

Variable Compleja y Transformadas
Segundo Curso, I.T.I. Electricidad y Electrónica
Examen de operaciones básicas, 8 de febrero de 2008

1. **Calcula $(2+i)^3$ y expresa el resultado en forma binómica.**

Solución: Operando de forma directa mediante el binomio de Newton:

$$\begin{aligned}(2+i)^3 &= \binom{3}{0} (2)^0 i^3 + \binom{3}{1} (2)^1 i^2 + \binom{3}{2} (2)^2 i^1 + \binom{3}{3} (2)^3 i^0 \\ &= -i - 6 + 12i + 8 = 2 + 11i\end{aligned}$$

2. **Calcula $(-i)^{23}$ y expresa el resultado en forma binómica.**

Solución: Teniendo en cuenta que

$$i^n = i^r$$

siendo r el resto de dividir n entre 4, tendremos:

$$(-i)^{23} = (-1)^{23} i^{23} = -i^{4 \cdot 5 + 3} = -i^3 = i$$

3. **Calcula $(3-2i) \cdot (1+i)$ y expresa el resultado en forma binómica.**

Solución: Operando directamente

$$(3-2i) \cdot (1+i) = 3 + 3i - 2i - 2i^2 = 5 + i$$

4. **Calcula $\frac{1-i}{1+i}$ y expresa el resultado en forma binómica.**

Solución: Multiplicando por el conjugado del denominador:

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{(1-i)^2}{|1+i|^2} = \frac{1+i^2-2i}{2} = -i$$

5. **Calcula $\frac{1_{\pi/4} 2_{\pi/3}}{3_{\pi/2}} = \frac{1 e^{i\pi/4} \cdot 2 e^{i\pi/3}}{3 e^{i\pi/2}}$ y expresa el resultado en forma binómica.**

Solución: Ponemos los complejos en forma binómica antes de realizar las operaciones

$$1 e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2 e^{i\pi/3} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + i\sqrt{3}$$

$$3 e^{i\pi/2} = 3i$$

por tanto

$$\begin{aligned}\frac{1 e^{i\pi/4} \cdot 2 e^{i\pi/3}}{3 e^{i\pi/2}} &= \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) (1 + i\sqrt{3})}{3i} = \frac{1}{3i} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{6}}{2}i^2\right) = \\ &= \frac{1}{3i} \left(\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}\right] + i \left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}\right]\right)\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{i} = -i$$

finalmente tenemos

$$\frac{1}{3i} \left(\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}\right] + i \left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}\right]\right) = -\frac{i}{3} \left(\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}\right] + i \left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}\right]\right)$$

y la solución es

$$\left(\frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{6}\right) + i \left(\frac{\sqrt{6}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{6}\right)$$

También es posible resolver el problema de la siguiente forma: Utilizamos operaciones en forma exponencial

$$\frac{1 e^{i\pi/4} \cdot 2 e^{i\pi/3}}{3 e^{i\pi/2}} = \frac{2}{3} e^{i\pi(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2})} = \frac{2}{3} e^{i\pi/12}$$

y a continuación expresamos el resultado en forma binómica teniendo en cuenta las fórmulas del ángulo mitad

$$\begin{aligned}\cos \frac{\theta}{2} &= \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \\ \sen \frac{\theta}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}\end{aligned}$$

que aplicadas a este caso

$$\begin{aligned}\frac{2}{3} e^{i\pi/12} &= \frac{2}{3} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sen \frac{\pi}{12}\right) = \frac{2}{3} \left(\cos \frac{\pi/6}{2} + i \sen \frac{\pi/6}{2}\right) \\ &= \frac{2}{3} \left(\sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2}} + i \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2}}\right) = \frac{2}{3} \left(\sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} + i \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}\right) \\ &= \frac{2}{3} \left(\sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} + i \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{3} + i \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{3}\end{aligned}$$

Es fácil comprobar que este resultado es idéntico al obtenido anteriormente.

