

## Variable Compleja y Transformadas

## Segundo Curso, I.T. Industrial (Electricidad y Electrónica)

## Examen de operaciones básicas, 12 de febrero de 2005

1.- Calcula el módulo de  $4 - i$ .

Solución:  $|4 - i| = |4 + (-1) \cdot i| = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$ .

2.- Calcula el argumento de  $3 - 3\sqrt{3}i$ .

Solución: Como  $3 - 3\sqrt{3}i$  está en el cuarto cuadrante obtenemos el argumento directamente del arco tangente.

$$\arg(3 - 3\sqrt{3}i) = \arctg(-3\sqrt{3}/3) = -\arctg(\sqrt{3}) = -\pi/3.$$

3.- Escribe  $-1 + i$  en forma exponencial.

Solución: Obtenemos el módulo  $|-1 + i| = |-1 + 1 \cdot i| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ . Como  $-1 + i$  está en el segundo cuadrante necesitamos desplazar media vuelta el argumento que devuelve el arco tangente, ya que éste estará en el cuarto cuadrante.

$$\arg(-1 + i) = \arctg(1/(-1)) + \pi = -\arctg(1) + \pi = -\pi/4 + \pi = 3\pi/4.$$

Entonces  $-1 + i = \sqrt{2}e^{(3\pi/4)i}$ .

4.- Escribe  $2e^{(4\pi/3)i}$  en forma binómica.

Solución: Se tiene que

$$\begin{aligned} 2e^{(4\pi/3)i} &= 2(\cos(4\pi/3) + i \cdot \operatorname{sen}(4\pi/3)) = 2(-\cos(\pi/3) - i \cdot \operatorname{sen}(\pi/3)) = \\ &= 2(-1/2 - i\sqrt{3}/2) = -1 - \sqrt{3}i \end{aligned}$$

5.- Escribe  $\frac{1}{3 - 2i}$  en forma binómica.

Solución: Multiplicamos por el conjugado

$$\frac{1}{3 - 2i} = \frac{3 + 2i}{(3 - 2i)(3 + 2i)} = \frac{3 + 2i}{3^2 + (-2)^2} = \frac{3}{13} + i \cdot \frac{2}{13}.$$

6.- Escribe  $(-i)^{157}$  en forma binómica.

Solución: Sacamos potencias de los exponentes

$$\begin{aligned} (-i)^{157} &= (-1)^{157} \cdot i^{157} = (-1)^{156} \cdot (-1) \cdot i^{156} \cdot i = \\ &= ((-1)^2)^{78} \cdot (-1) \cdot (i^4)^{39} \cdot i = 1^{78} \cdot (-1) \cdot 1^{39} \cdot i = \\ &= (-1) \cdot i = 0 + (-1) \cdot i = -i. \end{aligned}$$

**7.-** Calcula  $(-1 + \sqrt{3}i)^{123}$

Solución: Escribimos la base en forma exponencial. El módulo vale

$$|-1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Como  $-1 + \sqrt{3}i$  está en el segundo cuadrante sumamos  $\pi$  al argumento y

$$\arg(-1 + \sqrt{3}i) = \arctg(\sqrt{3}/(-1)) + \pi = -\arctg(\sqrt{3}) + \pi = -\pi/3 + \pi = 2\pi/3.$$

Entonces

$$\begin{aligned} (-1 + \sqrt{3}i)^{123} &= (2e^{(2\pi/3)i})^{123} = 2^{123}e^{123 \cdot (2\pi/3)i} = \\ &= 2^{123}e^{82\pi i} = 2^{123}(e^{2\pi i})^{41} = 2^{123}1^{41} = 2^{123}. \end{aligned}$$

**8.-** Calcula  $\sqrt[3]{-2 + 2i}$ .

Solución: Escribimos el radicando en forma exponencial. El módulo vale

$$|-2 + 2i| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}.$$

Como  $-2 + 2i$  está en el segundo cuadrante sumamos  $\pi$  al argumento y

$$\arg(-2 + 2i) = \arctg(2/(-2)) + \pi = -\arctg(1) + \pi = -\pi/4 + \pi = 3\pi/4.$$

