

Variable Compleja y Transformadas

I. T. I. Electrónica y Electricidad

17 de septiembre de 2004

1.- (1 punto) Se considera el número complejo

$$\omega = \frac{-3 - 3i}{\sqrt{2}}.$$

Calcula $\bar{\omega}$, $|\omega|$, ω^{17} y $\sqrt[4]{\omega}$.**Solución:**Utilizando la notación $z = a + b \cdot i$, es obvio que $a = b = -3/\sqrt{2}$. Entonces es inmediato que

$$\bar{\omega} = a - b \cdot i = -\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot i,$$

y que

$$|\omega| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(\frac{-3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{-3}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{2} + \frac{9}{2}} = \sqrt{9} = 3.$$

La fórmula

$$\arg(\omega) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{-3/\sqrt{2}}{-3/\sqrt{2}}\right) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

sólo es válida para el primer y el cuarto cuadrante. Como ω está en el tercer cuadrante, tendremos que $\arg(\omega) = \pi/4 - \pi = -3\pi/4$, y por lo tanto puede escribirse en forma exponencial como

$$\omega = |\omega|e^{i\arg(\omega)} = 3 \cdot e^{-3\pi i/4}.$$

A partir de aquí se sigue de manera rápida que

$$\omega^{17} = |\omega|^{17} \cdot e^{17i\arg(\omega)} = 3^{17} \cdot e^{-51\pi i/4} = 3^{17} \cdot e^{-12\pi i} \cdot e^{-3\pi i/4} = 3^{17} \cdot e^{-3\pi i/4}$$

y que las raíces cuartas son

$$\sqrt[4]{\omega} = \begin{cases} \sqrt[4]{|\omega|} \cdot e^{i\arg(\omega)/4} = \sqrt[4]{3} \cdot e^{-3\pi i/16} \\ \sqrt[4]{|\omega|} \cdot e^{i(\arg(\omega)+2\pi)/4} = \sqrt[4]{3} \cdot e^{5\pi i/16} \\ \sqrt[4]{|\omega|} \cdot e^{i(\arg(\omega)+4\pi)/4} = \sqrt[4]{3} \cdot e^{13\pi i/16} \\ \sqrt[4]{|\omega|} \cdot e^{i(\arg(\omega)+6\pi)/4} = \sqrt[4]{3} \cdot e^{21\pi i/16} = \sqrt[4]{3} \cdot e^{-11\pi i/16} \end{cases}$$

2.- (4 puntos) Se considera la función

$$f(z) = z - z^2 + \frac{1}{2z} + \frac{z + 2i}{z^2 + 4}.$$

- a) (1 punto) Halla todas las singularidades y analiza de qué tipo son.
- b) (1 punto) Calcula los residuos en las singularidades.
- c) (1 punto) Calcula la serie de Laurent centrada en $z_0 = 0$.
- d) (1 punto) Calcula

$$\int_{\gamma} f(z) dz,$$

siendo γ la circunferencia centrada en el origen y de radio unidad.

Solución:

a) Como $p(z) = z - z^2$ es un polinomio entonces es entera, luego no presenta ninguna singularidad. El sumando $q(z) = 1/(2z)$ tiene la única singularidad en $z_1 = 0$, mientras que el denominador de $r(z) = (z + 2i)/(z^2 + 4)$ se anula en $z_2 = 2i$ y $z_3 = -2i$. Así pues, las singularidades de $f(z)$ son los puntos $z_1 = 0$, $z_2 = 2i$ y $z_3 = -2i$. Para analizar de qué tipo son factorizamos $z^2 + 4 = (z - 2i)(z + 2i)$ y tendremos que

$$f(z) = z - z^2 + \frac{1}{2z} + \frac{z + 2i}{(z - 2i)(z + 2i)} = z - z^2 + \frac{1/2}{(z - 0)^1} + \frac{1}{(z - 2i)^1}.$$

Es evidente, pues, que tanto $z_1 = 0$ como $z_2 = 2i$ son polos de orden 1. Pero $z_3 = -2i$ ya no anula ningún denominador, puesto que el factor $(z + 2i)$ del denominador se compensó con otro igual en el numerador. Es una singularidad evitable (o, si se prefiere, no es singularidad).

b) Los residuos pueden calcularse de distintas formas. En este caso, al tener ya hecha la descomposición en sumandos simples, lo más cómodo es observar el número que acompaña a cada fracción. Concluimos entonces que $\text{Res}(f, 0) = 1/2$ y que $\text{Res}(f, 2i) = 1$. Al ser $z_3 = -2i$ una singularidad evitable, su residuo vale $\text{Res}(f, -2i) = 0$.