6. **Calcula el módulo de $\sqrt[5]{2-4i}$.**

Solución: Teniendo en cuenta las propiedades del módulo

$$\left| \sqrt[5]{2-4i} \right| = \sqrt[5]{|2-4i|} = \sqrt[5]{\sqrt{2^2+4^2}} = \sqrt[5]{\sqrt{20}} = \sqrt[10]{20}$$

7. **Calcula el argumento de $1 - \sqrt{3}i$ y expresa el resultado en radianes.**

Solución: El argumento φ del número $(1 - \sqrt{3}i)$ se encuentra en el cuarto cuadrante, y se calcula como

$$\varphi = \arctan -\frac{\sqrt{3}}{1} = \arctan -\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow \arg(1 - \sqrt{3}i) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

8. **Calcula $\sqrt[4]{i}$ y escribe los resultados en forma polar o exponencial, con el argumento en radianes.**

Solución: En forma polar, el número complejo i puede ponerse como

$$1_{\pi/2}$$

luego las raíces cuartas de i serán

$$1^{\frac{1}{4}}_{\frac{\pi/2 + 2k\pi}{4}} = \begin{cases} 1_{\pi/8} & k = 0 \\ 1_{(\pi/2+2\pi)/4} = 1_{5\pi/8} & k = 1 \\ 1_{(\pi/2+4\pi)/4} = 1_{9\pi/8} & k = 2 \\ 1_{(\pi/2+6\pi)/4} = 1_{13\pi/8} & k = 3 \end{cases}$$

9. **Expresa $-2-2i$ en forma polar o exponencial, expresando el ángulo en radianes.**

Solución: El argumento φ del número $-2 - 2i$, que se encuentra en el tercer cuadrante, se calcula como

$$\varphi = \arctan \frac{2}{2} + \pi = \arctan 1 + \pi = \pi/4 + \pi = \frac{5\pi}{4}$$

Entonces, dicho número en forma exponencial se escribe como

$$-2 - 2i = |-2 - 2i|e^{i\varphi} = 2\sqrt{2}e^{i5\pi/4}$$

10. **Calcula $(-1 - \sqrt{3}i) \cdot (2 - 2\sqrt{3}i)$ y expresa el resultado en forma polar o exponencial con el argumento en radianes.**

Solución: Podemos observar que

$$z_1 = (-1 - \sqrt{3}i) = -(1 + \sqrt{3}i)$$

$$z_2 = (2 - 2\sqrt{3}i) = 2(1 - \sqrt{3}i) = -2 \cdot \overline{z_1}$$

Por tanto

$$z_1 \cdot z_2 = (-1 - \sqrt{3}i) \cdot (2 - 2\sqrt{3}i) = -2z_1\overline{z_1} = -2|z_1|^2 = -2 \cdot 4 = -8$$

luego como es un número real positivo en forma polar o exponencial sería

$$-8 = 8_\pi = 8e^{i\pi}$$

Nota: Los requisitos para aprobar la asignatura son: tener al menos 7 preguntas correctas en la parte de **ejercicios básicos** y obtener una puntuación mínima de 5 puntos en la parte de **problemas**.

Variable Compleja y Transformadas
Segundo Curso, I.T.I. Electricidad y Electrónica
Examen de problemas, 8 de febrero de 2008

1. (1.25 puntos) Demuestra que

$$|z + 1| > |z - 1| \iff \operatorname{Re} z > 0$$

Solución: Como $|z| > 0$, entonces

$$|z + 1| > |z - 1| \iff |z + 1|^2 > |z - 1|^2$$

y teniendo en cuenta que $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, la desigualdad anterior nos lleva a

$$(z + 1) \cdot \overline{(z + 1)} > (z - 1) \cdot \overline{(z - 1)}$$

y utilizando ahora las propiedades del conjugado de una suma o diferencia de complejos

$$(z + 1) \cdot (\bar{z} + \bar{1}) > (z - 1) \cdot (\bar{z} - \bar{1})$$

Si ahora tenemos en cuenta que 1 es un número real y por tanto coincide con su conjugado, obtenemos

$$z\bar{z} + z + \bar{z} + 1 > z\bar{z} - z - \bar{z} + 1$$

Simplificando

$$z + \bar{z} > -z - \bar{z}$$

pero

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

por tanto la desigualdad anterior queda

$$2 \operatorname{Re}(z) > -2 \operatorname{Re}(z) \iff 4 \operatorname{Re}(z) > 0 \iff \operatorname{Re}(z) > 0$$

tal y como queríamos demostrar.

2. (1.25 puntos) Demuestra que la función

$$v(x, y) = 3x^2y - y^3 - 4xy + y$$

es armónica, y encuentra todas las $u(x, y)$ tales que $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ es holomorfa.

