

Solución del examen de Variable Compleja y Transformadas

I. T. I. Electrónica y Electricidad

29 de enero de 2004

1. Estudia si existe alguna función de variable compleja $f(z)$ entera cuya parte real sea $x^3 - 3xy^2$ y tal que $f(1) = 1$. En caso afirmativo obtén dicha función y exprésala en términos de z .

Solución: Llamamos $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$. Entonces $u(x, y)$ será la parte real de una función entera si se cumple que, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

Calculamos las correspondientes derivadas parciales.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= 3x^2 - 3y^2 & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= -6xy \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) &= 6x & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) &= -6x \end{aligned}$$

Entonces

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 6x - 6x = 0,$$

y concluimos que $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ es la parte real de una función entera, es decir, que existe $v(x, y)$ tal que $f(z) = f(x + i \cdot y) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ es entera. Para hallar la función $v(x, y)$ haremos uso de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, una de las cuales proporciona

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -(-6xy) = 6xy.$$

Entonces

$$v(x, y) = \int \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) dx = \int 6xy dx = 6y \int x dx = 6y \frac{x^2}{2} + \phi(y) = 3x^2 y + \phi(y).$$

Para determinar la función $\phi(y)$ usaremos la otra condición de Cauchy-Riemann,

$$3x^2 + \phi'(y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y^2.$$

Encontramos fácilmente $\phi(y)$, puesto que $\phi'(y) = -3y^2$ y

$$\phi(y) = \int \phi'(y) dy = \int -3y^2 dy = -3 \frac{y^3}{3} + C = -y^3 + C.$$

La función $f(x + i \cdot y)$ ha de ser

$$f(x + i \cdot y) = x^3 - 3xy^2 + i \cdot (3x^2y - y^3 + C).$$

Al utilizar la condición $f(1) = 1$ tendremos que

$$1 + i \cdot 0 = f(1 + i \cdot 0) = 1^3 - 3 \cdot 1 \cdot 0^2 + i \cdot (3 \cdot 1^2 \cdot 0 - 0^3 + C) \implies 1 = 1 + i \cdot C \implies C = 0.$$

Sólo falta identificar la función en términos de z . Como aparecen términos al cubo es razonable pensar en la expresión $(x + i \cdot y)^3$, y entonces

$$\begin{aligned} f(x + i \cdot y) &= x^3 - 3xy^2 + i \cdot (3x^2y - y^3) = \\ &= x^3 + 3x^2(i \cdot y) + 3x(i \cdot y)^2 + (i \cdot y)^3 = \\ &= (x + i \cdot y)^3, \end{aligned}$$

y por lo tanto $f(z) = z^3$.

2. Halla las singularidades, di de qué tipo son, calcula su serie de Laurent alrededor de todas ellas, determina el dominio de convergencia de las series y halla los correspondientes residuos de las funciones

$$a) \frac{\operatorname{sen} z}{z} \quad b) \frac{z}{z^2 + 4} \quad c) \frac{1}{z^2}$$

Solución: a) El único punto “conflictivo” es $z = 0$, que anula el denominador. Sin embargo no va a ser singularidad (o lo que es lo mismo, va a ser singularidad evitable), ya que de la expresión en serie

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \dots$$

se deduce que

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n} = 1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} - \dots,$$

y por lo tanto la serie resultante no tiene potencias negativas de z , luego $z = 0$ no es singularidad. También podríamos haber deducido esto calculando el límite (por L'Hopital)

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z}{1} = \cos 0 = 1 \in \mathbb{C}.$$

Al no haber singularidades, el radio de convergencia es $R = \infty$, con lo que la función es entera, la serie anteriormente calculada es válida $\forall z \in \mathbb{C}$ y el residuo es $\operatorname{Res}(f, 0) = 0$.

b) El denominador claramente se anula en $z = 2 \cdot i$ y $z = -2 \cdot i$, que han de ser polos de orden uno, siendo éstas las únicas singularidades. Para hallar la serie de Laurent haremos una descomposición en fracciones simples

$$\frac{z}{z^2 + 4} = \frac{A}{z - 2 \cdot i} + \frac{B}{z + 2 \cdot i} \implies z = (A + B)z + (2A \cdot i - 2B \cdot i)$$

El sistema de ecuaciones resultante es

$$A + B = 1$$

$$2A \cdot i - 2B \cdot i = 0$$

que tiene trivialmente por como solución $A = B = 1/2$. La serie de Laurent centrada en $z = 2 \cdot i$ es

$$\begin{aligned} \frac{z}{z^2 + 4} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z - 2 \cdot i} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z + 2 \cdot i} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z - 2 \cdot i} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(z - 2 \cdot i) + 4 \cdot i} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z - 2 \cdot i} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4 \cdot i} \cdot \frac{1}{1 - (-(z - 2 \cdot i)/(4 \cdot i))} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z - 2 \cdot i} + \frac{-i}{8} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4 \cdot i)^n} (z - 2 \cdot i)^n = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z - 2 \cdot i} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-i}{8} \cdot \left(\frac{i}{4}\right)^n \cdot (z - 2 \cdot i)^n. \end{aligned}$$

