

$$f(x, y) = u(x) + iv(y) = (c_1x + a) + i(c_1y + b)$$

Reagrupando y tomando $\lambda = c_1$ y $\alpha = a + ib$ obtenemos el resultado buscado

$$f(x, y) = f(z) = \lambda z + \alpha$$

2. (1.5 puntos) Dada la función

$$f(z) = \frac{1}{\alpha z^3 - (\alpha^2 + 1)z^2 + \alpha z} \quad \alpha \in \mathbb{C},$$

encuentra y di de qué tipo son las singularidades de $f(z)$ en función del parámetro α .

Solución: En primer lugar factorizaremos el denominador de $f(z)$

$$\alpha z^3 - (\alpha^2 + 1)z^2 + \alpha z = 0 \Leftrightarrow z(\alpha z^2 - (\alpha^2 + 1)z + \alpha) = 0$$

de donde

$$\begin{aligned} z &= 0 \\ \text{o} \\ \alpha z^2 - (\alpha^2 + 1)z + \alpha &= 0 \end{aligned}$$

De la segunda ecuación distinguimos dos casos: Si $\alpha = 0$, entonces la ecuación es de primer grado y tiene como solución

$$-z = 0 \Rightarrow z = 0$$

Si $\alpha \neq 0$, la ecuación es de segundo grado y sus soluciones son

$$\begin{aligned} z &= \frac{(\alpha^2 + 1) \pm \sqrt{(\alpha^2 + 1)^2 - 4\alpha^2}}{2\alpha} = \frac{(\alpha^2 + 1) \pm \sqrt{\alpha^4 + 2\alpha^2 + 1 - 4\alpha^2}}{2\alpha} \\ &= \frac{(\alpha^2 + 1) \pm \sqrt{\alpha^4 - 2\alpha^2 + 1}}{2\alpha} = \frac{(\alpha^2 + 1) \pm \sqrt{(\alpha^2 - 1)^2}}{2\alpha} \\ &= \frac{(\alpha^2 + 1) \pm (\alpha^2 - 1)}{2\alpha} \end{aligned}$$

es decir hay dos raíces

$$z_1 = \frac{(\alpha^2 + 1) + (\alpha^2 - 1)}{2\alpha} = \frac{2\alpha^2}{2\alpha} = \alpha$$

$$z_2 = \frac{(\alpha^2 + 1) - (\alpha^2 - 1)}{2\alpha} = \frac{2}{2\alpha} = \frac{1}{\alpha}$$

En resumen, hemos visto que si $\alpha = 0$, entonces $z_0 = 0$, es un cero de orden dos del denominador y por tanto es un polo de orden 2 de la función. Para el caso $\alpha \neq 0$, hay 3 singularidades $z_0 = 0$, $z_1 = \alpha$ y $z_2 = 1/\alpha$. No obstante hay que distinguir los casos $\alpha = 1$ y $\alpha = -1$ puesto que en estos casos ocurre $z_1 = z_2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0 \Rightarrow z_0 = 0 \text{ polo doble} \\ \alpha \neq 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha \neq 1, -1 \Rightarrow \left\{ 0, \alpha, \frac{1}{\alpha} \right\} \text{ polos de orden uno o simples} \\ \alpha = 1 \text{ o } \alpha = -1 \Rightarrow \{0\} \text{ polo simple y } \left\{ \alpha = \frac{1}{\alpha} \right\} \text{ polo doble} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

3. Calcula las siguientes integrales sobre los caminos indicados en función del valor de $r > 0$

$$(1.25 \text{ puntos}) \ a) \int_{\gamma_1} \frac{dz}{2z^2 - 5iz - 2} \quad \gamma_1(t) = (1+i) + re^{it} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$(1.25 \text{ puntos}) \ b) \int_{\gamma_2} \frac{\bar{z}}{z} dz \quad \gamma_2(t) = re^{it} \quad t \in [0, 2\pi]$$

Solución:

a) La función $f(z) = \frac{1}{2z^2 - 5iz - 2}$ es una función racional, por tanto, sus singularidades son aisladas y coinciden con los ceros del denominador y como la curva es cerrada, la integral se puede calcular mediante el teorema de los residuos.