c) Tenemos que desarrollar los sumandos de $f(z)$ en términos de potencias, positivas o negativas, de z . Los términos $p(z) = z - z^2$ y $q(z) = (1/2)z^{-1}$ ya están en la forma que buscamos, y sólo nos falta por desarrollar $r(z) = 1/(z - 2i)$. Para obtener la serie de potencias centrada en $z_1 = 0$ de $r(z)$ buscamos una relación con la serie geométrica.

$$r(z) = \frac{1}{z - 2i} = -\frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{1 - (z/2i)} = -\frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{1 - \omega},$$

haciendo la identificación $\omega = z/(2i)$. Entonces

$$r(z) = -\frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{1 - \omega} = -\frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n = -\frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(2i)^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(2i)^{n+1}}.$$

Sumando todos los términos deducimos que

$$\begin{aligned}
 f(z) &= z - z^2 + \frac{1/2}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(2i)^{n+1}} = \\
 &= \frac{1/2}{z} - \frac{1}{2i} + \left(1 + \frac{1}{(2i)^2}\right) \cdot z + \left(-1 + \frac{1}{(2i)^3}\right) \cdot z^2 - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{z^n}{(2i)^{n+1}} = \\
 &= \frac{1/2}{z} + \frac{i}{2} + \frac{5}{4} \cdot z + \left(-1 - \frac{i}{8}\right) \cdot z^2 + \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+2}} \cdot z^{2n+1} + i \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}} \cdot z^{2n}.
 \end{aligned}$$

d) La circunferencia centrada en el origen y de radio unidad contiene a la singularidad $z_1 = 0$, mientras que $z_2 = 2i$ está fuera (es indiferente que $z_3 = -2i$ esté dentro o fuera, puesto que es singularidad evitable). En virtud del teorema de los residuos

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \cdot \text{Res}(f, 0) = 2\pi i \cdot (1/2) = \pi i.$$

3.- (2 puntos) Sea γ la circunferencia centrada en el origen y de radio $R > 0$. Calcula en función de R la integral

$$\int_{\gamma} \frac{e^{-z}}{z^2(z^2 - 2)} dz.$$

Nota: Hay que descartar que la curva pase por una singularidad

Solución:

El numerador e^{-z} es una función entera, de manera que las singularidades dependerán únicamente del denominador. Al igualar éste a cero obtenemos, de manera trivial, que $z_1 = 0$ es un polo doble, mientras que $z_2 = \sqrt{2}$ y $z_3 = -\sqrt{2}$ son polos simples. calculemos los residuos en los tres casos.

1. Para hallar el residuo en $z_1 = 0$ partimos de

$$\phi_1(z) = z^2 \cdot f(z) = \frac{e^{-z}}{z^2 - 2}.$$

Como $z_1 = 0$ es un polo doble, necesitamos la derivada

$$\phi_1'(z) = \frac{-e^{-z}(z^2 - 2) - e^{-z}2z}{(z^2 - 2)^2}.$$

Entonces

$$\text{Res}(f, 0) = \frac{\phi_1'(0)}{1!} = \frac{-e^{-0}(0^2 - 2) - e^{-0} \cdot 2 \cdot 0}{1! \cdot (0^2 - 2)^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

2. Para el residuo en $z_2 = \sqrt{2}$ sólo hemos de tomar

$$\phi_2(z) = (z - \sqrt{2}) \cdot f(z) = \frac{e^{-z}}{z^2(z + \sqrt{2})}$$

y sustituir

$$\text{Res } (f, \sqrt{2}) = \frac{\phi_2(\sqrt{2})}{0!} = \frac{e^{-\sqrt{2}}}{(\sqrt{2})^2(\sqrt{2} + \sqrt{2})} = \frac{e^{-\sqrt{2}}}{4\sqrt{2}}.$$

3. El residuo en $z_3 = -\sqrt{2}$ se calcula de forma análoga al anterior, así pues

$$\phi_3(z) = (z + \sqrt{2}) \cdot f(z) = \frac{e^{-z}}{z^2(z - \sqrt{2})}$$

y

$$\text{Res } (f, -\sqrt{2}) = \frac{\phi_3(-\sqrt{2})}{0!} = \frac{e^{\sqrt{2}}}{(-\sqrt{2})^2(-\sqrt{2} - \sqrt{2})} = \frac{e^{\sqrt{2}}}{-4\sqrt{2}}.$$

Tenemos que aplicar el teorema de los residuos, para lo que hay que determinar qué singularidades están dentro de la curva y cuales fuera. Distinguimos los casos

