



Problemas de Optimización Hoja 8 - Métodos Variacionales - Soluciones

NOTA: En todos los problemas se aplicarán la ecuación de Euler-Lagrange

$$f_y = \frac{d}{dx} f_{y'}$$

siendo

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$f_{y'} = \frac{\partial f}{\partial y'}$$

es decir, estamos calculando las derivadas parciales de f respecto a y e y' .

Mientras que

$$\frac{d}{dx} f_{y'} = \frac{\partial f_{y'}}{\partial x} + \frac{\partial f_{y'}}{\partial y} y' + \frac{\partial f_{y'}}{\partial y'} y''$$

es la diferencial de $f_{y'}$ respecto a x .

En general, salvo casos particulares, tendremos una ecuación diferencial de segundo orden que al integrar proporcionará 2 constantes. El valor de estas constantes se podrá obtener bien mediante las condiciones iniciales en caso de extremos fijos o bien mediante las ecuaciones

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y'} \right|_{x=a} = 0 \quad \text{y/o} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y'} \right|_{x=b} = 0$$

según sea uno de los extremos libres o ambos.

1. **Sabiendo que la longitud de una curva que une dos puntos $P = (a, A)$ y $Q = (b, B)$ viene dada por la integral**

$$L(y) = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$$

demuestra que la curva que une P con Q con menor longitud es la línea recta que los une.

Solución:

$$f_y = 0$$

$$f_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}$$

$$\frac{d}{dx} f_{y'} = \frac{d}{dx} \left[\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right] = \frac{y'' \sqrt{1 + (y')^2} - y' \frac{y' y''}{\sqrt{1 + (y')^2}}}{\left(\sqrt{1 + (y')^2} \right)^2} = \frac{y'' \left(1 + (y')^2 \right) - (y')^2 y''}{\left(\sqrt{1 + (y')^2} \right)^2 \sqrt{1 + (y')^2}}$$

y simplificando

$$\frac{d}{dx} f_{y'} = \frac{y''}{\left(\sqrt{1 + (y')^2} \right)^{3/2}}$$

Utilizando la ecuación de Euler-Lagrange tenemos

$$\frac{d}{dx} f_{y'} = f_y \Leftrightarrow \frac{y''}{\left(\sqrt{1 + (y')^2} \right)^{3/2}} = 0$$

cuya solución es

$$y'' = 0$$

e integrando 2 veces obtenemos

$$y(x) = c_1 x + c_2$$

Aplicamos por último las condiciones iniciales para obtener c_1 y c_2

$$y(a) = A \Leftrightarrow c_1 a + c_2 = A$$

$$y(b) = B \Leftrightarrow c_1 b + c_2 = B$$

para obtener

$$c_1 = \frac{A - B}{a - b}$$

$$c_2 = A - \left(\frac{A - B}{a - b} \right) a$$

2. Resuelve para los distintos valores de a el problema siguiente

$$\text{Minimizar } J(y) = \int_0^1 (y^2 + x^2 y') dx$$

$$y(0) = 0$$

$$y(1) = a$$

Solución:

$$f_y = 2y$$

$$f_{y'} = x^2$$

$$\frac{d}{dx} f_{y'} = 2x$$

De donde

$$f_y = \frac{d}{dx} f_{y'} \Leftrightarrow 2y = 2x$$

y la solución es

$$y(x) = x$$

y al aplicar las condiciones

$$y(0) = 0 \Rightarrow \text{Se cumple}$$

$$y(1) = a \Rightarrow \text{Se cumple cuando } a = 1$$

Por tanto solamente hay solución si $a = 1$, y en este caso la solución es

$$y(x) = x$$

3. Resuelve para los distintos valores de a , el problema siguiente

$$\text{Minimizar } J(y) = \int_0^2 (yy' + [y']^2) dx$$

(a) **Con extremos fijos**

$$y(0) = 1$$

$$y(2) = a$$

(b) **Con extremos variables**

$$y(0) = 1$$

$$y(2) \text{ libre}$$

Solución: En este caso $f(x, y, y') = yy' + [y']^2$ y las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$f_y = y'$$

$$f_{y'} = y + 2y'$$

$$\frac{d}{dx} f_{y'} = y' + 2y''$$

De donde

$$f_y = \frac{d}{dx} f_{y'} \Leftrightarrow y' = y' + 2y'' \Leftrightarrow y'' = 0$$

Integrando 2 veces

$$y'(x) = c_1$$

$$y(x) = c_1 x + c_2$$

El cálculo de c_1 y c_2 se obtiene dependiendo del tipo de extremos de que se trate.