Entonces  $-2 + 2i = \sqrt{8}e^{(3\pi/4)i}$  y sus tres raíces cúbicas serán

$$\sqrt[3]{-2 + 2i} = \begin{cases} \sqrt[3]{\sqrt{8}e^{(3\pi/4)i/3}} = \sqrt{2}e^{(\pi/12)i} \\ \sqrt[3]{\sqrt{8}e^{(3\pi/4)i/3 + (2\pi/3)i}} = \sqrt{2}e^{(11\pi/12)i} \\ \sqrt[3]{\sqrt{8}e^{(3\pi/4)i/3 + (4\pi/3)i}} = \sqrt{2}e^{(19\pi/12)i} \end{cases}$$

**9.-** Calcula  $(5 + i) \cdot (-2 + 4i)$ .

Solución:  $(5 + i) \cdot (-2 + 4i) = 5 \cdot (-2) + 5 \cdot 4i + i \cdot (-2) + i \cdot 4i = -10 + 20i - 2i - 4 = -14 + 18i$ .

**10.-** Calcula  $\frac{5 + i}{-2 + 4i}$ .

Solución: Multiplicamos por el conjugado del denominador

$$\frac{5 + i}{-2 + 4i} = \frac{(5 + i)(-2 - 4i)}{(-2 + 4i)(-2 - 4i)} = \frac{-10 - 20i - 2i - 4i^2}{(-2)^2 + 4^2} = \frac{-6 - 22i}{20} = -\frac{3}{10} - \frac{11}{10} \cdot i.$$

**Variable Compleja y Transformadas**  
**Segundo Curso, I.T.I. Electricidad y Electrónica**  
**Examen de problemas, 12 de febrero de 2005**

**1.-** Sean  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  y  $f(z)$  funciones, tales que  $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  y  $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ .  
a) (0.5 puntos) Encuentra qué relación han de cumplir  $a$  y  $b$  para que sea armónica la función

$$u(x, y) = a \cdot x^2 + b \cdot y^2 - xy + 2x + 3y - 1$$

Solución: La función  $u(x, y)$  es armónica si y sólo si

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

Derivando

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 2ax - y + 2 &\implies \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = 2a \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 2by - x + 3 &\implies \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 2b \end{aligned} \right\} \implies \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 2a + 2b.$$

Luego  $u(x, y)$  es armónica si y sólo si  $a = -b$ .

b) (1 punto) Encuentra  $v(x, y)$  de manera que  $f(x + i \cdot y) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$  sea holomorfa y  $f(2 - i) = -8i$ , para la función

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy - x + 3$$

Solución: Aplicamos una de las condiciones de Cauchy-Riemann y

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 2x + 2y - 1.$$

Entonces

$$v(x, y) = \int \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) dy = \int (2x + 2y - 1) dy = 2xy + y^2 - y + \phi(x).$$

Usamos la otra condición de Cauchy-Riemman para determinar  $\phi(x)$ ,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= -(-2y + 2x) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) &= 2y + \phi'(x) \end{aligned} \right\} \implies \phi'(x) = -2x \implies \phi(x) = -x^2 + C$$

Entonces  $v(x, y) = 2xy + y^2 - y - x^2 + C$ , y como  $f(2 - i) = -8i$

$$\begin{aligned} -8i &= f(2 - i) = u(2, -1) + i \cdot v(2, -1) = \\ &= 2^2 - (-1)^2 + 2 \cdot 2(-1) - 2 + 3 + i \cdot (2 \cdot 2(-1) + (-1)^2 - (-1) - 2^2 + C) = \\ &= (-6 + C)i \end{aligned}$$

Concluimos finalmente que  $C = -2$  y  $v(x, y) = 2xy + y^2 - y - x^2 - 2$

c) (0.5 puntos) Identifica como función  $f(z)$

$$f(x + i \cdot y) = -2 - x^2 - y - 4xy + y^2 + i \cdot (1 + x + 2x^2 - 2xy - 2y^2).$$

Solución: Agrupamos en potencias buscando la variable  $z = x + i \cdot y$ ,

$$\begin{aligned} f(x + i \cdot y) &= (-x^2 + y^2 - 2ixy) + (2ix^2 - 2iy^2 - 4xy) + ix - y - 2 + i = \\ &= -(x + i \cdot y)^2 + 2i(x + i \cdot y)^2 + i(x + i \cdot y) - 2 + i = \\ &= -z^2 + 2iz^2 + iz - 2 + i. \end{aligned}$$

Entonces  $f(z) = (-1 + 2i)z^2 + iz - 2 + i$ . A este resultado también se podía haber llegado mediante la sustitución  $x = (z + \bar{z})/2$ ,  $y = (z - \bar{z})/(2i)$ , si bien este camino es más largo.