Solución: Demostramos en primer lugar que $v(x, y)$ es armónica. Para ello derivamos respecto de x e y

$$v_x = 6xy - 4y$$

$$v_y = 3x^2 - 3y^2 - 4x + 1$$

y volvemos a derivar

$$v_{xx} = 6y$$

$$v_{yy} = -6y$$

Por tanto v es armónica ya que cumple la ecuación de Laplace

$$v_{xx} + v_{yy} = 6y + (-6y) = 0$$

A continuación encontraremos $u(x, y)$ utilizando las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Utilizando la primera ecuación, obtenemos

$$u_x = v_y = 3x^2 - 3y^2 - 4x + 1$$

y al integrar respecto de x

$$u = \int u_x dx = \int (3x^2 - 3y^2 - 4x + 1) dx = x^3 - 3y^2x - 2x^2 + x + \varphi(y)$$

donde $\varphi(y)$ es constante respecto de x , pero puede depender de y . Para encontrar su valor, utilizamos la segunda ecuación de Cauchy-Riemann, junto con la expresión que hemos encontrado para u

$$u_y = -v_x \Leftrightarrow -6yx + \varphi'(y) = -(6xy - 4y)$$

de donde

$$\varphi'(y) = 4y$$

e integrando

$$\varphi = 2y^2 + C$$

en este caso C es constante respecto de x e y . La función $u(x, y)$ buscada será

$$u = x^3 - 3y^2x - 2x^2 + x + 2y^2 + C$$

y la expresión para $f(x, y)$ es

$$f(x, y) = (x^3 - 3y^2x - 2x^2 + x + 2y^2 + C) + i(3x^2y - y^3 - 4xy + y)$$

Aunque no se pregunta en el enunciado, es muy sencillo expresar $f(x, y)$ en términos de z

$$f(z) = z^3 - 2z^2 + z + C$$

3. Calcula las siguientes integrales en función del valor de $r > 0$:

(a) **(1.25 puntos)** $\int_{\gamma} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2(z^2 + 1)} dz$, $\gamma(t) = -1 + r e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

(b) **(1.25 puntos)** $\int_{\gamma} \frac{\cos z}{(z + 2i)^2} dz$, $\gamma(t) = r e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Solución: En ambos casos se trata de integrar funciones, que sólo tienen singularidades aisladas, a lo largo de circunferencias, que son curvas cerradas simples y diferenciables y por tanto es posible utilizar el teorema de los residuos.

(a) $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^2(z^2 + 1)}$. En este caso $f(z)$ tiene 3 singularidades aisladas

$$z_1 = 0 \quad z_2 = i \quad z_3 = -i$$

El valor $z_1 = 0$ es un cero del numerador de orden 1 y un cero del denominador de orden 2, por tanto se trata de un polo simple. Otra forma de comprobarlo es calcular el siguiente límite:

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \frac{\operatorname{sen} z}{z^2(z^2 + 1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z(z^2 + 1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} \frac{1}{(z^2 + 1)} = 1$$

donde se ha tenido en cuenta que

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1$$

Las otras singularidades, z_2 y z_3 , también son polos simples, puesto que son ceros simples del denominador, pero no anulan el numerador.

Calcularemos ahora los residuos en cada singularidad, teniendo en cuenta que son polos simples

$$\operatorname{Res}(f(z), 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{\operatorname{sen} z}{z^2(z^2 + 1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z(z^2 + 1)} = 1$$

$$\operatorname{Res}(f(z), i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{\operatorname{sen} z}{z^2(z^2 + 1)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2(z + i)} = \frac{\operatorname{sen}(i)}{i^2 \cdot 2i} = -\frac{\operatorname{sen}(i)}{2i}$$

$$\operatorname{Res}(f(z), -i) = \lim_{z \rightarrow -i} (z + i) \frac{\operatorname{sen} z}{z^2(z^2 + 1)} = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2(z - i)} = \frac{\operatorname{sen}(-i)}{(-i)^2 \cdot (-2i)} = -\frac{\operatorname{sen}(i)}{2i}$$

La integral a lo largo de la curva $\gamma(t) = -1 + re^{it}$, dependerá obviamente del radio r . Si calculamos las distancias del centro (-1) a cada una de las singularidades obtenemos

$$\text{Para } z_1 = 0 \Rightarrow |-1 - 0| = |-1| = 1$$

$$\text{Para } z_2 = i \text{ y } z_3 = -i \Rightarrow |-1 - i| = |-1 - (-i)| = \sqrt{2}$$