Buscamos en primer lugar las singularidades de f , para ello buscamos los ceros de su denominador, resolviendo la correspondiente ecuación de segundo grado

$$2z^2 - 5iz - 2 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{5i \pm \sqrt{(5i)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{5i \pm \sqrt{-25 + 16}}{4} = \frac{5i \pm \sqrt{-9}}{4} = \frac{5i \pm 3i}{4}$$

tendremos dos soluciones

$$z_1 = \frac{5i + 3i}{4} = \frac{8i}{4} = 2i$$

$$z_2 = \frac{5i - 3i}{4} = \frac{2i}{4} = \frac{i}{2}$$

y la función queda puede escribirse como

$$f(z) = \frac{1}{2(z - 2i) \left(z - \frac{i}{2}\right)}$$

(Hay que notar que el coeficiente de z^2 de la ecuación es 2 y por tanto este factor debe aparecer en la descomposición en factores del polinomio).

Ambas singularidades son polos simples y el cálculo de los residuos correspondientes es muy sencillo

$$\text{Res} \left(\frac{1}{2(z - 2i) \left(z - \frac{i}{2}\right)}, 2i \right) = \text{Res} \left(\frac{\frac{1}{2(z - \frac{i}{2})}}{(z - 2i)}, 2i \right) = \frac{1}{2 \left(2i - \frac{i}{2}\right)} = \frac{1}{4i - i} = \frac{1}{3i} = \frac{-i}{3}$$

$$\text{Res} \left(\frac{1}{2(z - 2i) \left(z - \frac{i}{2}\right)}, \frac{i}{2} \right) = \text{Res} \left(\frac{\frac{1}{2(z - 2i)}}{\left(z - \frac{i}{2}\right)}, \frac{i}{2} \right) = \frac{1}{2 \left(\frac{i}{2} - 2i\right)} = \frac{1}{i - 4i} = \frac{1}{-3i} = \frac{i}{3}$$

Para utilizar el teorema de los residuos, necesitamos saber qué singularidades están dentro de la curva para cada valor del radio r . Para ello calcularemos la distancia del centro de la circunferencia a cada una de las singularidades

$$\text{Distancia del centro a } z_1 \Rightarrow |(1+i) - 2i| = |1-i| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{Distancia del centro a } z_2 \Rightarrow \left| (1+i) - \frac{i}{2} \right| = \left| 1 + \frac{i}{2} \right| = \sqrt{(1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Notar que $\sqrt{2} > \sqrt{5}/2$ y podemos distinguir 3 casos:

$r < \frac{\sqrt{5}}{2}$, en este caso ninguna de las dos singularidades está dentro de la curva y por tanto

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = 0 \quad r < \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$\frac{\sqrt{5}}{2} < r < \sqrt{2}$, en este caso solamente la singularidad $\frac{i}{2}$ está dentro de la curva, por tanto

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{1}{2(z-2i)\left(z-\frac{i}{2}\right)}, \frac{i}{2} \right) = 2\pi i \left(\frac{i}{3} \right) = -\frac{2\pi}{3} \quad \frac{\sqrt{5}}{2} < r < \sqrt{2}$$

$r > \sqrt{2}$, en este caso las dos singularidades están dentro de la curva, por tanto

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} f(z) dz &= 2\pi i \left\{ \operatorname{Res} \left(\frac{1}{2(z-2i)\left(z-\frac{i}{2}\right)}, \frac{i}{2} \right) + \operatorname{Res} \left(\frac{1}{2(z-2i)\left(z-\frac{i}{2}\right)}, 2i \right) \right\} \\ &= 2\pi i \left(\frac{i}{3} + \left(-\frac{i}{3} \right) \right) = 0 \quad r > \sqrt{2} \end{aligned}$$

Los casos $r = \sqrt{2}$ y $r = \sqrt{5}/2$, no se tienen en cuenta, puesto que la curva pasa por las singularidades.

b) La función

$$f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$$

no es derivable en ningún punto, puesto que en el numerador aparece la función conjugada, por tanto no podremos utilizar el teorema de los residuos y hay que emplear la definición de integral a lo largo de una curva