El residuo, como no podía ser de otro modo, coincide con A , es decir $\text{Res}(f, 2 \cdot i) = 1/2$. El radio de convergencia es la distancia entre las dos singularidades, o dicho de otro modo, $R = |2 \cdot i - (-2 \cdot i)| = |4 \cdot i| = 4$, por lo que el dominio de convergencia es el círculo centrado en $z = 2 \cdot i$ y de radio $R = 4$, que puede expresarse como

$$B(2 \cdot i, 4) = \{z \in \mathbb{C} / |z - 2 \cdot i| < 4\}.$$

La serie de Laurent centrada en $z = -2 \cdot i$ es

$$\begin{aligned} \frac{z}{z^2 + 4} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z - 2 \cdot i} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z + 2 \cdot i} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z + 2 \cdot i} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(z + 2 \cdot i) - 4 \cdot i} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z + 2 \cdot i} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-4 \cdot i} \cdot \frac{1}{1 - (z + 2 \cdot i)/(4 \cdot i)} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z + 2 \cdot i} + \frac{i}{8} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4 \cdot i)^n} (z + 2 \cdot i)^n = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z + 2 \cdot i} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i}{8} \cdot \left(\frac{-i}{4}\right)^n \cdot (z + 2 \cdot i)^n. \end{aligned}$$

Ahora el residuo ha de ser $B = \text{Res}(f, -2 \cdot i) = 1/2$. El radio de convergencia vuelve a ser $R = 4$, y ahora el dominio de convergencia de la serie es el círculo centrado en $z = -2 \cdot i$ y de radio $R = 4$, es decir

$$B(-2 \cdot i, 4) = \{z \in \mathbb{C} / |z + 2 \cdot i| < 4\}.$$

c) Es evidente que la única singularidad es $z = 0$, que es un polo de orden dos. La serie de Laurent centrada en $z = 0$ es la propia expresión $1/z^2$, que ha de entenderse como

$$f(z) = \frac{1}{z^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

para los coeficientes $a_n = 0$ para $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 2$ y $a_{-2} = 1$. Además $\text{Res}(f, 0) = a_{-1} = 0$, y el radio de convergencia de la serie es $R = \infty$, al constar la serie de un número finito de términos. Por lo tanto el dominio de convergencia es $\mathbb{C} - \{0\}$.

3. Calcula las integrales siguientes:

a) $\int_{\gamma} \left(\frac{\cos(1/z)}{z} + \frac{1}{z-1} \right) dz$, donde $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{(x^2+4)^2} dx$

Solución: a) Como la curva es cerrada, diferenciable, simple y recorrida en el sentido antihorario podemos aplicar el teorema de los residuos a la función

$$f(z) = \frac{\cos(1/z)}{z} + \frac{1}{z-1},$$

cuyas singularidades aparecen en los puntos $z = 0$ y $z = 1$. Ambas se encuentran en el interior de la curva (es la circunferencia centrada en el origen y de radio dos), así que hemos de hallar ambos residuos. Como la singularidad en $z = 0$ es esencial, construimos la serie de potencias del coseno

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \dots,$$

y de ésta

$$\frac{\cos(1/z)}{z} = z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{-2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{-2n-1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^3} + \frac{1}{24z^5} - \dots$$

El valor que acompaña a la potencia $1/z$ es $a_{-1} = 1$. Del sumando $1/(z-1)$ no se obtiene residuo en el origen (el residuo es igual a cero) ya que su única singularidad es $z = 1$, y entonces

$$\text{Res}(f, 0) = \text{Res}(z^{-1} \cos(1/z), 0) = 1.$$

Para determinar otro residuo podemos olvidarnos del sumando $z^{-1} \cos(1/z)$, ya que $z = 1$ no es una singularidad para él. Como el sumando $1/(z - 1)$ es de hecho una potencia de grado menos uno, deducimos que

$$\text{Res}(f, 0) = \text{Res}(1/(z - 1), 1) = 1.$$

Aplicando el teorema de los residuos

$$\int_{\gamma} \left(\frac{\cos(1/z)}{z} + \frac{1}{z - 1} \right) dz = 2\pi \cdot i \cdot (\text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, 1)) = 4\pi \cdot i.$$

b) La integral impropia pedida es convergente, puesto que $q(x) = (x^2 + 4)^2$ no se anula en \mathbb{R} y es más de un grado superior al numerador $p(x) = x + 1$. Las singularidades de $f(z) = p(z)/q(z)$ son los polos de orden dos $z = 2 \cdot i$ y $z = -2 \cdot i$, interesándonos únicamente la primera, que está en el semiplano superior. A partir de la función