(a) Para extremos fijos sustituiremos directamente las condiciones dadas en la expresión de $y(x)$ para obtener

$$y(0) = 1 \Rightarrow c_1 \cdot 0 + c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = 1$$

$$y(2) = a \Rightarrow c_1 \cdot 2 + c_2 = a \Rightarrow c_1 = \frac{a-1}{2}$$

y la solución es

$$y(x) = \left(\frac{a-1}{2} \right) x + 1$$

(b) Para extremos variables es necesario utilizar la ecuación

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y'} \right|_{x=b} = 0$$

puesto que en este caso es variable el extremo superior.
Por tanto

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y'} \right|_{x=2} = 0 \Leftrightarrow y + 2y'|_{x=2} = 0 \Leftrightarrow y(2) + 2y'(2) = 0 \quad (1)$$

Si ahora tenemos en cuenta la expresión de $y(x)$ e $y'(x)$

$$y(x) = c_1 x + c_2$$

$$y'(x) = c_1$$

tendremos

$$\begin{aligned} y(2) &= 2c_1 + c_2 \\ y'(2) &= c_1 \end{aligned}$$

y la ecuación 1 se transforma en

$$2c_1 + c_2 + 2c_1 = 0 \Rightarrow 4c_1 + c_2 = 0$$

La otra ecuación sale de la condición inicial $y(0) = 1$

$$y(0) = 1 \Rightarrow c_2 = 1$$

y por tanto

$$c_1 = -\frac{c_2}{4} = -\frac{1}{4}$$

La solución es en este caso

$$y(x) = -\frac{x}{4} + 1$$

4. Resuelve, si es posible, el problema siguiente

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } J(y) &= \int_0^1 \frac{1}{2} (y' - x)^2 dx \\ y(0) &= 1, \quad y(1) = 2 \end{aligned}$$

Solución: En este caso

$$f(x, y, y') = \frac{1}{2} (y' - x)^2$$

Planteamos la ecuación de Euler-Lagrange

$$\begin{aligned} f_y &= 0 \\ f_{y'} &= y' - x \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx} f_{y'} = y'' - 1$$

De donde

$$f_y = \frac{d}{dx} f_{y'} \Leftrightarrow 0 = y'' - 1 \Leftrightarrow y'' = 1$$

Integrando 2 veces

$$y' = x + c_1$$

$$y = \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$$

Aplicamos las condiciones iniciales para obtener los valores de c_1 y c_2

$$y(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{0^2}{2} + c_1 \cdot 0 + c_2 = 1 \Leftrightarrow c_2 = 1$$

$$y(1) = 2 \Leftrightarrow \frac{1^2}{2} + c_1 \cdot 1 + c_2 = 2 \Leftrightarrow c_1 = \frac{1}{2}$$

y la solución buscada es

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + 1$$

5. Resuelve el problema siguiente

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } J(y) &= \int_0^1 [2xy - (y')^2 + 3y'y] dx \\ y(0) &= 1 \\ y(1) &= -1 \end{aligned}$$

Solución: En este caso

$$f(x, y, y') = 2xy - (y')^2 + 3y'y$$

y la ecuación de Euler-Lagrange es

$$f_y = 2x + 3y'$$

$$f_{y'} = -2y' + 3y \Rightarrow \frac{d}{dx} f_{y'} = -2y'' + 3y'$$

$$f_y = \frac{d}{dx} f_{y'} \Leftrightarrow 2x + 3y' = -2y'' + 3y' \Leftrightarrow 2x + 2y'' = 0$$

$$2x + 2y'' = 0 \Leftrightarrow y'' = -x \Leftrightarrow y' = \frac{-x^2}{2} + c_1 \Leftrightarrow y = \frac{-x^3}{6} + c_1 x + c_2$$

