

Problemas de Optimización
Hoja 5. Optimización lineal (I)
Planteamientos de problemas lineales - Problemas resueltos

1. Se procesan tres productos a través de tres operaciones diferentes. Los tiempos (en minutos) requeridos por unidad de cada producto, la capacidad diaria de las operaciones (en minutos por día) y el beneficio por unidad vendida de cada producto (en euros) son los dados por la tabla siguiente:

Operación	Tiempo por unidad (minutos)			Capacidad de operación (min. por día)
	Producto 1	Producto 2	Producto 3	
1	1	2	1	430
2	3	0	2	460
3	1	4	0	420
Ganancia por unidad (euros)	3	2	5	

Los tiempos cero indican que el producto no requiere la operación dada. Se supone que todas las unidades producidas se venden. Además los beneficios dados por unidad son valores netos que resultan después que se deducen todos los costos pertinentes. La meta del modelo es determinar la producción diaria óptima para los tres productos que maximice el beneficio.

Solución:

Tomaremos como variables de decisión

$x_1, x_2, x_3 =$ Unidades de los productos 1, 2 y 3 que se van a producir

Restricciones: El tiempo en cada operación *j* no puede superar la capacidad total de operación:

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & +2x_2 & +x_3 & \leq 430 \\ 3x_1 & & +2x_3 & \leq 460 \\ x_1 & 4x_2 & & \leq 420 \end{array}$$

Función objetivo: Maximización del beneficio conseguido por las ganancias en cada unidad del producto.

El problema lineal sería el siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\ \text{Sujeto a} & \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430 \\ & 3x_1 + 2x_3 \leq 460 \\ & x_1 + 4x_2 \leq 420 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

2. Formulación de una dieta para pollos. Suponga que el lote diario requerido de la mezcla son 100 gramos. La dieta debe contener:

Al menos 0.8% pero no más de 1.2% de calcio.

Al menos 22% de proteínas.

A lo más 5% de fibras crudas.

Suponga además, que los principales ingredientes utilizados incluyen maíz, soja y caliza (carbonato de calcio). El contenido nutritivo de estos ingredientes se resume a continuación:

Ingrediente	Gramos de nutriente por cada gramo de ingrediente			Coste (euros) por gramo
	Calcio	Proteína	Fibra	
Caliza	0.380	0.00	0.00	0.02
Maíz	0.001	0.09	0.02	0.04
Soja	0.002	0.50	0.08	0.12

El objetivo es minimizar el coste total de la mezcla de manera que se satisfagan las restricciones físicas y nutritivas.

Solución:

Utilizaremos como variables de decisión x_1, x_2, x_3 las cantidades de caliza, maíz y soja respectivamente que se van a tomar para formar la mezcla de 100 gramos.

Función objetivo: Minimizar el coste total de la mezcla

Restricciones:

Cantidad de mezcla total:

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 100$$

Cantidad de nutrientes en la mezcla

$$\begin{aligned} 0.8 &\leq 0.380x_1 + 0.001x_2 + 0.002x_3 \leq 1.2 \\ &\quad 0.09x_2 + 0.50x_3 \geq 22 \\ &\quad 0.02x_2 + 0.08x_3 \leq 5 \end{aligned}$$

Los ingredientes no pueden superar el 100% de la mezcla

$$x_1, x_2, x_3 \leq 100$$

El problema lineal sería:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && 0.02x_1 + 0.04x_2 + 0.12x_3 \\ &\text{Sujeto a} && \\ &&& x_1 + x_2 + x_3 \geq 100 \\ &0.8 \leq && 0.380x_1 + 0.001x_2 + 0.002x_3 \leq 1.2 \\ &&& 0.09x_2 + 0.50x_3 \geq 22 \\ &&& 0.02x_2 + 0.08x_3 \leq 5 \\ &&& x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ &&& x_1, x_2, x_3 \leq 100 \end{aligned}$$

3. Una fábrica de papel recibe tres pedidos de rollos de papel con los anchos y longitudes indicadas en la siguiente tabla:

Pedido número	Anchura (cm)	Cantidad de rollos
1	50	1000
2	70	3000
3	90	2000

La longitud de los rollos es una cantidad fija l . Los rollos se producen en la fábrica con dos anchos estándar, 100 y 200 centímetros, los cuales hay que recortar a los tamaños especificados por los pedidos. No existe límite sobre la longitud de los rollos estándar ya que para propósitos prácticos los rollos de longitud limitada pueden unirse para proporcionar las longitudes requeridas. El objetivo es determinar el esquema de producción (modelos de corte) que minimice la pérdida por ajuste y satisfaga la demanda dada.