**2.-** Se considera la función

$$f(z) = \frac{1}{z^2 \cdot (z^2 + 2z + 5)}.$$

a) (0.5 puntos) Halla todas las singularidades aisladas y analiza de qué tipo son.

Solución: Es evidente que del factor  $z^2$  que aparece en el denominador obtenemos como polo de orden 2 a  $z_1 = 0$ . Al resolver  $z^2 + 2z + 5 = 0 \iff z = -1 \pm 2 \cdot i$  deducimos que  $z_2 = -1 + 2i$  y  $z_3 = -1 - 2i$  son dos polos de orden 1.

b) (1.5 puntos) Construye la serie de Laurent alrededor de  $z_0 = 0$ .

Solución: Vamos a descomponer  $f(z)$  en fracciones simples. Aunque se puede buscar una descomposición de tipo

$$f(z) = \frac{1}{z^2 \cdot (z^2 + 2z + 5)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z + 1 - 2i} + \frac{D}{z + 1 + 2i},$$

si sacamos  $z^2$  como factor en el denominador y buscamos

$$f(z) = \frac{1}{z^2 \cdot (z^2 + 2z + 5)} = \frac{1}{z^2} \left( \frac{\alpha}{z + 1 - 2i} + \frac{\beta}{z + 1 + 2i} \right).$$

obtenemos un sistema más rápido de resolver, que será

$$(\alpha + \beta)z + (1 + 2i)\alpha + (1 - 2i)\beta = 0 \cdot z + 1,$$

de donde  $\alpha + \beta = 0$  y  $(1 + 2i)\alpha + (1 - 2i)\beta = 1$ . Como por la primera ecuación sabemos que  $\beta = -\alpha$ , la segunda ecuación se reescribe como  $4i\alpha = 1$ , y por lo tanto  $\alpha = 1/(4i)$  y  $\beta = -1/(4i)$ .

$$f(z) = \frac{1}{z^2 \cdot (z^2 + 2z + 5)} = \frac{1}{z^2} \left( \frac{1}{4i} \cdot \frac{1}{z + 1 - 2i} - \frac{1}{4i} \cdot \frac{1}{z + 1 + 2i} \right).$$

Desarrollamos el sumando  $1/(z + 1 - 2i)$  buscando una serie geométrica

$$\frac{1}{z + 1 - 2i} = \frac{1}{1 - 2i} \cdot \frac{1}{1 - (-z/(1 - 2i))} = \frac{1}{1 - 2i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{(1 - 2i)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{(1 - 2i)^{n+1}}.$$

Hacemos lo mismo con el sumando  $1/(z + 1 + 2i)$  y llegamos a

$$\frac{1}{z + 1 + 2i} = \frac{1}{1 + 2i} \cdot \frac{1}{1 - (-z/(1 + 2i))} = \frac{1}{1 + 2i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{(1 + 2i)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{(1 + 2i)^{n+1}}.$$

Si aplicamos todo lo que hemos deducido hasta ahora

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2} \left( \frac{1}{4i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{(1 - 2i)^{n+1}} - \frac{1}{4i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{(1 + 2i)^{n+1}} \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{4i} \cdot \frac{(-1)^n}{(1 - 2i)^{n+1}} - \frac{1}{4i} \cdot \frac{(-1)^n}{(1 + 2i)^{n+1}} \right) \cdot z^{n-2} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^n (1 + 2i)^{n+1} - (-1)^n (1 - 2i)^{n+1}}{4i \cdot (1 - 2i)^{n+1} \cdot (1 + 2i)^{n+1}} \right) \cdot z^{n-2} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4i} \left( \frac{(1 + 2i)^{n+1} - (1 - 2i)^{n+1}}{(1^2 + (-2)^2)^{n+1}} \right) \cdot z^{n-2} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot i}{4 \cdot 5^{n+1}} ((1 + 2i)^{n+1} - (1 - 2i)^{n+1}) \cdot z^{n-2} = \\ &= \sum_{n=-2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+3} \cdot i}{4 \cdot 5^{n+3}} ((1 + 2i)^{n+3} - (1 - 2i)^{n+3}) \cdot z^n. \end{aligned}$$