$$g(z) = (z - 2 \cdot i)^2 f(z) = \frac{z + 1}{(z + 2 \cdot i)^2}$$

podemos calcular el residuo, que será $\text{Res}(f, 2 \cdot i) = g'(2 \cdot i)$. Como

$$g'(z) = \frac{1 \cdot (z + 2 \cdot i)^2 - (z + 1) \cdot 2(z + 2 \cdot i)}{(z + 2 \cdot i)^4}$$

deducimos que

$$g'(2 \cdot i) = \frac{(4 \cdot i)^2 - (1 + 2 \cdot i) \cdot 2(4 \cdot i)}{(4 \cdot i)^4} = \frac{-8 \cdot i}{256} = \frac{-i}{32}.$$

Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x + 1}{(x^2 + 4)^2} dx = 2\pi \cdot i \cdot \text{Res}(f, 2 \cdot i) = \frac{2\pi \cdot i \cdot (-i)}{32} = \frac{\pi}{16}.$$

4. Resuelve mediante el uso de la Transformada de Laplace la ecuación $y'' + 2y' + y = f(t)$, con las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 0$ y

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in [0, 1) \\ 0 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

Solución: Aplicamos la transformada de Laplace a la ecuación diferencial para deducir que

$$(z^2 \mathcal{L}[y] - zy(0) - y'(0)) + 2(z \mathcal{L}[y] - y(0)) + \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[f]$$

Si denotamos como $h_a(t)$ a la función de Heaviside

$$h_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ 1 & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

la función $f(t)$ se escribirá como $f(t) = t \cdot (h_0(t) - h_1(t)) + 0 \cdot h_1(t) = t \cdot (1 - h_1(t))$. Su transformada de Laplace será entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f] &= \mathcal{L}[t] - \mathcal{L}[t \cdot h_1(t)] = \\ &= \frac{1}{z^2} - \mathcal{L}[(t-1) + 1] \cdot h_1(t) = \\ &= \frac{1}{z^2} - \mathcal{L}[(t-1) \cdot h_1(t)] - \mathcal{L}[h_1(t)] = \\ &= \frac{1}{z^2} - e^{-z} \cdot \frac{1}{z^2} - e^{-z} \cdot \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que las condiciones iniciales son nulas deducimos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y] &= \frac{1}{z^2 + 2z + 1} \cdot \left(\frac{1}{z^2} - e^{-z} \cdot \frac{1}{z^2} - e^{-z} \cdot \frac{1}{z} \right) = \\ &= \frac{1}{z^2(z^2 + 2z + 1)} + e^{-z} \frac{-1 - z}{z^2(z^2 + 2z + 1)} = \\ &= \frac{1}{z^2(z+1)^2} - e^{-z} \frac{1}{z^2(z+1)} \end{aligned}$$

Descomponemos el primer sumando en fracciones simples

$$\frac{1}{z^2(z+1)^2} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z+1} + \frac{D}{(z+1)^2}$$

lo que lleva a la ecuación

$$Az(z+1)^2 + B(z+1)^2 + Cz^2(z+1) + Dz^2 = 1,$$

es decir,

$$A(z^3 + 2z^2 + z) + B(z^2 + 2z + 1) + C(z^3 + z^2) + Dz^2 = 1.$$

El sistema resultante es

$$A + C = 0$$

$$2A + B + C + D = 0$$

$$A + 2B = 0$$

$$B = 1$$

La solución es $B = 1$, $A = -2$, $C = 2$ y $D = 1$, luego

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2(z+1)^2}\right] &= -2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2}\right] + 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z+1)^2}\right] = \\ &= -2 + t + 2e^{-t} + te^{-t}\end{aligned}$$

Para el segundo término realizamos la descomposición

$$\frac{1}{z^2(z+1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z+1},$$

que tiene como ecuación asociada

$$Az(z+1) + B(z+1) + Cz^2 = 1$$

y como sistema

$$A + C = 0$$

$$A + B = 0$$

$$B = 1$$

La solución es $B = 1$, $A = -1$ y $C = 1$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2(z+1)}\right] &= -\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z+1}\right] = \\ &= -1 + t + e^{-t}\end{aligned}$$

Entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-z}\frac{1}{z^2(z+1)}\right] = (-1 + (t-1) + e^{-(t-1)}) \cdot h_1(t)$$

y entonces

$$y(t) = -2 + t + 2e^{-t} + te^{-t} - (-1 + (t-1) + e^{-(t-1)}) \cdot h_1(t).$$

Realizamos la simplificación en la suma

$$-2 + t + 2e^{-t} + te^{-t} - (-1 + (t-1) + e^{-(t-1)}) = (2-e)e^{-t} + te^{-t}$$

para expresar la solución como

$$y(t) = \begin{cases} t - 2 + (t+2)e^{-t} & \text{si } t \in [0, 1) \\ (t+2-e)e^{-t} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$