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

siendo

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\gamma(t) = re^{it} \quad t \in [0, 2\pi] \Rightarrow \gamma'(t) = ire^{it}$$

Por tanto

$$\int_{\gamma_2} \frac{\bar{z}}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{\overline{\gamma(t)}}{\gamma(t)} \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{re^{-it}}{re^{it}} ire^{it} dt = \int_0^{2\pi} \frac{re^{-it}}{re^{it}} ire^{it} dt = \int_0^{2\pi} ire^{-it} dt$$

e integrando directamente

$$\int_0^{2\pi} ire^{-it} dt = -re^{-it} \Big|_0^{2\pi} = re^{-i \cdot 0} - re^{-i2\pi} = r - r = 0$$

4. (1.25 puntos) Dada la función

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$$

Construye su serie de Taylor centrada en $z_0 = 0$, indicando su círculo de convergencia.

Solución: En primer lugar buscamos las raíces del denominador para descomponer la función en fracciones simples

$$z^2 - 3z + 2 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{3+1}{2} = 2 \\ z_2 = \frac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

por tanto

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{(z-2)(z-1)}$$

La descomposición en factores simples es la siguiente:

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-1)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-1} = \frac{A(z-1) + B(z-2)}{(z-2)(z-1)}$$

Por tanto

$$A(z-1) + B(z-2) = 1 \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} A = 1 \\ B = -1 \end{array} \right\}$$

y la función es

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

El desarrollo de Taylor (potencias positivas de z) de cada fracción es muy sencillo

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{2\left(\frac{z}{2}-1\right)} = \frac{-1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{-1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad \text{si } \left|\frac{z}{2}\right| < 1 \Rightarrow |z| < 2$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{-1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{si } |z| < 1$$

por tanto

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n \quad \text{si } |z| < 1$$

Donde la condición $|z| < 1$ se obtiene para que los dos desarrollos sean ciertos.

5. (1.5 puntos) Resuelve la siguiente ecuación en diferencias

$$y_{n+2} + 3y_{n+1} - 4y_n = 3^n \quad n \geq 0$$

para condiciones iniciales nulas ($y_0 = y_1 = 0$)

Solución: Aplicamos la transformada \mathcal{Z} a ambos lados de la ecuación, utilizando las propiedades de linealidad

$$\mathcal{Z}[ax_n + by_n](z) = a\mathcal{Z}[x_n](z) + b\mathcal{Z}[y_n](z)$$

y de traslación

$$\mathcal{Z}[y_{n+2}](z) = z^2 \mathcal{Z}[y_n](z) - z^2 y_0 - z y_1$$

$$\mathcal{Z}[y_{n+1}](z) = z \mathcal{Z}[y_n](z) - z y_0$$

Por tanto

$$\mathcal{Z}[y_{n+2} + 3y_{n+1} - 4y_n](z) = \mathcal{Z}[3^n](z) \Leftrightarrow z^2 \mathcal{Z}[y_n](z) + 3z \mathcal{Z}[y_n](z) - 4\mathcal{Z}[y_n](z) = \mathcal{Z}[3^n](z)$$

donde se han utilizado las condiciones iniciales $y_0 = y_1 = 0$.

Sacando $\mathcal{Z}[y_n]$ factor común

$$(z^2 + 3z - 4) \mathcal{Z}[y_n](z) = \mathcal{Z}[3^n](z)$$

Queda por calcular $\mathcal{Z}[3^n](z)$, bien por las propiedades de la transformada \mathcal{Z} o bien por la definición

$$\mathcal{Z}[3^n](z) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{z}\right)^n$$

que es una progresión geométrica de razón $\frac{3}{z}$. Podemos calcular esta suma siempre que la razón sea menor que la unidad, es decir

$$\mathcal{Z}[3^n](z) = \frac{1}{1 - \frac{3}{z}} = \frac{z}{z-3} \quad \left|\frac{3}{z}\right| < 1 \Rightarrow |z| > 3$$