Solución:

Enumeramos los diferentes patrones de corte, T_i , como un vector $T_i = (a_i, b_i, c_i), s_i$, donde a_i, b_i y c_i indican respectivamente el número de cortes de 50, 70 y 90 centímetros de ancho, y s_i el sobrante. Por ejemplo un patrón $(2, 0, 0), s = 0$, indica dos cortes de 50 centímetros y un resto de 0 para el rollo de 100 centímetros de ancho. Tendremos los siguientes patrones de corte

Del rollo de 100 centímetros de anchura:

$$T_1 = (2, 0, 0), s_1 = 0$$

$$T_2 = (0, 1, 0), s_2 = 30$$

$$T_3 = (0, 0, 1), s_3 = 10$$

Del rollo de 200 centímetros de anchura:

$$T_4 = (4, 0, 0), s_4 = 0$$

$$T_5 = (2, 1, 0), s_5 = 30$$

$$T_6 = (2, 0, 1), s_6 = 10$$

$$T_7 = (1, 2, 0), s_7 = 10$$

$$T_8 = (0, 1, 1), s_8 = 40$$

$$T_9 = (0, 0, 2), s_9 = 20$$

Donde como se ha comentado antes, los coeficientes s_j indican la pérdida (coste) en cada tipo de corte. Si denominamos x_j la cantidad de cortes del tipo j , el problema se plantea como sigue:

Función objetivo: Minimizar el coste (pérdida de papel) total

$$\text{Minimizar } \sum_{k=1}^9 s_k x_k$$

Restricciones: Las correspondientes a satisfacer la demanda. El número de piezas de longitud 50, 70, y 90 centímetros de ancho, tiene que conseguirse utilizando los patrones de corte anteriores

$$\begin{array}{rcll} \text{Minimizar} & 30x_2 & +10x_3 & +30x_5 +10x_6 +10x_7 +40x_8 +20x_9 \\ \text{Sujeto a} & 2x_1 & & +4x_4 +2x_5 +2x_6 +x_7 & \geq 1000 \\ & & x_2 & +x_5 +2x_7 +x_8 & \geq 3000 \\ & & & x_3 +x_6 +x_8 +x_9 & \geq 2000 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7, & x_8, & x_9 & \geq 0 \end{array}$$

4. Una unidad completa de un cierto producto, consiste de 4 unidades del componente A y 3 unidades del componente B. Los dos componentes (A, B) se fabrican con dos materias primas de las cuales se tienen disponibles 100 y 200 unidades, respectivamente. Están implicados tres departamentos en el proceso de producción y cada departamento utiliza un método diferente para fabricar los componentes. La siguiente tabla da los requisitos de materia prima por pasada de producción y las unidades resultantes de cada componente. El objetivo es determinar el número de pasadas de producción para cada departamento que maximizará el número total de unidades completas del producto final.

Dpto.	Entrada por pasada de producción (unidades)		Salida por pasada de producción (unidades)	
	Mat. prima 1	Mat. prima 2	Componente A	Componente B
1	8	6	7	5
2	5	9	6	9
3	3	8	8	4

Solución:

Tomando como variables de decisión

$$x_j = \text{Número de pasadas de producción del departamento } j$$

Tenemos en primer lugar restricciones en las materias primas

$$\begin{array}{rclcl} 8x_1 & +5x_2 & 3x_3 & \leq & 100 \\ 6x_1 & +9x_2 & +8x_3 & \leq & 200 \end{array}$$

El producto obtenido es

$$\begin{array}{rrrr} 7x_1 & +6x_2 & +8x_3 & \text{Unidades de A} \\ 5x_1 & +9x_2 & +4x_3 & \text{Unidades de B} \end{array}$$

El número máximo de unidades del producto final que se pueden producir

$$\min \left\{ \frac{7x_1 + 6x_2 + 8x_3}{4}, \frac{5x_1 + 9x_2 + 4x_3}{3} \right\}$$

que es el menor entre el número de grupos de 4 elementos de componentes A (se necesitan 4 para hacer un producto) y el número de grupos de 3 elementos de componentes B (ya que se necesitan 3 para terminar el producto).