Es fácil probar que los coeficientes de la serie anterior son números reales, puesto que

$$\begin{aligned} c_n &= i((1 + 2i)^{n+3} - (1 - 2i)^{n+3}) = i \left( (1 + 2i)^{n+3} - \overline{(1 + 2i)^{n+3}} \right) = \\ &= i \cdot 2 \operatorname{Im}((1 + 2i)^{n+3}) i = -2 \operatorname{Im}((1 + 2i)^{n+3}) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Sin embargo no se aprecia ninguna simplificación sencilla de la expresión de la serie.

**3.-** Sea  $\gamma$  el cuadrado de vértices  $\pm a \pm a \cdot i$ , con  $a > 0$ . Calcula en los casos en los que tenga sentido la integral  $\int_{\gamma} f(z) dz$

a) (1 punto) Para  $f(z) = \frac{z+1}{z^2(z-2+i)}$ .

Solución: Claramente  $f(z)$  es holomorfa en todo  $\mathbb{C}$  salvo en  $z_1 = 0$ , que es un polo doble, y  $z_2 = 2 - i$  que es un polo simple. Vamos a calcular los residuos en las singularidades. Para  $z_1 = 0$  construimos

$$g(z) = z^2 \cdot f(z) = \frac{z^2(z+1)}{z^2(z-2+i)} = \frac{z+1}{z-2+i}$$

cuya derivada es

$$g'(z) = \frac{1 \cdot (z-2+i) - (z+1) \cdot 1}{(z-2+i)^2} = \frac{-3+i}{(z-2+i)^2}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, 0) &= g'(0) = \frac{-3+i}{(-2+i)^2} = \frac{(-3+i)(-2-i)^2}{(-2+i)^2(-2-i)^2} = \\ &= \frac{(-3+i)((-2)^2 + 2(-2)(-i) + (-i)^2)}{((-2)^2 + 1^2)^2} = \\ &= \frac{(-3+i)(3+4i)}{(4+1)^2} = \frac{-9+3i-12i+4i^2}{25} = \\ &= \frac{-13-9i}{25}. \end{aligned}$$

Para  $z_2 = 2 - i$ , que es polo simple, partimos de

$$g(z) = (z-2+i) \cdot f(z) = \frac{(z-2+i)(z+1)}{z^2(z-2+i)} = \frac{z+1}{z^2}$$

para concluir que

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, 2-i) &= g(2-i) = \frac{(2-i)+1}{(2-i)^2} = \frac{3-i}{(2-i)^2} = \\ &= -\text{Res}(f, 0) = \frac{13+9i}{25}. \end{aligned}$$

Es obvio que  $z_1 = 0$  siempre está dentro del cuadrado, pero  $z_2 = 2 - i$  lo estará si y sólo si  $a < 2$ . Tenemos entonces que distinguir dos casos

- Si  $a < 2$

$$\int_{\gamma} \frac{z+1}{z^2(z-2+i)} dz = 2\pi i \cdot \text{Res}(f, 0) = \frac{18\pi}{25} - \frac{26\pi}{25} \cdot i.$$

- Si  $a > 2$

$$\int_{\gamma} \frac{z+1}{z^2(z-2+i)} dz = 2\pi i \cdot (\text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, 2-i)) = 0.$$

b) (1 punto) Para  $f(z) = \frac{\text{sen}(z^2)}{z(z^2+1)}$ .