y la ecuación transformada es

$$(z^2 + 3z - 4) \mathcal{Z}[y_n](z) = \frac{z}{z - 3}$$

despejando $\mathcal{Z}[y_n](z)$,

$$\mathcal{Z}[y_n](z) = \frac{z}{(z - 3)(z^2 + 3z - 4)}$$

que puede factorizarse como

$$\mathcal{Z}[y_n](z) = \frac{z}{(z - 3)(z - 1)(z + 4)}$$

Obtendremos el valor de y_n mediante la transformada \mathcal{Z} inversa

$$y_n = \mathcal{Z}^{-1} \left(\frac{z}{(z - 3)(z - 1)(z + 4)} \right)_n$$

Los valores de y_n se obtienen a partir del desarrollo de Laurent de la función en un anillo de centro 0, y radios r y ∞ , siendo r el radio de una circunferencia que contenga a todas las singularidades de la función.

Como necesitamos el desarrollo de Laurent, realizamos en primer lugar la descomposición en fracciones simples de la función racional

$$\frac{z}{(z - 3)(z - 1)(z + 4)} = \frac{A}{(z - 3)} + \frac{B}{(z - 1)} + \frac{C}{(z + 4)}$$

por tanto

$$A(z - 1)(z + 4) + B(z - 3)(z + 4) + C(z - 1)(z - 3) = z$$

Como las raíces son distintas, podemos calcular los coeficientes A , B y C fácilmente tomando para z , los valores 1, 3 y -4

$$z = 1 \Rightarrow B(1 - 3)(1 + 4) = 1 \Rightarrow B(-2)(5) = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{10}$$

$$z = 3 \Rightarrow A(3 - 1)(3 + 4) = 3 \Rightarrow A(2)(7) = 3 \Rightarrow A = \frac{3}{14}$$

$$z = -4 \Rightarrow C(-4 - 1)(-4 - 3) = -4 \Rightarrow C(-5)(-7) = -4 \Rightarrow C = \frac{-4}{35}$$

por tanto

$$\frac{z}{(z - 3)(z - 1)(z + 4)} = \frac{3}{14} \frac{1}{(z - 3)} - \frac{1}{10} \frac{1}{(z - 1)} - \frac{4}{35} \frac{1}{(z + 4)}$$

El desarrollo de Laurent buscado, se obtiene sacando z factor común en cada fracción

$$\frac{3}{14} \frac{1}{(z - 3)} - \frac{1}{10} \frac{1}{(z - 1)} - \frac{4}{35} \frac{1}{(z + 4)} = \frac{3}{14z} \frac{1}{1 - \frac{3}{z}} - \frac{1}{10z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} - \frac{4}{35z} \frac{1}{1 + \frac{4}{z}}$$

y empleando la serie geométrica en cada fracción

$$\begin{aligned}
 \frac{z}{(z-3)(z-1)(z+4)} &= \frac{3}{14z} \frac{1}{1-\frac{3}{z}} - \frac{1}{10z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{4}{35z} \frac{1}{1+\frac{4}{z}} \\
 &= \frac{3}{14z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{z}\right)^n - \frac{1}{10z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n - \frac{4}{35z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-4}{z}\right)^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{14} \left(\frac{3}{z}\right)^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10} \left(\frac{1}{z}\right)^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{35} \left(\frac{-4}{z}\right)^{n+1} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3^{n+1}}{14} - \frac{1}{10} + \frac{(-4)^{n+1}}{35} \right) \frac{1}{z^{n+1}}
 \end{aligned}$$

y cambiando $n+1$ por n en el sumatorio

$$\frac{z}{(z-3)(z-1)(z+4)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3^n}{14} - \frac{1}{10} + \frac{(-4)^n}{35} \right) \frac{1}{z^n}$$

luego

$$y_n = \frac{3^n}{14} - \frac{1}{10} + \frac{(-4)^n}{35} \quad n \geq 2$$

además podemos comprobar que para $n=1$

$$y_1 = \frac{3}{14} - \frac{1}{10} - \frac{4}{35} = 0$$

luego también es cierto para $n=1$.