La formulación del problema sería la siguiente

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & z = \min \left\{ \frac{7x_1 + 6x_2 + 8x_3}{4}, \frac{5x_1 + 9x_2 + 4x_3}{3} \right\} \\ \text{Sujeto a} & \\ & 8x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 100 \\ & 6x_1 + 9x_2 + 8x_3 \leq 200 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Si llamamos

$$u = \min \left\{ \frac{7x_1 + 6x_2 + 8x_3}{4}, \frac{5x_1 + 9x_2 + 4x_3}{3} \right\}$$

Tendremos una nueva variable positiva, y el problema se puede plantear como:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & u \\ \text{Sujeto a} & \\ & u \leq \frac{7x_1 + 6x_2 + 8x_3}{4} \\ & u \leq \frac{5x_1 + 9x_2 + 4x_3}{3} \\ & 8x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 100 \\ & 6x_1 + 9x_2 + 8x_3 \leq 200 \\ & x_1, x_2, x_3, u \geq 0 \end{array}$$

o bien

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & u \\ \text{Sujeto a} & \\ & 4u - 7x_1 - 6x_2 - 8x_3 \leq 0 \\ & 3u - 5x_1 - 9x_2 - 4x_3 \leq 0 \\ & 8x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 100 \\ & 6x_1 + 9x_2 + 8x_3 \leq 200 \\ & u, x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

5. Se procesan cuatro productos en dos máquinas de forma sucesiva. Los tiempos de manufactura en horas por unidad de cada producto se indican a continuación para las dos máquinas

Máquina	Tiempo por unidad (horas)				Coste hora
	Producto 1	Producto 2	Producto 3	Producto 4	
1	2	3	4	2	6
2	3	2	1	2	9

Las horas totales presupuestadas para todos los productos en las máquinas 1 y 2 son 500 y 380. Si el precio de venta por unidad para los productos 1, 2, 3 y 4 es de 45, 40, 35 y 32 euros respectivamente, formular el problema como un modelo de programación lineal para maximizar el beneficio neto total.

Solución:

Utilizamos las siguientes variables de decisión

$$x_j = \text{Número de unidades del producto } j$$

Restricciones: Debido a las horas máximas disponibles en cada máquina tenemos

$$\begin{array}{rrrrr} 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +2x_4 & \leq 500 \\ 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & +2x_4 & \leq 380 \end{array}$$

Objetivo: maximizar las ganancias = ventas - costes

$$\begin{array}{lcl} \text{Beneficios} & = & 45x_1 + 40x_2 + 35x_3 + 32x_4 \\ \text{Costes} & = & 6 * (2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4) + 9 * (3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4) \end{array}$$

El problema quedaría como

$$\begin{array}{lcl} \text{Maximizar} & 6x_1 & +4x_2 +2x_3 +2x_4 \\ \text{Sujeto a} & & \\ & 2x_1 & +3x_2 +4x_3 +2x_4 \leq 500 \\ & 3x_1 & +2x_2 +x_3 +2x_4 \leq 380 \\ & x_1, & x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

6. Una compañía produce dos tipos de sombreros. Cada sombrero del primer tipo requiere el doble de tiempo en mano de obra que el segundo tipo. Si todos los sombreros son solamente del segundo tipo, la compañía puede producir un total de 500 sombreros al día. El mercado limita las ventas diarias del primero y segundo tipo a 150 y 250 sombreros. Suponga que los beneficios por sombrero son 5 euros para el tipo 1 y 3 euros para el tipo 2. Determinar el número de sombreros que deben producirse de cada tipo a fin de maximizar el beneficio.

Solución:

Variables de decisión: x_1, x_2 = Número de sombreros de cada tipo

Restricciones:

$$2x_1 + x_2 \leq 500 \text{ (Cada sombrero de tipo 1 consume el doble de tiempo que de tipo 2)}$$

$$0 \leq x_1 \leq 150$$

$$0 \leq x_2 \leq 250$$

Objetivo: Maximizar beneficios

$$\text{Maximizar } 5x_1 + 3x_2$$

7. Un fabricante produce tres modelos (I, II y III) de un cierto producto, y usa dos tipos de materia prima (A y B), de las cuales se tienen disponibles 2000 y 3000 unidades, respectivamente. Los requisitos de materia prima por unidad de los tres modelos vienen dados por la tabla siguiente:

Materia Prima	Requisitos por unidad de modelo dado		
	Modelo I	Modelo II	Modelo III
A	2	3	5
B	4	2	7

El tiempo de mano de obra para cada unidad del modelo I es dos veces el del modelo II y tres veces el del modelo III. La fuerza laboral completa de la fábrica puede producir el equivalente de 700 unidades del modelo I. Una encuesta de mercado indica que la demanda mínima de los tres modelos es 200, 250 y 150 unidades respectivamente. Sin embargo, las relaciones del número de unidades producidas deben ser igual a 3:2:5. Suponga que los beneficios por unidad de los modelos I, II y III son 30, 20 y 50 euros. Formular el problema como un modelo de programación lineal a fin de determinar el número de unidades de cada producto que maximicen el beneficio.

Solución:

Elegimos como variables de decisión

$$x_j = \text{Número de unidades de cada modelo}$$

Restricciones

De materia prima

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\leq 2000 \\ 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 &\leq 3000 \end{aligned}$$

De tiempo:

Sea λ = el tiempo requerido para producir una unidad del modelo I. De aquí se deduce que $\frac{\lambda}{2}$ es el requerido para el modelo II y $\frac{\lambda}{3}$ para el modelo III. Luego

$$x_1\lambda + x_2\frac{\lambda}{2} + x_3\frac{\lambda}{3} \leq 700\lambda$$

y eliminando λ

$$6x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 4200$$

De la relación 3:2:5

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{3} &= \frac{x_2}{2} \iff 2x_1 - 3x_2 = 0 \\ \frac{x_1}{3} &= \frac{x_3}{5} \iff 5x_1 - 3x_3 = 0 \end{aligned}$$

Debido a la demanda mínima

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 200 \\ x_2 &\geq 250 \\ x_3 &\geq 150 \end{aligned}$$

El planteamiento del modelo queda como sigue

$$\begin{array}{llll} \text{Maximizar} & 30x_1 & +20x_2 & +50x_3 \\ \text{Sujeto a} & & & \\ & 2x_1 & +3x_2 & +5x_3 \leq 2000 \\ & 4x_1 & +2x_2 & +7x_3 \leq 3000 \\ & 6x_1 & +3x_2 & +2x_3 \leq 4200 \\ & 2x_1 & -3x_2 & = 0 \\ & 5x_1 & -3x_3 & = 0 \\ & x_1 \geq 200, & x_2 \geq 250, & x_3 \geq 150 \end{array}$$

8. Un empresario tiene la opción de invertir su dinero en dos planes. El plan A garantiza que cada euro invertido proporciona 1.4 euros dentro de un año, mientras que el plan B garantiza que cada euro invertido dará 1.6 euros dentro de dos años. En el plan B se permite únicamente las inversiones para periodos que sean múltiplos de dos años. ¿Cómo se deberán invertir 60000 euros a fin de maximizar las ganancias al final de tres años?. Formule el problema como un modelo de programación lineal.

Solución:

Variables de decisión: Cantidades invertidas en los planes A y B al comenzar el primer, segundo y tercer año.

	Plan A	Plan B
año 1	x_1	y_1
año 2	x_2	y_2
año 3	x_3	—

No debemos invertir nada al comienzo del tercer año en el plan B porque no nos lo devolverán con sus beneficios hasta el final del cuarto año.

Restricciones

Primer Año	$x_1 + y_1 = 60000$	Invertimos todo el dinero porque el que no invertimos no produce nada
Segundo Año	$x_2 + y_2 = 1.4x_1$	
Tercer Año	$x_3 = 1.4x_2 + 1.6y_1$	

Objetivo: Maximizar el capital del que se dispone al final del tercer año

$$\text{Maximizar } 1.4x_3 + 1.6y_2$$

Formulación del modelo:

$$\begin{array}{llllll} \text{Maximizar} & 1.4x_3 & +1.6y_2 & & & \\ \text{Sujeto a} & & & & & \\ & x_1 & +y_1 & & & = 60000 \\ & -1.4x_1 & & +x_2 & +y_2 & = 0 \\ & & -1.6y_1 & -1.4x_2 & & x_3 = 0 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & y_1, & y_2 \geq 0 \end{array}$$

9. Para una cafetería que está abierta las 24 horas del día se requieren los siguientes camareros

Periodo	Horas del día	Número mínimo de camareros
1	2-6	4
2	6-10	8
3	10-14	10
4	14-18	7
5	18-22	12
6	22-2	4

Cada camarero trabaja 8 horas consecutivas por día. El objetivo es encontrar el menor número de camareros necesario para cumplir los requisitos anteriores. Formule el problema como un modelo de programación lineal.