Solución: La aparición del factor  $\text{sen}(z^2)$  hace que  $z=0$  no sea un polo de orden 1 sino una singularidad evitable (es decir, no es singularidad). Las únicas singularidades que tiene  $f(z)$  son  $z_1 = i$  y  $z_2 = -i$ , ambas polos de orden 1. Para  $z_1 = i$  construimos

$$g(z) = (z-i) \cdot f(z) = \frac{(z-i) \cdot \text{sen}(z^2)}{z(z-i)(z+i)} = \frac{\text{sen}(z^2)}{z(z+i)}$$

y por lo tanto

$$\text{Res}(f, i) = g(i) = \frac{\text{sen}(i^2)}{i(i+i)} = \frac{\text{sen}(-1)}{i(2i)} = -\frac{\text{sen}(1)}{-2} = \frac{\text{sen}(1)}{2}.$$

Hacemos un razonamiento similar para  $z_2 = -i$ , partiendo esta vez de

$$g(z) = (z+i) \cdot f(z) = \frac{(z+i) \cdot \text{sen}(z^2)}{z(z-i)(z+i)} = \frac{\text{sen}(z^2)}{z(z-i)}$$

y deduciendo que

$$\text{Res}(f, -i) = g(-i) = \frac{\text{sen}((-i)^2)}{(-i)(-i-i)} = \frac{\text{sen}(-1)}{(-i)(-2i)} = -\frac{\text{sen}(1)}{-2} = \frac{\text{sen}(1)}{2}.$$

Nuevamente hay que distinguir dos casos

- Si  $a < 1$  tanto  $z_1 = i$  como  $z_2 = -i$  están fuera del cuadrado. Entonces  $f(z)$  es holomorfa en el interior de la curva y por tanto

$$\int_{\gamma} \frac{\text{sen}(z^2)}{z(z^2+1)} dz = 0$$

- Si  $a > 1$  las dos singularidades son interiores a la curva y

$$\int_{\gamma} \frac{\text{sen}(z^2)}{z(z^2+1)} dz = 2\pi i (\text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, -i)) = 2\pi i \left( \frac{\text{sen}(1)}{2} + \frac{\text{sen}(1)}{2} \right) = 2\pi \text{sen}(1)i.$$

c) (1 punto) Para  $f(z) = \frac{e^{1/z}}{2z}$ .

Solución: La función  $f(z)$  presenta su única singularidad en  $z_1 = 0$ , y es de tipo esencial por la aparición del término  $e^{1/z}$ . Para calcular el residuo tenemos entonces que construir la serie de Laurent de  $f(z)$  en el punto  $z = 0$ . Partimos de la serie de la función exponencial

$$e^{\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^n}{n!} = 1 + \omega + \frac{\omega^2}{2} + \frac{\omega^3}{6} + \frac{\omega^4}{24} + \dots$$

y hacemos la sustitución  $\omega = 1/z$  para tener que

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \cdot z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{24z^4} + \dots$$

Entonces

$$f(z) = \frac{e^{1/z}}{2z} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \cdot z^n}}{2z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \cdot 2 \cdot z^{n+1}} = \frac{1}{2z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{4z^3} + \frac{1}{12z^4} + \frac{1}{48z^5} + \dots$$

Entonces  $\text{Res}(f, 0) = 1/2$ , puesto que el residuo es el número que multiplica a la potencia  $z^{-1}$ . Como  $z_1 = 0$  es siempre interior a la curva deducimos que para cualquier valor de  $a > 0$

$$\int_{\gamma} \frac{e^{1/z}}{2z} dz = 2\pi i (\text{Res}(f, 0)) = 2\pi i \frac{1}{2} = \pi i.$$

**4.-** (3 puntos) Utiliza la transformada de Laplace para resolver la ecuación diferencial

$$y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 5 \cos t$$

con condiciones iniciales  $y(0) = 2$  e  $y'(0) = 4$ .