Y para estos 2 valores distinguimos 3 casos:

- Si $r < 1$, no hay singularidades dentro de la semicircunferencia y entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

- Si $1 < r < \sqrt{2}$, la curva contiene a $z_1 = 0$, pero ni a z_2 , ni a z_3 y la integral vale

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), 0) = 2\pi i$$

- Si $r > \sqrt{2}$, la curva contiene a todas las singularidades: z_1, z_2 y z_3

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= 2\pi i \{ \operatorname{Res}(f(z), 0) + \operatorname{Res}(f(z), i) + \operatorname{Res}(f(z), -i) \} \\ &= 2\pi i \left(1 - \frac{\operatorname{sen}(i)}{2i} - \frac{\operatorname{sen}(i)}{2i} \right) \\ &= 2\pi i (1 + i \operatorname{sen}(i)) \end{aligned}$$

Por último, si $r = 1$ o $r = \sqrt{2}$ la integral no tiene sentido puesto que la curva pasará por alguna de las singularidades.

- (b) $f(z) = \frac{\cos z}{(z + 2i)^2}$. En este caso, $f(z)$ sólo tiene una singularidad: $z_1 = -2i$. El tipo de singularidad de z_1 es un polo de orden 2, puesto que

$$\lim_{z \rightarrow 0} (z + 2i)^2 \frac{\cos z}{(z + 2i)^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \cos(z) = 1$$

y con esta información calculamos el residuo de $f(z)$ en ella, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\cos z}{(z + 2i)^2} = \frac{\varphi(z)}{(z + 2i)^2} \\ \operatorname{Res}(f(z), -2i) &= \operatorname{Res}\left(\frac{\varphi(z)}{(z + 2i)^2}, -2i\right) = \frac{\varphi'(-2i)}{1!} = -\operatorname{sen}(-2i) = \operatorname{sen}(2i) \end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen}(z)$.

La integral a lo largo de $\gamma(t)$, depende del radio r . Si calculamos las distancias del centro (0) a la singularidad tendremos

$$\text{Para } z_1 = -2i \Rightarrow |0 - (-2i)| = |2i| = 2$$

Con este valor distinguimos 2 casos:

- Si $r < 2$, no hay singularidades dentro de la semicircunferencia y entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

- Si $r > 2$, la curva contiene a $z_1 = -2i$ y la integral vale

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), -2i) = 2\pi i \operatorname{sen}(2i)$$

Como en el apartado anterior, si $r = 1$ o $r = 2$ la integral no tiene sentido, puesto que la curva pasará por la singularidad.

4. Calcula las series de Laurent centrada en $z_0 = -1$ de la función

$$f(z) = \frac{z^2}{z^2 + 4z + 3}$$

(a) **(1.25 punto) En el conjunto $\{0 < |z + 1| < 2\}$.**

(b) **(1.25 punto) En el conjunto $\{|z + 1| > 2\}$.**

Solución: Como el grado del numerador es igual que el del denominador, tenemos que realizar en primer lugar una reducción de grado, bien dividiendo ambos polinomios entre sí o bien completando el numerador, sumando y restando el término adecuado

$$f(z) = \frac{z^2}{z^2 + 4z + 3} = \frac{z^2 + (4z + 3) - (4z + 3)}{z^2 + 4z + 3} = 1 - \frac{4z + 3}{z^2 + 4z + 3}$$

A continuación descomponemos la fracción que queda en fracciones simples, para ello buscamos las raíces del denominador

$$z^2 + 4z + 3 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2}$$

es decir

$$z = -3$$

$$z = -1$$

y la fracción correspondiente queda como

$$\frac{4z + 3}{z^2 + 4z + 3} = \frac{4z + 3}{(z + 3)(z + 1)}$$

que en fracciones simples se descompone como

$$\frac{4z + 3}{(z + 3)(z + 1)} = \frac{A}{z + 3} + \frac{B}{z + 1} = \frac{A(z + 1) + B(z + 3)}{(z + 3)(z + 1)} = \frac{(A + B)z + (A + 3B)}{(z + 3)(z + 1)}$$