Solución:

Variables de decisión:

x_j = Número de camareros que se incorporan a trabajar al comenzar el periodo j

Restricciones: Necesidades de servicio

$$\begin{array}{llllll} x_1 & & & & & \geq 4 \\ x_1 & +x_2 & & & & \geq 8 \\ & x_2 & +x_3 & & & \geq 10 \\ & & x_3 & +x_4 & & \geq 7 \\ & & & x_4 & +x_5 & \geq 12 \\ & & & & x_5 & +x_6 \geq 4 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 \geq 0 \end{array}$$

Función objetivo: Minimizar camareros

$$\text{Minimizar } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

Al realizar este planteamiento se supone que el plan a seguir comienza a las 0 horas y no se ha tenido en cuenta el día anterior.

0. Suponga que el número mínimo de autobuses requerido en la i -ésima hora del día es b_i y que cada autobús trabaja 6 horas consecutivas. Si ahora suponemos que en caso de que el número de autobuses en el periodo i exceda del mínimo requerido b_i se incurre en un costo por exceso c_i (por autobús y hora). Formule el problema como un modelo de programación lineal de tal manera que se minimice el coste total por exceso originado.

Solución:

Variables de decisión:

x_j = Número de autobuses que se incorporan a la línea a la hora j

$$\begin{array}{rcl}
x_1 & +x_{20} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} & \geq b_1 \\
x_1 + x_2 & +x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} & \geq b_2 \\
x_1 + x_2 + x_3 & +x_{22} + x_{23} + x_{24} & \geq b_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 & & \geq b_6 \\
x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 & & \geq b_7 \\
\vdots & & \vdots \\
x_j & x_{19} + x_{20} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} & \geq b_{24}
\end{array}$$

Si llamamos

$$y_i = b_i - \{x_j\}_i$$

donde $\{x_j\}_i$ es el conjunto de variables de decisión que constituyen la restricción i , es decir, y_i , es la variable de exceso o número de autobuses excedentes en la hora i -ésima. El problema resulta

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \sum_{i=1}^{24} c_i y_i \\ \text{Sujeto a} & \\ & x_1 + x_{20} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = b_1 \\ & x_1 + x_2 + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = b_2 \\ & \vdots \\ & x_{19} + x_{20} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = b_{24} \\ & x_i \geq 0; y_i \geq 0 \end{array}$$

1. Un jugador invierte en un juego que requiere dividir su dinero entre cuatro elecciones diferentes. El juego tiene tres resultados. La siguiente tabla da la ganancia o pérdida correspondiente a los tres resultados por cada euro depositada en cada una de las cuatro elecciones

Resultado	Ganancia (o pérdida) por euro depositado en la elección dada			
	1	2	3	4
1	-8	4	-7	15
2	5	-3	9	4
3	3	-9	10	-8

Suponga que el jugador tiene un total de 500 euros, con los cuales puede jugar únicamente una vez. El resultado exacto del juego no se conoce a priori, y a la vista de esta incertidumbre el jugador decide hacer la asignación que maximice su mínimo rendimiento. Formule el problema como un modelo de programación lineal.

NOTA: La interpretación de la tabla es la siguiente, por ejemplo si el resultado es 1 y el jugador realizó la elección 1 pierde -3 euros, mientras que si el resultado es 1 y la elección fue la 2 entonces gana 2 euros.

