

Examen de “Variable Compleja y Transformadas”
3^{er} Cuatrimestre de Ingeniería Técnica Industrial
(Electricidad y Electrónica Industrial)

10 de diciembre de 1999

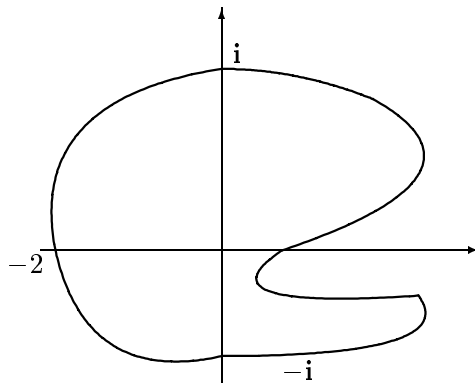
Cuestiones.

1. Sea la función valor absoluto, $f(x) = |x|$, definida de \mathbb{R} en \mathbb{R} . Dado $A \subset \mathbb{C}$ un abierto tal que $0 \in A$, ¿existirá alguna función $F \in \mathcal{H}(A)$ de forma que $F'(x) = f(x)$ para cada $x \in A \cap \mathbb{R}$? ¿Por qué?

2. Calcula el valor de la integral

$$\int_{\gamma} \frac{e^{1/z}}{z\mathbf{i} + 2} dz$$

siendo γ la curva cuyo rango se representa en la figura siguiente.



Problemas.

1. Calcula el desarrollo de Laurent alrededor del cero de la función

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2\mathbf{i})}$$

en los anillos que se indican:

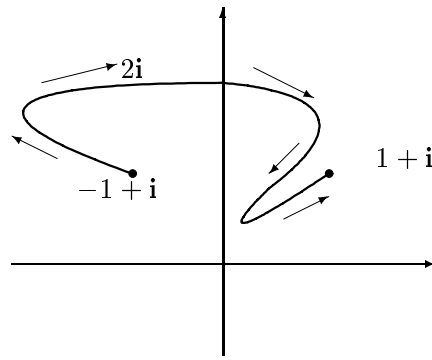
- (a) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$
- (b) $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$
- (c) $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$

2. Calcula:

- (a) El valor de la integral

$$\int_{\gamma} \frac{1}{\mathbf{i}z + 1} dz$$

siendo γ la curva de la figura siguiente, recorrida en el sentido que indican las flechas.



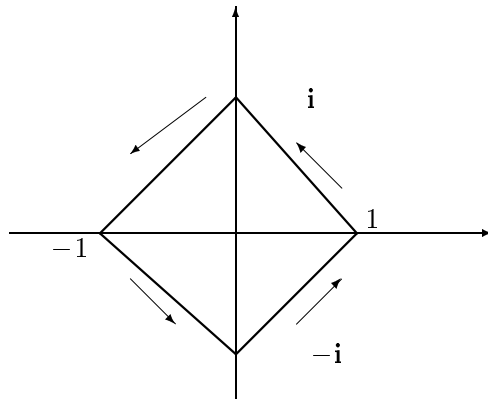
(b) La serie de potencias centrada en $z_0 = 0$ de la función:

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{z}{z+i+1}$$

Indica además su radio de convergencia.

3. Sea la función $f(z) = 1 + e^{\bar{z}}$. Se pide que determines:

- (a) Los puntos de \mathbb{C} en que f es derivable.
- (b) El valor de la integral de la función f a lo largo de la curva de la figura.



4. Resuelve el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} y''(t) + \beta y(t) &= \cos(\omega t) \\ y(0) &= -1, \quad y'(0) = 0 \end{aligned}$$

distinguiendo los casos en que $0 < \beta$ y $0 > \beta$.