Hallaremos A y B resolviendo el sistema correspondiente

$$\left. \begin{array}{l} A + B = 4 \\ A + 3B = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow A = \frac{9}{2}, B = -\frac{1}{2}$$

Y la descomposición de la función $f(z)$ es

$$f(z) = 1 - \frac{9/2}{z + 3} + \frac{1/2}{z + 1}$$

Buscaremos ahora el desarrollo de $f(z)$ centrado en $z_0 = -1$, es decir, el desarrollo de Laurent de $f(z)$ en potencias de $(z+1)$. Notar que tanto el valor $1 = 1 \cdot (z+1)^0$, como la fracción $\frac{1/2}{z+1}$ ya son potencias de $(z+1)$, por lo que sólo tendremos que encontrar el desarrollo de la otra fracción en potencias de $(z+1)$ para cada una de las regiones indicadas:

(a) En el conjunto $\{0 < |z+1| < 2\}$:

$$\frac{9/2}{z+3} = \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{z+3} = \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{(z+1)+2} = \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{z+1}{2}\right)+1} = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{1+\frac{z+1}{2}}$$

y puesto que en esta región ocurre $|z+1| < 2 \Rightarrow \frac{|z+1|}{2} < 1$ y podemos desarrollar utilizando la suma de la progresión geométrica

$$\frac{9}{4} \cdot \frac{1}{1+\frac{z+1}{2}} = \frac{9}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z+1}{2}\right)^n$$

La función en esta región es

$$f(z) = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z+1} - \frac{9}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z+1}{2}\right)^n$$

o agrupando términos

$$f(z) = \underbrace{\frac{1}{2(z+1)}}_{\text{Parte Singular}} - \underbrace{\left(\frac{5}{4} + \frac{9}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z+1}{2}\right)^n\right)}_{\text{Parte Regular}}$$

(b) En el conjunto $\{|z+1| > 2\}$:

$$\frac{9/2}{z+3} = \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{z+3} = \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{(z+1)+2} = \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{(z+1)} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{z+1}}$$

y puesto que en esta región ocurre $|z+1| > 2 \Rightarrow \frac{2}{|z+1|} < 1$ y podemos desarrollar utilizando de nuevo la suma de la progresión geométrica

$$\frac{9}{2} \cdot \frac{1}{(z+1)} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{z+1}} = \frac{9}{2(z+1)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{z+1}\right)^n = \frac{9}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(z+1)^{n+1}}$$

La función en esta región es

$$f(z) = 1 + \frac{1/2}{z+1} - \frac{9}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(z+1)^{n+1}}$$

o agrupando términos

$$f(z) = \underbrace{\frac{-4}{(z+1)} + \frac{9}{4} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(z+1)^n}}_{\text{Parte Singular}} + \underbrace{1}_{\text{Parte Regular}}$$

5. Elige uno de estos dos problemas

- (2.5 puntos) Calcula la solución de la ecuación diferencial

$$y'' + 2y' + y = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, 1), \\ 1 & \text{si } t \in [1, 2), \\ 0 & \text{si } t \in [2, \infty) \end{cases}$$

con las condiciones iniciales $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.

Solución: Utilizamos la transformada de Laplace con el miembro de la izquierda, teniendo en cuenta su propiedad de linealidad y su comportamiento con la derivación:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y'' + 2y' + y](z) &= \mathcal{L}[y''] (z) + 2\mathcal{L}[y'] (z) + \mathcal{L}[y] (z) \\ &= [z^2 \mathcal{L}[y] (z) - zy(0) - y'(0)] + 2[z\mathcal{L}[y] (z) - y(0)] + \mathcal{L}[y] (z) \end{aligned}$$

Si aplicamos las condiciones iniciales se obtiene

$$z^2 \mathcal{L}[y] (z) + 2z\mathcal{L}[y] (z) + \mathcal{L}[y] (z) = (z^2 + 2z + 1) \mathcal{L}[y] (z) = (z + 1)^2 \mathcal{L}[y] (z)$$

Ahora aplicamos la transformada de Laplace sobre el miembro de la derecha, teniendo en cuenta que la función está definida a trozos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)](z) &= \int_0^\infty f(t) e^{-zt} dt = \int_0^1 f(t) e^{-zt} dt + \int_1^2 f(t) e^{-zt} dt + \int_2^\infty f(t) e^{-zt} dt \\ &= \int_0^1 0 \cdot e^{-zt} dt + \int_1^2 1 \cdot e^{-zt} dt + \int_2^\infty 0 \cdot e^{-zt} dt \\ &= \int_1^2 1 \cdot e^{-zt} dt = \frac{e^{-zt}}{-z} \Big|_{t=1}^{t=2} = \frac{[e^{-z} - e^{-2z}]}{z} \end{aligned}$$