Solución: Llamaremos  $Y(z) = \mathcal{L}[y(t)](z)$ . Son hechos conocidos que

$$\mathcal{L}[y''(t)](z) = z^2 \cdot \mathcal{L}[y(t)](z) - zy(0) - y'(0) = z^2 Y(z) - 2z - 4.$$

$$\mathcal{L}[y'(t)](z) = z \cdot \mathcal{L}[y(t)](z) - y(0) = zY(z) - 2.$$

$$\mathcal{L}[\cos t](z) = \frac{z}{z^2 + 1}.$$

Aplicando estas propiedades en la ecuación diferencial deducimos que

$$(z^2 Y(z) - 2z - 4) + 2(zY(z) - 2) + 2Y(z) = \frac{5z}{z^2 + 1},$$

es decir,

$$(z^2 + 2z + 2)Y(z) - 2z - 4 - 4 = \frac{5z}{z^2 + 1}.$$



Despejamos  $Y(z) = \mathcal{L}[y(t)](z)$ .

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{2z + 4 + 4}{z^2 + 2z + 2} + \frac{5z}{(z^2 + 1)(z^2 + 2z + 2)} = \\ &= \frac{(2z + 8)(z^2 + 1)}{(z^2 + 1)(z^2 + 2z + 2)} + \frac{5z}{(z^2 + 1)(z^2 + 2z + 2)} = \\ &= \frac{2z^3 + 8z^2 + 7z + 8}{(z^2 + 1)(z^2 + 2z + 2)}. \end{aligned}$$

La función  $Y(z)$  tiene cuatro polos simples,  $z_1 = i$ ,  $z_2 = -i$ ,  $z_3 = -1 + i$  y  $z_4 = -1 - i$ . Para hallar la transformada inversa podemos sumar los residuos de la función  $e^{tz}Y(z)$  o realizar una descomposición en fracciones simples, ambas formas de resolver el problema son razonables.

- Por el método de fracciones simples buscaremos coeficientes

$$\frac{2z^3 + 8z^2 + 7z + 8}{(z^2 + 1)(z^2 + 2z + 2)} = \frac{Az + B}{z^2 + 1} + \frac{C(z + 1) + D \cdot 1}{(z + 1)^2 + 1^2}.$$

y sabremos entonces que  $y(t) = A \cos t + B \sin t + Ce^{-t} \cos t + De^{-t} \sin t$ . Igualando numeradores

$$\begin{aligned} 2z^3 + 8z^2 + 7z + 8 &= (Az + B)(z^2 + 2z + 2) + (Cz + C + D)(z^2 + 1) = \\ &= Az^3 + 2Az^2 + 2Az + Bz^2 + 2Bz + 2B + \\ &\quad + Cz^3 + Cz + Cz^2 + C + Dz^2 + D = \\ &= (A + C)z^3 + (2A + B + C + D)z^2 + \\ &\quad + (2A + 2B + C)z + (2B + C + D). \end{aligned}$$

En el sistema resultante

$$A + C = 2$$

$$2A + B + C + D = 8$$

$$2A + 2B + C = 7$$

$$2B + C + D = 8$$

restamos la segunda ecuación a la cuarta y deducimos que  $B = 2A$ . Si restamos la primera a la tercera obtenemos que  $A + 2B = 5$ , y por lo tanto  $A = 1$  y  $B = 2$ . De la primera ecuación despejamos  $C = 1$  y de la última  $D = 3$ . La solución de problema es, por lo tanto,

$$y(t) = \cos t + 2 \sin t + e^{-t} \cos t + 3e^{-t} \sin t.$$

Es sencillo comprobar que la solución es correcta. Derivando

$$\begin{aligned}
 y'(t) &= -\sin t + 2\cos t + (-1+3)e^{-t}\cos t + (-1-3)e^{-t}\sin t = \\
 &= 2\cos t - \sin t + 2e^{-t}\cos t - 4e^{-t}\sin t = \\
 y''(t) &= -2\sin t - \cos t + (-2-4)e^{-t}\cos t + (-2+4)e^{-t}\sin t = \\
 &= -\cos t - 2\sin t - 6e^{-t}\cos t + 2e^{-t}\sin t.
 \end{aligned}$$

Entonces, sustituyendo

$$\begin{aligned}
 y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) &= (-1+4+2)\cos t + (-2-2+4)\sin t + \\
 &\quad + (-6+4+2)e^{-t}\cos t + (2-8+6)e^{-t}\sin t = \\
 &= 5\cos t.
 \end{aligned}$$

Además las condiciones iniciales se cumplen, puesto que  $y(0) = 1 + 2 \cdot 0 + 1 + 3 \cdot 0 = 2$  e  $y'(0) = 2 - 0 + 2 - 4 \cdot 0 = 4$ .