Solución:

Variables de decisión

$x_j =$ Cantidad de dinero que se invierte en la elección j

Restricciones

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 500 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 & > & 0 \end{array}$$

Función objetivo:

$$\max \left\{ \min \left\{ \begin{array}{c} -3x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 15x_4 \\ 5x_1 - 3x_2 + 9x_3 + 4x_2 \\ 3x_1 - 9x_2 + 10x_3 - 8x_4 \end{array} \right\} \right\}$$

Si llamamos y a ese mínimo, se tendrá

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & y \\ \text{Sujeto a} & \\ & y \leq -3x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 15x_4 \\ & y \leq 5x_1 - 3x_2 + 9x_3 + 4x_4 \\ & y \leq 3x_1 - 9x_2 + 10x_3 - 8x_4 \\ & 500 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Haciendo $y = y_1 - y_2$ con $y_1, y_2 \geq 0$ se tendrá

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & y_1 - y_2 \\ \text{Sujeto a} & \\ & y_1 - y_2 + 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 - 15x_4 \leq 0 \\ & y_1 - y_2 - 5x_1 + 3x_2 - 9x_3 - 4x_4 \leq 0 \\ & y_1 - y_2 - 3x_1 + 9x_2 - 10x_3 + 8x_4 \leq 0 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 500 \\ & y_1, y_2, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

2. Cierta corporación tiene tres plantas sucursales con capacidad de producción en exceso. Las tres plantas tienen los elementos necesarios como para producir determinado producto y el gerente ha decidido usar parte de la capacidad de producción en exceso con tal fin. Este producto puede hacerse en tres tamaños: grande, mediano y pequeño; que dan como resultado una utilidad unitaria neta de 90, 75 y 60 euros, respectivamente. Las plantas 1, 2 y 3 tienen capacidad de mano de obra y equipo en exceso como para producir 750, 900 y 450 unidades por día de este producto, respectivamente, sin importar el tamaño o la combinación de tamaños que se aplique. Sin embargo, el espacio de almacenamiento disponible para productos en proceso también impone una limitación sobre las tasas de producción. Las plantas 1, 2 y 3 tienen 1300, 1200 y 500 metros cuadrados de espacio de almacenamiento disponible para productos en proceso, para un día de producción de este artículo. Cada unidad de los tamaños grande, mediano y pequeño producidos por día requiere de 2, 1.5 y 1.2 metros cuadrados respectivamente.

Los pronósticos de ventas indican que pueden venderse al día 900, 1200 y 750 unidades de los tamaños grande, medio y pequeño respectivamente.

Con el fin de mantener una carga uniforme de trabajo entre las plantas y conservar cierta flexibilidad, el gerente ha decidido que la producción adicional asignada a cada planta debe usar el mismo porcentaje de la capacidad de mano de obra y equipo en exceso.

El gerente desea saber cuánto debe producirse de cada uno de los tamaños en cada una de las plantas para maximizar la utilidad.

Formular un modelo de programación lineal para este problema.

Solución:

Tablas características del producto

	Producto		
	Grande	Mediano	Pequeño
utilidad/unidad	90	75	60
espacio/unidad	2	1.5	1.2
máximo de ventas	900	1200	750

Tabla Producción de cada planta

	Planta		
	1	2	3
Capacidad de Producción	750	900	400
Espacio de Almacenamiento	1300	1200	500
Unidades tamaño Grande	g_1	g_2	g_3
Unidades tamaño Mediano	m_1	m_2	m_3
Unidades tamaño Pequeño	p_1	p_2	p_3

Planteamiento del problema

Maximizar $90(g_1 + g_2 + g_3) + 75(m_1 + m_2 + m_3) + 60(p_1 + p_2 + p_3)$

Sujeto a

$$\left. \begin{array}{l} g_1 + m_1 + p_1 \leq 750 \\ g_2 + m_2 + p_2 \leq 900 \\ g_3 + m_3 + p_3 \leq 4000 \end{array} \right\} \text{Capacidad de producción}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2g_1 + 1.5m_1 + 1.2p_1 \leq 1300 \\ 2g_2 + 1.5m_2 + 1.2p_2 \leq 1200 \\ 2g_3 + 1.5m_3 + 1.2p_3 \leq 500 \end{array} \right\} \text{Capacidad de almacenamiento}$$

$$\left. \begin{array}{l} g_1 + g_2 + g_3 \leq 900 \\ m_1 + m_2 + m_3 \leq 1200 \\ p_1 + p_2 + p_3 \leq 750 \end{array} \right\} \text{Restricciones en las ventas}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{g_1 + m_1 + p_1}{750} = \frac{g_2 + m_2 + p_2}{900} \\ \frac{g_1 + m_1 + p_1}{750} = \frac{g_3 + m_3 + p_3}{450} \end{array} \right\} \text{Proporcionalidad capacidad excedente usada}$$

$$g_i, m_i, p_i \geq 0 \} \text{Restricciones de no negatividad}$$

Silvestre Paredes