Si ahora se igualan ambos miembros se obtiene:

$$(z + 1)^2 \mathcal{L}[y] (z) = \frac{[e^{-z} - e^{-2z}]}{z}$$

y podemos despejar $\mathcal{L}[y] (z)$

$$\mathcal{L}[y] (z) = \frac{[e^{-z} - e^{-2z}]}{z(z + 1)^2}$$

Calculamos a continuación la inversa. Utilizando la propiedad de linealidad

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{[e^{-z} - e^{-2z}]}{z(z + 1)^2} \right] (t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e^{-z}}{z(z + 1)^2} \right] (t) - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e^{-2z}}{z(z + 1)^2} \right] (t)$$

y si ahora tenemos en cuenta las propiedad de traslación

$$\mathcal{L}^{-1} [e^{-az} F(z)](t) = h_a(t) \cdot \mathcal{L}^{-1} [F(z)](t - a)$$

sólamente es necesario calcular la inversa de $\frac{1}{z(z+1)^2}$ que podemos obtener mediante residuos en sus dos singularidades $z_1 = 0$ y $z_2 = -1$:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{z(z+1)^2} \right] (t) = \text{Res} \left(e^{tz} \frac{1}{z(z+1)^2}, 0 \right) + \text{Res} \left(e^{tz} \frac{1}{z(z+1)^2}, -1 \right)$$

El valor $z_1 = 0$ es un polo simple

$$\text{Res} \left(e^{tz} \frac{1}{z(z+1)^2}, 0 \right) = \text{Res} \left(\frac{\varphi_1(z)}{z}, 0 \right) = \varphi(0) = 1$$

donde

$$\varphi_1(z) = \frac{e^{tz}}{(z+1)^2}$$

El valor -1 es un polo doble, por tanto:

$$\text{Res} \left(e^{tz} \frac{1}{z(z+1)^2}, -1 \right) = \text{Res} \left(\frac{\varphi_2(z)}{(z+1)^2}, -1 \right) = \frac{\varphi_2'(-1)}{1!} = -te^{-t} - e^{-t} = -(1+t)e^{-t}$$

donde

$$\varphi_2(z) = \frac{e^{tz}}{z} \Rightarrow \varphi_2'(z) = \frac{(te^{tz})z - e^{tz}}{z^2}$$

Luego

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{z(z+1)^2} \right] (t) = 1 - e^{-t}(t+1) = f(t)$$

y empleando la propiedad de traslación

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e^{-z}}{z(z+1)^2} \right] (t) = f(t-1)h_1(t) = (1 - te^{-(t-1)})h_1(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e^{-2z}}{z(z+1)^2} \right] (t) = f(t-2)h_2(t) = (1 - (t-1)e^{-(t-2)})h_2(t)$$

y la solución buscada es

$$y(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < 1 \\ (1 - te^{-(t-1)}) & 1 < t < 2 \\ (1 - te^{-(t-1)}) - (1 - (t-1)e^{-(t-2)}) & t > 2 \end{cases}$$

y simplificando

$$y(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < 1 \\ (1 - te^{-(t-1)}) & 1 < t < 2 \\ (t-1)e^{-(t-2)} - te^{-(t-1)} & t > 2 \end{cases}$$

- **(2.5 puntos) Calcula mediante la transformada \mathcal{Z} la solución de la ecuación en diferencias**

$$x_{n+2} + x_{n+1} + \frac{1}{4} x_n = 1 + \frac{1}{2^n}$$

con las condiciones iniciales $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$. Calcula también $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Solución: Aplicamos la transformada \mathcal{Z} al miembro de la izquierda, utilizando la propiedad de linealidad de esta transformada:

$$\mathcal{Z} \left[x_{n+2} + x_{n+1} + \frac{1}{4} x_n \right] (z) = \mathcal{Z} [x_{n+2}] (z) + \mathcal{Z} [x_{n+1}] (z) + \frac{1}{4} \mathcal{Z} [x_n] (z)$$