- Para resolver mediante el teorema de los residuos tenemos que aplicar que

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \text{Res}(e^{tz}Y(z), i) + \text{Res}(e^{tz}Y(z), -i) + \\
 &\quad + \text{Res}(e^{tz}Y(z), -1+i) + \text{Res}(e^{tz}Y(z), -1-i).
 \end{aligned}$$

Para calcular el primer residuo tomamos

$$g(z) = (z-i)e^{tz}Y(z) = e^{tz} \frac{(z-i)(2z^3+8z^2+7z+8)}{(z-i)(z+i)(z^2+2z+2)} = e^{tz} \frac{2z^3+8z^2+7z+8}{(z+i)(z^2+2z+2)}$$

y

$$\begin{aligned}
 \text{Res}(e^{tz}Y(z), i) &= g(i) = e^{it} \cdot \frac{2i^3+8i^2+7i+8}{(i+i)(i^2+2i+2)} = \\
 &= e^{it} \cdot \frac{-2i-8+7i+8}{(2i)(-1+2i+2)} = e^{it} \cdot \frac{5i}{(2i)(1+2i)} = \\
 &= e^{it} \cdot \frac{5(1-2i)}{2(1+2i)(1-2i)} = e^{it} \cdot \frac{5(1-2i)}{2(1^2+2^2)} = \\
 &= e^{it} \cdot \frac{1-2i}{2} = e^{it} \cdot \frac{1}{2} + e^{it} \cdot \frac{2}{2i}.
 \end{aligned}$$

Con un procedimiento análogo calculamos el residuo en  $z_2 = -i$ , donde

$$g(z) = (z+i)e^{tz}Y(z) = e^{tz} \frac{(z+i)(2z^3+8z^2+7z+8)}{(z-i)(z+i)(z^2+2z+2)} = e^{tz} \frac{2z^3+8z^2+7z+8}{(z-i)(z^2+2z+2)}$$

y

$$\begin{aligned}
\text{Res}(e^{tz}Y(z), -i) &= g(-i) = e^{-it} \cdot \frac{2(-i)^3 + 8(-i)^2 + 7(-i) + 8}{(-i-i)((-i)^2 + 2(-i) + 2)} = \\
&= e^{-it} \cdot \frac{2i - 8 - 7i + 8}{(-2i)(-1 - 2i + 2)} = e^{-it} \cdot \frac{-5i}{(-2i)(1 - 2i)} = \\
&= e^{-it} \cdot \frac{5(1 + 2i)}{2(1 - 2i)(1 + 2i)} = e^{-it} \cdot \frac{5(1 + 2i)}{2(1^2 + (-2)^2)} = \\
&= e^{-it} \cdot \frac{1 + 2i}{2} = e^{-it} \cdot \frac{1}{2} - e^{-it} \cdot \frac{2}{2i}.
\end{aligned}$$

Para  $z_3 = -1 + i$  la función  $g(z)$  es

$$\begin{aligned}
g(z) &= (z + 1 - i)e^{tz}Y(z) = \\
&= e^{tz} \frac{(z + 1 - i)(2z^3 + 8z^2 + 7z + 8)}{(z^2 + 1)(z + 1 - i)(z + 1 + i)} = \\
&= e^{tz} \frac{2z^3 + 8z^2 + 7z + 8}{(z^2 + 1)(z + 1 + i)}
\end{aligned}$$