- Si $R < \sqrt{2}$, entonces z_2 y z_3 quedan fuera de la curva, y el resultado es

$$\int_{\gamma} \frac{e^{-z}}{z^2(z^2 - 2)} dz = 2\pi i \cdot \text{Res } (f, 0) = 2\pi i \cdot (1/2) = \pi i.$$

- Si $R > \sqrt{2}$, entonces todas las singularidades están dentro de la circunferencia, y por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{e^{-z}}{z^2(z^2 - 2)} dz &= 2\pi i \cdot (\text{Res } (f, 0) + \text{Res } (f, \sqrt{2}) + \text{Res } (f, -\sqrt{2})) \\ &= 2\pi i \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{e^{-\sqrt{2}}}{4\sqrt{2}} + \frac{e^{\sqrt{2}}}{-4\sqrt{2}} \right) = \\ &= 2\pi i \cdot \frac{4 + \sqrt{2}e^{-\sqrt{2}} - \sqrt{2}e^{\sqrt{2}}}{8} = \\ &= \frac{4 + \sqrt{2}e^{-\sqrt{2}} - \sqrt{2}e^{\sqrt{2}}}{4} \cdot \pi \cdot i. \end{aligned}$$

Nota: El caso $R = \sqrt{2}$ no tiene sentido, puesto que las singularidades z_2 y z_3 estarán justamente sobre la curva.

- 4.- (3 puntos)** Resuelve el siguiente problema de condiciones iniciales:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = f(t), \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \end{cases}$$

donde

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t & \text{si } t \in [0, \pi], \\ 0 & \text{si } t > \pi. \end{cases}$$

Solución:

Aplicamos la transformada de Laplace al operador diferencial para deducir que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y'' + 2y' + 5y] &= (z^2 \mathcal{L}[y] - zy(0) - y'(0)) + 2(z \mathcal{L}[y] - y(0)) + 5 \mathcal{L}[y] = \\ &= (z^2 + 2z + 5) \mathcal{L}[y] - 1. \end{aligned}$$

Podríamos integrar directamente para hallar la transformada de $f(t)$, aunque también la podemos escribir en términos de funciones de Heaviside y aplicar traslación. Si denotamos como $h_\pi(t)$ a

$$h_\pi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \pi \\ 1 & \text{si } t \geq \pi \end{cases}$$

la función $f(t)$ se escribirá como

$$f(t) = \operatorname{sen} t \cdot (1 - h_\pi(t)).$$

Su transformada de Laplace será entonces

$$\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[\operatorname{sen} t] - \mathcal{L}[\operatorname{sen} t \cdot h_\pi(t)]$$

Es de sobra conocido que

$$\mathcal{L}[\operatorname{sen} t] = \frac{1}{z^2 + 1},$$

y sólo falta calcular la transformada de la otra parte. Llamando $s = t - \pi$, tendremos que $t = s + \pi$. Hay que reescribir en términos de s , así que

$$\operatorname{sen} t = \operatorname{sen}(s + \pi) = -\operatorname{sen} s = -\operatorname{sen}(t - \pi).$$

Si definimos $g(t) = -\operatorname{sen} t$, tendríamos que $\operatorname{sen} t = g(t - \pi)$. En virtud de uno de los teoremas de traslación

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\operatorname{sen} t \cdot h_\pi(t)] &= \mathcal{L}[g(t - \pi) \cdot h_\pi(t)] = \\ &= e^{-\pi z} \mathcal{L}[g(t)] = \\ &= e^{-\pi z} (\mathcal{L}[-\operatorname{sen} t]) = \\ &= e^{-\pi z} \cdot \frac{-1}{z^2 + 1} \end{aligned}$$

Concluimos entonces que

$$\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[\sin t] - \mathcal{L}[\sin t \cdot h_{\pi}(t)] = \frac{1}{z^2 + 1} + e^{-\pi z} \cdot \frac{1}{z^2 + 1}.$$

Ya estamos en condiciones de deducir la transformada de la solución $y(t)$. De la ecuación

$$(z^2 + 2z + 5)\mathcal{L}[y] - 1 = \frac{1}{z^2 + 1} + e^{-\pi z} \cdot \frac{1}{z^2 + 1}$$

despejamos para deducir que

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{z^2 + 2z + 5} + \frac{1}{(z^2 + 2z + 5)(z^2 + 1)} + e^{-\pi z} \cdot \frac{1}{(z^2 + 2z + 5)(z^2 + 1)}$$

y, por linealidad,

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{z^2 + 2z + 5} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(z^2 + 2z + 5)(z^2 + 1)} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e^{-\pi z}}{(z^2 + 2z + 5)(z^2 + 1)} \right] = \\ &= y_1(t) + y_2(t) + y_3(t). \end{aligned}$$

