



Ingeniero Técnico Industrial  
(Electricidad y Electrónica Industrial)  
Curso 00/01  
Asignatura: “Variable compleja y transformadas”  
9 de febrero del 2001.

### Cuestiones.

1. Calcula la derivada de orden 1234 de la función

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

en el punto  $z_0 = \mathbf{i}$ .

2. Indica de forma razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, siendo  $\gamma$  el segmento que une los puntos  $z_0 = 0$  y  $z_1 = 1 + \mathbf{i}$ :

$$(a) \int_{\gamma} z \, dz = \left. \frac{z^2}{2} \right|_0^{1+\mathbf{i}} = \frac{(1+\mathbf{i})^2}{2} = \mathbf{i}$$

$$(b) \int_{\gamma} \bar{z} \, dz = \left. \frac{(\bar{z})^2}{2} \right|_0^{1+\mathbf{i}} = \frac{(1-\mathbf{i})^2}{2} = -\mathbf{i}$$

$$(c) \int_{\gamma} \cos(z^2) \, dz = \left. \frac{\text{sen}(z^2)}{2} \right|_0^{1+\mathbf{i}} = \frac{\text{sen}(1+\mathbf{i})^2}{2} = \frac{\text{sen } \mathbf{i}}{2}$$

### Problemas.

1. Clasifica las singularidades que presentan las siguientes funciones y calcula el residuo en aquéllas que sean aisladas:

$$(a) \frac{1 - \cos z}{z^2} \quad (b) (z+1)e^{1/z} \quad (c) \frac{z}{\text{sen } z} \quad (d) \frac{z-1}{z^2+1} \quad (f) \frac{\bar{z}}{z+1}$$

2. Calcula las siguientes integrales reales usando el teorema de los residuos.

$$(a) \int_0^{2\pi} \frac{\text{sen}^2(x)}{3 + \cos x} \, dx, \quad (b) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + x + 1}{(x^2 + 1)(x - 1)} \, dx$$

3. Resuelve el siguiente problema de condiciones iniciales ( $\beta > 0$ ):

$$\left. \begin{aligned} y''(t) + \beta^2 y(t) &= \phi(t) \\ y(0) &= 0, \quad y'(0) = 1 \end{aligned} \right\}$$

siendo  $\phi$  la función,

$$\phi(t) = \begin{cases} e^t, & 0 \leq t \leq 1, \\ e, & 1 < t \end{cases}$$

4. Sea  $\gamma_r$  la curva obtenida al recorrer el cuadrado de vértices  $r + ri$ ,  $-r + ri$ ,  $r - ri$  y  $-r - ri$  en sentido positivo o antihorario (ver la Figura 1). Calcula el valor de la integral

$$\int_{\gamma_r} \frac{z^2 + 1}{z^4 - 2z^3 + 5z^2 - 8z + 4} dz$$

teniendo en cuenta los diferentes valores del parámetro  $r > 0$ .

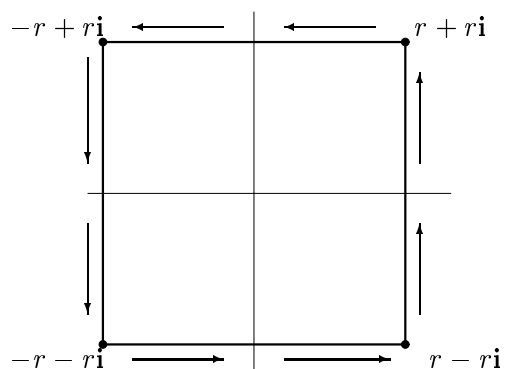


Figura 1: Cuadrado  $\gamma_r$

---

**NOTA:**

- Las dos cuestiones valen 1,25 puntos cada una de ellas.
  - Los problemas, de los que el alumno **deberá elegir tres**, tienen una puntuación de 2,5 puntos.
-