Como $y(0) = 1$ e $y(1) = -1$, entonces

$$y(0) = c_2 = 1$$

$$y(1) = \frac{-1}{6} + c_1 + c_2 = -1 \Rightarrow c_1 = -\frac{11}{6}$$

y la función extremal es por tanto

$$y(x) = \frac{-x^3}{6} - \frac{11}{6}x + 1$$

6. Resuelve el problema siguiente

$$\text{Minimizar } J(y) = \int_0^1 y^3 + 3x^2 y' dx$$

$$y(0) = 1$$

$$y(1) = 1$$

Solución: En este caso

$$f(x, y, y') = y^3 + 3x^2 y'$$

y la ecuación de Euler es

$$f_y = 3y^2$$

$$f_{y'} = 3x^2 \Rightarrow \frac{d}{dx} f_{y'} = 6x$$

$$f_y = \frac{d}{dx} f_{y'} = 0 \Leftrightarrow 3y^2 = 6x \Leftrightarrow y^2 = 2x$$

Como $y(0) = 1$ e $y(1) = 1$, entonces, $y(0)^2 = 1$ e $y(1)^2 = 1$, pero la función $y^2 = 2x$, no cumple ninguna de esas condiciones, y por tanto no hay extremal que cumpla esas condiciones.

7. Determinar, si existen, los extremales de los siguientes funcionales

(a)

$$\left\{ \begin{array}{l} J_1(y) = \int_1^2 [(y')^2 - 2xy] dx \\ y(1) = 0 \\ y(2) = -1 \end{array} \right.$$

(b)

$$\left\{ \begin{array}{l} J_2(y) = \int_0^1 (3x - y) y dx \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 1 \end{array} \right.$$

Solución: Resolvemos como anteriormente utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0$$

(a) Para el primer funcional $f(x, y, y') = (y')^2 - 2xy$, y por tanto

$$f_y = -2x$$

$$f_{y'} = 2y' \Rightarrow \frac{d}{dx} f_{y'} = 2y''$$

La ecuación de Euler en este caso es

$$f_y = \frac{d}{dx} f_{y'} \Leftrightarrow -2x = 2y'' = 0 \Leftrightarrow y'' = -x$$

Integrando 2 veces obtenemos

$$y' = -\frac{x^2}{2} + c_1$$

$$y = -\frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2$$

Utilizando ahora las condiciones iniciales: $y(1) = 0$; $y(2) = -1$,

$$y(1) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{6} + c_1 + c_2 = 0$$

$$y(2) = -1 \Leftrightarrow -\frac{8}{6} + 2c_1 + c_2 = -1$$

y resolviendo el sistema

$$\begin{array}{l} c_1 = \frac{1}{6} \\ c_2 = 0 \end{array}$$

La función extremal queda como

$$y(x) = \frac{1}{6} x (1 - x^2)$$

(b) Para este apartado $f(x, y, y') = (3x - y) y$

$$f_y = 3x - 2y$$

$$f_{y'} = 0$$

La ecuación de Euler en este caso es

$$3x - 2y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2} x$$

que ya nos da la expresión de $y(x)$. Utilizando ahora las condiciones iniciales: $y(0) = 0$; $y(1) = 1$, se comprueba que para la función anterior

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ y(1) &= \frac{3}{2} \neq 1 \end{aligned}$$

y por tanto no se cumple una de las condiciones iniciales y el problema no tiene solución

8. Resuelve el problema

$$\text{Minimizar } J(x, y) = \int_0^1 [xy' - y^2] dx$$

cuando se cumplen las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ y(1) &= 1 \end{aligned}$$

Solución: En este caso $f(x, y, y') = xy' - y^2$ y por tanto

$$f_y = -2y$$

$$f_{y'} = x \Rightarrow \frac{d}{dx} f_{y'} = 1$$

La ecuación de Euler en este caso es

$$f_y = \frac{d}{dx} f_{y'} \iff -2y = 1 \iff y = -\frac{1}{2}$$

comprobamos que no se cumplen las condiciones iniciales-finales puesto que $y(0) = -\frac{1}{2} \neq 0$, luego el problema no tiene solución.