Sustituyendo en el punto  $z_3 = -1 + i$ 

$$\begin{aligned}
\text{Res}(e^{tz}Y(z), -1 + i) &= g(-1 + i) = \\
&= e^{(-1+i)t} \cdot \frac{2(-1+i)^3 + 8(-1+i)^2 + 7(-1+i) + 8}{((-1+i)^2 + 1)(-1+i+1+i)} = \\
&= e^{-t}e^{it} \cdot \frac{2(-1+3i+3-i) + 8(1-2i-1) - 7 + 7i + 8}{((-1)^2 - 2i + i^2 + 1)(2i)} = \\
&= e^{-t}e^{it} \cdot \frac{4 + 4i - 16i - 7 + 7i + 8}{(1 - 2i)(2i)} = \\
&= e^{-t}e^{it} \cdot \frac{5 - 5i}{(1 - 2i)(2i)} = e^{-t}e^{it} \cdot \frac{5(1-i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)(2i)} = \\
&= e^{-t}e^{it} \cdot \frac{5(1-i)(1+2i)}{(1^2 + (-2)^2)(2i)} = e^{-t}e^{it} \cdot \frac{(1-i)(1+2i)}{2i} = \\
&= e^{-t}e^{it} \cdot \frac{1 + 2i - i - 2i^2}{2i} = e^{-t}e^{it} \cdot \frac{3 + i}{2i} = \\
&= e^{-t}e^{it} \cdot \frac{1}{2} + e^{-t}e^{it} \cdot \frac{3}{2i}.
\end{aligned}$$

Ya sólo falta un residuo, el correspondiente a  $z_4 = -1 - i$ . En este polo la función  $g(z)$

ha de ser

$$\begin{aligned}
 g(z) &= (z+1+i)e^{tz}Y(z) = \\
 &= e^{tz} \frac{(z+1+i)(2z^3+8z^2+7z+8)}{(z^2+1)(z+1-i)(z+1+i)} = \\
 &= e^{tz} \frac{2z^3+8z^2+7z+8}{(z^2+1)(z+1-i)}.
 \end{aligned}$$

El cuarto residuo buscado es

$$\begin{aligned}
 \text{Res}(e^{tz}Y(z), -1-i) &= g(-1-i) = \\
 &= e^{(-1-i)t} \cdot \frac{2(-1-i)^3+8(-1-i)^2+7(-1-i)+8}{((-1-i)^2+1)(-1-i+1-i)} = \\
 &= e^{-t}e^{-it} \frac{2(-1-3i+3+i)+8(1+2i-1)-7-7i+8}{((-1)^2+2i+(-i)^2+1)(-2i)} = \\
 &= e^{-t}e^{-it} \cdot \frac{4-4i+16i-7-7i+8}{(1+2i)(-2i)} = \\
 &= e^{-t}e^{-it} \cdot \frac{5+5i}{(1+2i)(-2i)} = e^{-t}e^{-it} \cdot \frac{5(1+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)(-2i)} = \\
 &= e^{-t}e^{-it} \cdot \frac{5(1+i)(1-2i)}{(1^2+2^2)(-2i)} = e^{-t}e^{-it} \cdot \frac{(1+i)(1-2i)}{-2i} = \\
 &= e^{-t}e^{-it} \cdot \frac{1-2i+i-2i^2}{-2i} = e^{-t}e^{-it} \cdot \frac{3-i}{-2i} = \\
 &= e^{-t}e^{-it} \cdot \frac{1}{2} - e^{-t}e^{-it} \cdot \frac{3}{2i}.
 \end{aligned}$$

Sumando los cuatro residuos deducimos que la solución de la ecuación diferencial es

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \text{Res}(e^{tz}Y(z), i) + \text{Res}(e^{tz}Y(z), -i) + \\
 &\quad + \text{Res}(e^{tz}Y(z), -1+i) + \text{Res}(e^{tz}Y(z), -1-i) = \\
 &= e^{it} \cdot \frac{1}{2} + e^{it} \cdot \frac{2}{2i} + e^{-it} \cdot \frac{1}{2} - e^{-it} \cdot \frac{2}{2i} + \\
 &\quad + e^{-t}e^{it} \cdot \frac{1}{2} + e^{-t}e^{it} \cdot \frac{3}{2i} + e^{-t}e^{-it} \cdot \frac{1}{2} - e^{-t}e^{-it} \cdot \frac{3}{2i} = \\
 &= \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} + 2\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} + e^{-t}\frac{e^{it}+e^{-it}}{2} + 3e^{-t} \cdot \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \\
 &= \cos t + 2\sin t + e^{-t}\cos t + 3e^{-t}\sin t.
 \end{aligned}$$

Como no podía ser de otra forma, la solución coincide con la que se obtiene mediante la técnica de descomposición en fracciones simples.