Aplicamos ahora la propiedad de traslación a cada sumando para expresarlo en términos de $\mathcal{Z} [x_n] (z)$, y empleamos las condiciones iniciales del enunciado

$$\mathcal{Z} [x_{n+2}] (z) = z^2 \mathcal{Z} [x_n] (z) - z^2 x_0 - z x_1 = z^2 \mathcal{Z} [x_n] (z) - z$$

$$\mathcal{Z} [x_{n+1}] (z) = z \mathcal{Z} [x_n] (z) - z x_0 = z \mathcal{Z} [x_n] (z)$$

Con estas operaciones la expresión a la izquierda de la ecuación queda

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \left[x_{n+2} + x_{n+1} + \frac{1}{4} x_n \right] (z) &= \left(z^2 + z + \frac{1}{4} \right) \mathcal{Z} [x_n] (z) - z \\ &= \left(z + \frac{1}{2} \right)^2 \mathcal{Z} [x_n] (z) - z \end{aligned}$$

Ahora utilizamos la transformada \mathcal{Z} con el miembro de la derecha

$$\mathcal{Z} \left[1 + \frac{1}{2^n} \right] (z) = \mathcal{Z} [1] (z) + \mathcal{Z} \left[\frac{1}{2^n} \right] (z)$$

y podemos calcular cada transformada fácilmente mediante la definición, teniendo en cuenta que son ambas progresiones geométricas

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} [1] (z) &= \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot \frac{1}{z^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1} \\ \mathcal{Z} \left[\frac{1}{2^n} \right] (z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{z^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2z}} = \frac{2z}{2z-1} = \frac{z}{z - \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Y la expresión de la derecha de la ecuación queda

$$\mathcal{Z} \left[1 + \frac{1}{2^n} \right] (z) = \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

Al igualar ambos miembros entre sí obtenemos

$$\left(z + \frac{1}{2} \right)^2 \mathcal{Z} [x_n] (z) - z = \frac{z}{z-1} + \frac{2z}{2z-1}$$

y podemos despejar $\mathcal{Z}[x_n](z)$

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[x_n](z) &= \frac{z}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{z}{(z-1)\left(z + \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{2z}{(2z-1)\left(z + \frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{z(z-1)(2z-1) + z(2z-1) + 2z(z-1)}{(z-1)(2z-1)\left(z + \frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{2z^3 + z^2 - 2z}{2(z-1)(2z-1)\left(z + \frac{1}{2}\right)^2}\end{aligned}$$

Para encontrar la transformada inversa \mathcal{Z}^{-1} descomponemos en fracciones simples

$$\mathcal{Z}[x_n](z) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{A}{z + \frac{1}{2}} + \frac{B}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{C}{(z-1)} + \frac{D}{\left(z - \frac{1}{2}\right)} \right\}$$

y desarrollamos cada fracción en potencias de z en el exterior del círculo de centro 0 y radio 1, puesto que todas las singularidades de $\mathcal{Z}[x_n](z)$ caen en el interior del círculo radio 1:

$$\frac{1}{z + \frac{1}{2}} = \frac{1}{z\left(1 + \frac{1}{2z}\right)} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n z^{n+1}} \quad \text{con } |2z| > 1$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z\left(1 - \frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \quad \text{con } |z| > 1$$

$$\frac{1}{z - \frac{1}{2}} = \frac{1}{z\left(1 - \frac{1}{2z}\right)} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n z^{n+1}} \quad \text{con } |z| > 1$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^2} &= \frac{d}{dz} \left(\frac{-1}{z + \frac{1}{2}} \right) = -\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z + \frac{1}{2}} \right) \\ &= -\frac{d}{dz} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n z^{n+1}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z^{n+1}} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} (-(n+1)) \frac{1}{z^{n+2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{2^n} (n+1) \frac{1}{z^{n+2}} \quad \text{con } |2z| > 1\end{aligned}$$

Sustituimos en la expresión de $\mathcal{Z}[x_n](z)$

$$\mathcal{Z}[x_n](z) = \frac{1}{2} \left\{ A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n z^{n+1}} + B \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{2^n} \frac{(n+1)}{z^{n+2}} + C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} + D \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n z^{n+1}} \right\}$$