9. Resuelve el siguiente problema

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } J(y) &= \int_0^4 (xy' - (y')^2) dx \\ y(0) &= 0 \\ y(4) &= 3 \end{aligned}$$

Solución: En este caso $f(x, y, y') = xy' - (y')^2$

$$f_y = 0$$

$$f_{y'} = x - 2y' \Rightarrow \frac{d}{dx} f_{y'} = 1 - 2y''$$

y al aplicar la ecuación de Euler-Lagrange

$$f_y = \frac{d}{dx} f_{y'} \iff 0 = 1 - 2y'' \iff y'' = \frac{1}{2}$$

y al integrar dos veces

$$y'(x) = \frac{1}{2}x + c_1$$

$$y''(x) = \frac{1}{4}x^2 + c_1x + c_2$$

Obtenemos c_1 y c_2 mediante las condiciones iniciales

$$y(0) = 0 \iff c_2 = 0$$

$$y(4) = 3 \iff 4 + 4c_1 = 1 \iff c_1 = -\frac{3}{4}$$

y la solución buscada es

$$y(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x$$

10. Resuelve el siguiente problema

$$\text{Minimizar } J(y) = \int_0^1 \frac{1}{2} \left((y')^2 + y^2 \right) dx$$

para los siguientes casos:

(a) **Extremos fijos:**

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ y(1) &= 1 \end{aligned}$$

(b) **Extremo inferior libre:**

$$\begin{aligned} y(0) &\text{ libre} \\ y(1) &= 1 \end{aligned}$$

(c) **Extremo superior libre**

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ y(1) &\text{ libre} \end{aligned}$$

(d) **Ambos extremos libres**

$$\begin{aligned} y(0) &\text{ libre} \\ y(1) &\text{ libre} \end{aligned}$$

Solución: En este caso $f(x, y, y') = \frac{1}{2}((y')^2 + y^2)$ de donde

$$f_y = y$$

$$f_{y'} = y' \Rightarrow \frac{d}{dx} f_{y'} = y''$$

y al aplicar la ecuación de Euler-Lagrange

$$f_y = \frac{d}{dx} f_{y'} \Leftrightarrow y = y''$$

La ecuación diferencial

$$y'' - y = 0$$

es una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes que se resuelve utilizando las raíces de su polinomio característico

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

que son

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= -1 \end{aligned}$$

La solución general es por tanto

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

Esta expresión es válida para cualquiera de los casos pedidos, puesto que cumple con la ecuación de Euler-Lagrange, que es necesaria para encontrar la solución. Resolveremos a continuación cada caso.

(a) Extremos fijos: $y(0) = 0$, $y(1) = 1$. Directamente utilizamos la función $y(x)$

$$y(0) = c_1 + c_2 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0$$

$$y(1) = c_1 e + c_2 e^{-1} \Rightarrow c_1 e + c_2 e^{-1} = 1$$

Con la primera ecuación

$$c_1 = -c_2$$

que al sustituirlo en la segunda

$$c_1 e - c_1 e^{-1} = 1 \Leftrightarrow c_1 (e - e^{-1}) = 1 \Leftrightarrow 2c_1 \sinh(1) = 1$$

por tanto

$$c_1 = -c_2 = \frac{1}{2 \sinh(1)}$$

(b) Extremo inferior libre: $y(0)$ libre, $y(1) = 1$. En este caso tendremos que para el extremo inferior se debe cumplir la ecuación

$$f_{y'}|_{x=0} = 0$$

es decir

$$y'(0) = 0$$

La expresión para $y'(x)$ la obtenemos a partir de $y(x)$

$$y'(x) = c_1 e^x - c_2 e^{-x}$$

y por tanto

$$y'(0) = c_1 - c_2 \Rightarrow c_1 - c_2 = 0$$

y para la otra ecuación utilizamos la condición en el extremo superior.

$$y(1) = c_1 e + c_2 e^{-1} \Rightarrow c_1 e + c_2 e^{-1} = 1$$

Como

$$c_1 = c_2 \Rightarrow c_1 (e + e^{-1}) = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2 \cosh(1)}$$