Para calcular $y_1(t)$ completamos cuadrados en el denominador

$$z^2 + 2z + 5 = (z^2 + 2z + 1) + 4 = (z + 1)^2 + 2^2.$$

Una de las fórmulas estudiadas en clase garantiza que

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{z^2 + 2z + 5} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(z + 1)^2 + 2^2} \right] = \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2}{(z + 1)^2 + 2^2} \right] = \frac{1}{2} e^{-t} \sin(2t).$$

Para calcular $y_2(t)$ realizaremos una descomposición en fracciones simples

$$\frac{1}{(z^2 + 2z + 5)(z^2 + 1)} = \frac{A(z + 1) + 2B}{z^2 + 2z + 5} + \frac{Cz + D}{z^2 + 1}.$$

Las ecuaciones del sistema son

$$A \quad \quad \quad + \quad C \quad \quad \quad = 0$$

$$A + 2B + 2C + D = 0$$

$$A \quad \quad \quad + 5C + 2D = 0$$

$$A + 2B \quad \quad \quad + 5D = 1$$

Si a la tercera le restamos la primera y a la cuarta la segunda tenemos el sistema de dos ecuaciones e incógnitas

$$4C + 2D = 0$$

$$-2C + 4D = 1$$

Sumando a la segunda ecuación la mitad de la primera deducimos que $D = 1/5$, y de aquí $C = -1/10$, $A = 1/10$ y $B = -1/20$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(z^2 + 2z + 5)(z^2 + 1)} \right] = \\ &= \frac{1}{10} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{z + 1}{(z + 1)^2 + 2^2} \right] - \frac{1}{20} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2}{(z + 1)^2 + 2^2} \right] - \\ &\quad - \frac{1}{10} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{z}{z^2 + 1} \right] + \frac{1}{5} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{z^2 + 1} \right] = \\ &= \frac{1}{10} e^{-t} \cos(2t) - \frac{1}{20} e^{-t} \sin(2t) - \frac{1}{10} \cos t + \frac{1}{5} \sin t. \end{aligned}$$

Sólo falta por calcular $y_3(t)$. Por el teorema de traslación ya usado, $y_3(t) = y_2(t - \pi) \cdot h_\pi(t)$, es decir

$$\begin{aligned} y_3(t) &= \left(\frac{1}{10} e^{-(t-\pi)} \cos(2(t-\pi)) - \frac{1}{20} e^{-(t-\pi)} \sin(2(t-\pi)) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{10} \cos(t-\pi) + \frac{1}{5} \sin(t-\pi) \right) \cdot h_\pi(t), \end{aligned}$$

donde la función de Heaviside indica que $y_3(t)$ sólo actúa desde el tiempo $t = \pi$ en adelante. Con las simplificaciones

$$\cos(2(t - \pi)) = \cos(2t - 2\pi) = \cos(2t)$$

$$\sin(2(t - \pi)) = \sin(2t - 2\pi) = \sin(2t)$$

$$\cos(t - \pi) = -\cos t$$

$$\sin(t - \pi) = -\sin t$$

deducimos que

$$y_3(t) = \left(\frac{1}{10} e^{\pi-t} \cos(2t) - \frac{1}{20} e^{\pi-t} \sin(2t) + \frac{1}{10} \cos t - \frac{1}{5} \sin t \right) \cdot h_\pi(t).$$

Entonces

$$\begin{aligned} y(t) &= y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) = \\ &= \frac{1}{2} e^{-t} \sin(2t) + \\ &\quad + \frac{1}{10} e^{-t} \cos(2t) - \frac{1}{20} e^{-t} \sin(2t) - \frac{1}{10} \cos t + \frac{1}{5} \sin t + \\ &\quad + \left(\frac{1}{10} e^{\pi-t} \cos(2t) - \frac{1}{20} e^{\pi-t} \sin(2t) + \frac{1}{10} \cos t - \frac{1}{5} \sin t \right) \cdot h_\pi(t). \end{aligned}$$

Escribiendo la solución por intervalos,

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{10}e^{-t} \cos(2t) + \frac{9}{20}e^{-t} \sin(2t) - \frac{1}{10} \cos t + \frac{1}{5} \sin t, & \text{si } 0 \leq t \leq \pi, \\ \frac{1+e^{\pi}}{10}e^{-t} \cos(2t) + \frac{9-e^{\pi}}{20}e^{-t} \sin(2t) & \text{si } t \geq \pi \end{cases}$$