



**Ingeniero Técnico Industrial**  
**(Electricidad y Electrónica Industrial)**  
**Curso 00/01**  
**Asignatura: “Variable compleja y transformadas”**  
**12 de diciembre del 2000.**

### Cuestiones.

- Indica, justificando la respuesta, si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas:
  - Existe una función entera,  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ , de forma que  $f(1+i) \neq f(1-i)$  y  $|f(z)| \leq 1$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$ .
  - Existe una función  $f \in \mathcal{H}(B_1(0))$  de forma que  $f(i/2) \neq 0$  y  $f^{(n)}(0) = 0$ , para cada  $n \geq 0$ .
  - Existe una función  $f$  holomorfa en el conjunto  $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ , tal que

$$f'(z) = \frac{i}{z+i},$$

para cada  $z \in D$ .

- Dada la función  $f(z) = \operatorname{sen} z / (z - \pi)^2$ :
  - Determina sus singularidades. Clasifícalas y calcula el residuo en las mismas.
  - Calcula el valor de la integral de  $f$  a lo largo de la circunferencia de centro  $z_0 = 3$  y radio  $r = 2$  recorrida en el sentido positivo (contrario al de las agujas del reloj).

### Problemas.

- Dada la función

$$f(z) = \frac{\cos z}{z} + \frac{1}{z(z+1)^2}$$

Calcula su serie de Laurent alrededor del punto  $z_0 = 0$  en los anillos:

- (a)  $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ ,                      (b)  $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z|\}$

- Calcula las siguientes integrales:

(a)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)(x-\pi)} dx,$                       (b)  $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 \cos x}{(x^2+2)^2} dx$

3. Resuelve el siguiente problema de Cauchy:

$$\left. \begin{array}{l} y''(t) + \beta y(t) = \phi(t) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{array} \right\}$$

siendo  $\phi$  la función,

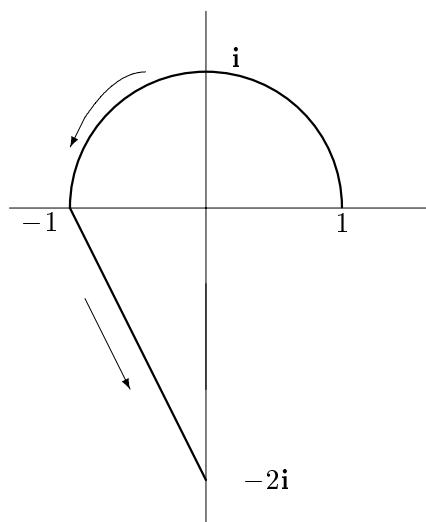
$$\phi(t) = \begin{cases} t, & t \leq 1 \\ 1, & t > 1 \end{cases}$$

y suponiendo que  $\beta > 0$ .

4. Calcula la integral de la función

$$f(z) = \frac{\mathbf{i}}{z} + (\bar{z})^2 \cos(\bar{z})$$

a lo largo de la curva  $\gamma$ , cuyo rango se representa en la figura.



**NOTA:**

- Las dos cuestiones valen 1,25 puntos cada una de ellas.
- Los problemas, de los que el alumno **deberá elegir tres**, tienen una puntuación máxima de 2,5 puntos.