6. (2 puntos) Resuelve la siguiente ecuación diferencial

$$y'' - 2y' + 2y = f(t)$$

donde

$$f(t) = \begin{cases} t & t \leq 4 \\ 4 & t > 4 \end{cases}$$

junto con las condiciones iniciales

$$y(0) = y'(0) = 0$$

Solución: Aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación, utilizando las propiedades de linealidad y derivada

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)](z) = a\mathcal{L}[f(t)](z) + b\mathcal{L}[g(t)](z)$$

y de traslación

$$\mathcal{L}[y''(t)](z) = z^2\mathcal{L}[y(t)](z) - zy(0) - y'(0)$$

$$\mathcal{L}[y'(t)](z) = z\mathcal{L}[y(t)](z) - y(0)$$

por tanto sobre la ecuación del ejercicio y utilizando las condiciones iniciales

$$\mathcal{L}[y'' - 2y' + 2y](z) = \mathcal{L}[f(t)](z)$$

por tanto

$$\mathcal{L}[y''](z) - 2\mathcal{L}[y'](z) + 2\mathcal{L}[y](z) = \mathcal{L}[f(t)](z)$$

$$z^2\mathcal{L}[y](z) - 2z\mathcal{L}[y](z) + 2\mathcal{L}[y](z) = \mathcal{L}[f(t)](z)$$

y sacando $\mathcal{L}[y](z)$ factor común

$$(z^2 - 2z + 2)\mathcal{L}[y](z) = \mathcal{L}[f(t)](z)$$

de donde

$$\mathcal{L}[y](z) = \frac{\mathcal{L}[f(t)](z)}{(z^2 - 2z + 2)}$$

Calculamos el numerador utilizando la definición de transformada de Laplace (como siempre), teniendo en cuenta que la función está definida a trozos:

$$\mathcal{L}[f(t)](z) = \int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt = \int_0^4 te^{-zt}dt + \int_4^\infty 4e^{-zt}dt$$

La primera de las integrales se hace por partes, tománd $u = t$ y $dv = e^{-zt}dt$ y por tanto $du = dt$ y $v = -e^{-zt}/z$

$$\int_0^4 te^{-zt}dt = -te^{-zt}/z \Big|_0^4 + \int_0^4 \frac{e^{-zt}}{z}dt = -t\frac{e^{-zt}}{z} \Big|_0^4 + -\frac{e^{-zt}}{z^2} \Big|_0^4 = \left(-4\frac{e^{-4z}}{z}\right) + \left(-\frac{e^{-4z}}{z^2} + \frac{1}{z^2}\right)$$

La segunda integral es directa

$$\int_4^\infty 4e^{-zt}dt = -\frac{4e^{-zt}}{z} \Big|_4^\infty = \frac{4e^{-4z}}{z}$$

y la transformada de Laplace de $f(t)$ será sumando ambas integrales

$$\mathcal{L}[f(t)](z) = \int_0^4 te^{-zt}dt + \int_4^\infty 4e^{-zt}dt = \frac{1 - e^{-4z}}{z^2}$$

y el valor de $\mathcal{L}[y](z)$ será

$$\mathcal{L}[y](z) = \frac{1 - e^{-4z}}{(z^2 - 2z + 2)z^2}$$

Para encontrar $y(t)$, la solución de la ecuación diferencial, tendremos que calcular la transformada de Laplace inversa de la función anterior.

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1 - e^{-4z}}{(z^2 - 2z + 2)z^2}\right](t)$$

y empleando las propiedades de linealidad y de traslación de esta transformación

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(z^2 - 2z + 2) z^2} \right] (t) - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(z^2 - 2z + 2) z^2} \right] (t - 4) h_4(t)$$

Por tanto solamente necesitamos calcular cuanto vale

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(z^2 - 2z + 2) z^2} \right] (t)$$

que lo haremos mediante residuos. Para ello descompondremos el denominador en factores:

$$z^2 - 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

por tanto

$$\frac{1}{(z^2 - 2z + 2) z^2} = \frac{1}{z^2 (z - (1 + i)) (z - (1 - i))}$$

y mediante la fórmula de Bronwich

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(z^2 - 2z + 2) z^2} \right] (t) = \sum_{z_k} \text{Res} \left(\frac{e^{zt}}{(z^2 - 2z + 2) z^2}, z_k \right)$$

siendo z_k las singularidades de la función que en este caso son

$$\begin{aligned} z_0 &= 0 \Rightarrow \text{Polo doble} \\ z_1 &= 1 + i \Rightarrow \text{Polo simple} \\ z_2 &= 1 - i \Rightarrow \text{Polo simple} \end{aligned}$$