Agrupamos los coeficientes asociados al mismo exponente y obtendremos

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[x_n](z) &= \frac{1}{2} \left\{ A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n z^{n+1}} + B \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2} (n+1)}{2^n z^{n+2}} + C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} + D \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n z^{n+1}} \right\} \\
&= A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1} z^{n+1}} + B \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2} (n+1)}{2^{n+1} z^{n+2}} + \frac{C}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} + D \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1} z^{n+1}} \\
&= -A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n z^n} + 2B \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)}{2^n z^n} + \frac{C}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + D \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n z^n} \\
&= \left(\frac{A}{2} + \frac{C}{2} + \frac{D}{2} \right) \frac{1}{z} + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{A(-1)^{n+1}}{2^n} + \frac{2B(-1)^n (n-1)}{2^n} + \frac{C}{2} + \frac{D}{2^n} \right] \frac{1}{z^n}
\end{aligned}$$

Y la solución y_n de la ecuación en diferencias viene dada por

$$y_0 = 0$$

$$y_1 = \left(\frac{A}{2} + \frac{C}{2} + \frac{D}{2} \right) = 1$$

$$y_n = \left(\frac{A(-1)^{n+1}}{2^n} + \frac{2B(-1)^n (n-1)}{2^n} + \frac{C}{2} + \frac{D}{2^n} \right) \text{ para } n \geq 2$$

Solamente faltan por determinar los valores de A , B , C y D . Para ello se tiene en cuenta que

$$\frac{2z^3 + z^2 - 2z}{2(z-1)(2z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{A}{z+\frac{1}{2}} + \frac{B}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{C}{(z-1)} + \frac{D}{\left(z-\frac{1}{2}\right)} \right\}$$

podemos sumar e identificar coeficientes

$$\begin{aligned}
\frac{2z^3 + z^2 - 2z}{2(z-1)(2z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)^2} &= \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{A\left(z+\frac{1}{2}\right)(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right) + B(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right) + C\left(z+\frac{1}{2}\right)^2\left(z-\frac{1}{2}\right) + D\left(z+\frac{1}{2}\right)^2(z-1)}{(z-1)(2z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)^2} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{A\left(z^3 - z^2 - \frac{1}{4}z + \frac{1}{4}\right) + B\left(z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}\right) + C\left(z^3 + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}\right) + D\left(z^3 - \frac{3}{4}z - \frac{1}{4}\right)}{(z-1)(2z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)^2} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{(A+C+D)z^3 + (-A+B+\frac{1}{2}C)z^2 + \left(-\frac{1}{4}A - \frac{3}{2}B - \frac{1}{4}C - \frac{3}{4}D\right)z + \left(\frac{1}{4}A + \frac{1}{2}B - \frac{1}{8}C - \frac{1}{4}D\right)}{(z-1)(2z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)^2} \right\}
\end{aligned}$$

por tanto

$$\left. \begin{aligned} A + C + D &= 2 \\ -A + B + \frac{1}{2}C &= 1 \\ -\frac{1}{4}A - \frac{3}{2}B - \frac{1}{4}C - \frac{3}{4}D &= -2 \\ \frac{1}{4}A + \frac{1}{2}B - \frac{1}{8}C - \frac{1}{4}D &= 0 \end{aligned} \right\}$$

cuya solución es

$$A = \frac{1}{9}$$

$$B = \frac{2}{3}$$

$$C = \frac{8}{9}$$

$$D = 1$$

Finalmente sustituimos estos valores en la expresión de y_n

$$y_0 = 0$$

$$y_1 = 1$$

$$y_n = \left(\frac{1(-1)^{n+1}}{9 \cdot 2^n} + \frac{4(-1)^n(n-1)}{3 \cdot 2^n} + \frac{4}{9} + \frac{1}{2^n} \right) \text{ para } n \geq 2$$

Con algunas operaciones más es posible hacer una simplificación mayor del tipo

$$y_n = \left\{ -\frac{13}{9} \left(\frac{-1}{2} \right)^n + \frac{4}{3}n \left(\frac{-1}{2} \right)^n \right\} + \left\{ \frac{4}{9} + \frac{1}{2^n} \right\} \text{ para } n \geq 2$$

Podemos ahora calcular el límite cuando $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{4}{9}$$

Nota: Los requisitos para aprobar la asignatura son: tener al menos 7 preguntas correctas en la parte de **ejercicios básicos** y obtener una puntuación mínima de 5 puntos en la parte de **problemas**.