(c) Extremo superior libre: $y(0) = 0$, $y(1)$ libre. En este caso tendremos que para el extremo superior se debe cumplir la ecuación

$$f_{y'}|_{x=1} = 0$$

es decir

$$y'(1) = 0$$

La expresión para $y'(x)$ la obtenemos a partir de $y(x)$

$$y'(x) = c_1 e^x - c_2 e^{-x}$$

y por tanto

$$y'(1) = c_1 e - c_2 e^{-1} \Rightarrow c_1 e - c_2 e^{-1} = 0$$

y para la otra ecuación utilizamos la condición en el extremo inferior

$$y(0) = c_1 + c_2 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0$$

Como

$$c_1 = -c_2 \Rightarrow c_1 (e + e^{-1}) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

y la solución es

$$y(x) = 0$$

- (d) Extremos inferior y superior libres: $y(0), y(1)$ libres. En este caso tendremos que emplear la condición de transversalidad para los extremos inferior y superior

$$f_{y'}|_{x=0} = 0$$

$$f_{y'}|_{x=1} = 0$$

y en este caso se debe cumplir

$$y'(0) = 0$$

$$y'(1) = 0$$

es decir

$$y'(0) = c_1 - c_2 \Rightarrow c_1 - c_2 = 0$$

$$y'(1) = c_1 e - c_2 e^{-1} \Rightarrow c_1 e - c_2 e^{-1} = 0$$

que de nuevo nos conduce a la solución

$$c_1 = c_2 = 0$$

- (e) **Resuelve el siguiente problema**

$$\text{Minimizar } J(y) = \int_0^1 \frac{1}{2} \left((y')^2 + y^2 \right) dx$$

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ y(1) &= 1 \end{aligned}$$

$$\int_0^1 y(x) dx = 1$$

Solución: En este caso tenemos un problema con restricciones isoperimétricas o restricciones de igualdad integrales, en este caso hay que construir la función $\tilde{f} = f + \lambda g$, siendo f el integrando del funcional y g el integrando de la restricción integral. Para \tilde{f} se deben cumplir las condiciones de Euler-Lagrange

$$\tilde{f}_y = \frac{d}{dx} \tilde{f}_{y'}$$

Calculamos cada uno de los elementos de la ecuación anterior donde

$$\tilde{f} = \frac{1}{2} \left((y')^2 + y^2 \right) + \lambda y$$

siendo $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\tilde{f}_y = y + \lambda$$

$$\tilde{f}_{y'} = y' \Rightarrow \frac{d}{dx} \tilde{f}_{y'} = y''$$

La ecuación diferencial resultante es

$$y'' - y = \lambda$$

cuya solución es

$$y_g = y_h + y_p$$

siendo y_h la solución de la ecuación homogénea que por el ejercicio anterior es de la forma

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

mientras que y_p es una solución particular, es fácil comprobar que una solución particular es $y_p(x) = -\lambda$. La solución general es

$$y_g(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - \lambda$$

Para el cálculo de c_1 , c_2 y λ , utilizaremos las condiciones inicial, final e integral

$$y_g(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 - \lambda = 0$$

$$y_g(1) = 1 \Rightarrow c_1 e + c_2 e^{-1} - \lambda = 1$$

$$\int_0^1 y(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 (c_1 e^x + c_2 e^{-x} - \lambda) dx = 1$$

Integrando la última de las ecuaciones obtenemos la expresión equivalente

$$c_1 e^x - c_2 e^{-x} - \lambda x \Big|_{x=0}^{x=1} = 1 \Leftrightarrow (c_1 e - c_2 e^{-1} - \lambda) - (c_1 - c_2) = 1$$

En resumen hay que resolver el sistema

$$c_1 + c_2 - \lambda = 0$$

$$c_1 e + c_2 e^{-1} - \lambda = 1$$

$$c_1(e - 1) + c_2(1 - e^{-1}) - \lambda = 1$$

que es un sistema lineal cuya solución es

$$c_1 = \frac{e - 2}{(e - 1)(e - 3)}$$

$$c_2 = \frac{e}{(e - 1)(e - 3)}$$

$$\lambda = \frac{2}{(e - 3)}$$