Calcularemos estos residuos. Para $z_0 = 0$

$$\text{Res} \left(\frac{e^{zt}}{(z^2 - 2z + 2) z^2}, 0 \right) = \text{Res} \left(\frac{e^{zt}/(z^2 - 2z + 2)}{z^2}, 0 \right) = \frac{\phi'_0(0)}{1!} = \phi'_0(0)$$

siendo

$$\phi_0(z) = \frac{e^{zt}}{(z^2 - 2z + 2)}$$

y si derivamos

$$\phi'_0(z) = \frac{te^{zt}(z^2 - 2z + 2) - e^{zt}(2z - 2)}{(z^2 - 2z + 2)^2} \Rightarrow \phi'_0(0) = \frac{t + 1}{2}$$

Para $z_1 = 1 + i$

$$\text{Res} \left(\frac{e^{zt}}{(z^2 - 2z + 2) z^2}, 1 + i \right) = \text{Res} \left(\frac{e^{zt}/z^2 (z - (1 - i))}{z - (1 + i)}, 1 + i \right) = \frac{\phi_1(1 + i)}{0!} = \phi_1(1 + i)$$

siendo

$$\phi_1(z) = \frac{e^{zt}}{z^2 (z - (1 - i))}$$

por tanto

$$\phi_1(1+i) = \frac{e^{(1+i)t}}{(1+i)^2(1+i-(1-i))} = -\frac{e^{t(1+i)}}{4}$$

Para $z_2 = 1-i$

$$\text{Res} \left(\frac{e^{zt}}{(z^2 - 2z + 2)z^2}, 1-i \right) = \text{Res} \left(\frac{e^{zt}/z^2(z-(1+i))}{z-(1-i)}, 1-i \right) = \frac{\phi_2(1-i)}{0!} = \phi_2(1-i)$$

siendo

$$\phi_2(z) = \frac{e^{zt}}{z^2(z-(1+i))}$$

por tanto

$$\phi_2(1-i) = \frac{e^{(1-i)t}}{(1-i)^2(1-i-(1+i))} = -\frac{e^{t(1-i)}}{4}$$

y sumando todos los residuos

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(z^2 - 2z + 2)z^2} \right] (t) = \left(\frac{t+1}{2} \right) + \left(-\frac{e^{t(1+i)}}{4} \right) + \left(-\frac{e^{t(1-i)}}{4} \right)$$

desarrollando

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(z^2 - 2z + 2)z^2} \right] (t) = \left(\frac{t+1}{2} \right) - \frac{e^t e^{it}}{4} - \frac{e^t e^{-it}}{4}$$

Para expresar la función como una función real, se saca factor común $-e^t/2$ para obtener

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(z^2 - 2z + 2)z^2} \right] (t) = \left(\frac{t+1}{2} \right) - \frac{e^t}{2} \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right) = \left(\frac{t+1}{2} \right) - \frac{e^t}{2} \cos(t) = \frac{1}{2} (t+1 - e^t \cos t)$$

y por tanto

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e^{-4z}}{(z^2 - 2z + 2)z^2} \right] (t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(z^2 - 2z + 2)z^2} \right] (t-4) = \frac{1}{2} ((t-4) + 1 - e^{(t-4)} \cos(t-4)) \quad t > 4$$

la solución $y(t)$ buscada será

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1 - e^{-4z}}{(z^2 - 2z + 2)z^2} \right] (t) = \begin{cases} \frac{1}{2} (t+1 - e^t \cos t) & t < 4 \\ \frac{1}{2} (t+1 - e^t \cos t) - \frac{1}{2} (t-3 - e^{t-4} \cos(t-4)) & t > 4 \end{cases}$$

Nota: Los requisitos para aprobar la asignatura son: tener al menos 7 preguntas correctas en la parte de **ejercicios básicos** y obtener una puntuación mínima de 5 puntos en la parte de **problemas**.