



Problemas de Optimización Hoja 7 - Optimización lineal (III) Análisis post-óptimo

1. Considera el siguiente problema

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & 2x_1 - 4x_2 \\ \text{Sujeto a} & \begin{array}{l} x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_j \geq 0 \end{array} \end{array}$$

- Construye su problema dual y encuentra su solución óptima.
- Utiliza la *holgura complementaria* para encontrar la solución óptima del problema primal.

2. Considera el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & -2x_1 - 7x_2 - 4x_3 \\ \text{Sujeto a} & \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ x_j \geq 0 \end{array} \end{array}$$

- Construye el problema dual.
- Resuelve el problema primal utilizando el método SIMPLEX. Utiliza los multiplicadores Simplex para calcular la solución del problema dual.

3. Considera el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & -x_1 - 2x_2 - x_3 \\ \text{Sujeto a} & \begin{array}{l} x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 1 \\ 2x_1 - x_3 \leq 1 \\ x_j \geq 0 \end{array} \end{array}$$

- Construye y resuelve su problema dual.
- Resuelve el problema primal con ayuda de la holgura complementaria.

4. Considera el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & 6x_1 + 8x_2 \\ \text{Sujeto a} & \begin{array}{l} 5x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_j \geq 0 \end{array} \end{array}$$

- Construye su dual.
- Resuelve ambos problemas gráficamente e identificar en cada paso la s.f.b. y los multiplicadores Simplex asociados.

5. Considera el siguiente problema

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & -3x_1 - x_2 - 2x_3 \\ \text{Sujeto a} & \begin{array}{l} x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 20 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 10 \\ x_j \geq 0 \end{array} \end{array}$$

Si x_4^h y x_5^h son las variables de holgura para las respectivas restricciones y aplicamos el método Simplex, la tabla óptima final es

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^h	b
x_3	3	0	1	1	1	30
x_2	5	1	0	1	2	40
	8	0	0	3	4	100

- Encuentra el intervalo de valores permitidos para cada c_j sin que cambie la solución óptima.
- Encuentra el intervalo de valores permitidos para cada b_j sin que cambie la solución óptima.

6. Considera el siguiente problema

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & -3x_1 - x_2 - 4x_3 \\ \text{Sujeto a} & \begin{array}{l} 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 25 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 20 \\ x_j \geq 0 \end{array} \end{array}$$

Si x_4^h y x_5^h son las variables de holgura para las respectivas restricciones y aplicamos el método Simplex obtenemos el siguiente sistema equivalente que nos lleva a la solución óptima

$$\begin{array}{ll} x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{3}x_4^h - \frac{1}{5}x_5^h = \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3}x_2 + x_3 - \frac{1}{5}x_4^h + \frac{2}{5}x_5^h = 3 \end{array}$$

- Calcula la s.f.b. óptima, los coeficientes de coste relativo de todas las variables y el valor óptimo.
- Construye su problema dual y calcula su solución óptima a partir de la solución óptima del primal.
- Haz el cambio $c'_2 = -3$ y $A'_2 = (2, 3)^T$ y calcula la nueva solución óptima.
- Introduce la nueva variable $x_6 \geq 0$, con $c_6 = -2$ y $A_6 = (3, 2)^T$ y determina la nueva solución óptima.

7. Considera el siguiente problema

$$\begin{array}{llll} \text{Minimizar} & 5x_1 & -5x_2 & -13x_3 \\ \text{Sujeto a} & -x_1 & +x_2 & +3x_3 \leq 20 \\ & 12x_1 & +4x_2 & +10x_3 \leq 90 \\ & x_j & \geq 0 & \end{array}$$

que tiene como tabla óptima

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^h	b
x_2	-1	1	3	1	0	20
x_5^h	16	0	-2	-4	1	10
	0	0	2	5	0	190

donde x_4^h y x_5^h son las variables de holgura. Estudia cada uno de los siguientes cambios de forma independiente y da la solución óptima del problema modificado en cada caso.

- Cambia b_1 por $b'_1 = 30$
- Cambia b_2 por $b'_2 = 70$
- Cambia (b_1, b_2) por $(b'_1, b'_2) = (10, 100)$
- Cambia c_3 por $c'_3 = 8$
- Cambia \mathbf{A}_1 por $\mathbf{A}_1'^T = (0, 5)$ y c_1 por $c'_1 = 2$
- Cambia \mathbf{A}_2 por $\mathbf{A}_2'^T = (2, 5)$ y c_2 por $c'_2 = -6$
- Introduce una nueva variable x_6 con $\mathbf{A}_6^T = (3, 5)$ y $c_6 = 10$
- Introduce una nueva restricción: $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 50$
- Transforma la segunda restricción en: $10x_1 + 5x_2 + 10x_3 \leq 100$

8. En el problema anterior cambia los coeficientes independientes por $b'^T = (20 + 2\lambda, 90 - \lambda)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. Expresa la solución básica y el valor de la función objetivo correspondiente a la solución óptima original en función de λ . Determina los valores de λ que mantienen a la solución factible.

9. Considera el siguiente problema

$$\begin{array}{llll} \text{Minimizar} & -2x_1 & +x_2 & -x_3 \\ \text{Sujeto a} & 3x_1 & +x_2 & +x_3 \leq 60 \\ & x_1 & -x_2 & +2x_3 \leq 10 \\ & x_1 & +x_2 & -x_3 \leq 20 \\ & x_j & \geq 0 & \end{array}$$

Sean x_4^h , x_5^h y x_6^h las variables de holgura para las respectivas restricciones. Después de aplicar el método simplex, la tabla óptima final es

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^h	x_6^h	b
x_4^h	0	0	1	1	-1	-2	10
x_1	1	0	1/2	0	1/2	1/2	15
x_2	0	1	-3/2	0	-1/2	1/2	5
	0	0	3/2	0	3/2	1/2	25

Estudia y resuelve cada uno de los siguientes cambios de forma independiente en el modelo original.

- Cambios en los coeficientes independientes: $b^T = (60, 10, 20) \Rightarrow b'^T = (70, 20, 10)$
- Cambia la columna \mathbf{A}_1 (los coeficientes de x_1): $\mathbf{A}_1^T = (3, 1, 1)$ y $c_1 = 2 \Rightarrow \mathbf{A}_1'^T = (2, 2, 0)$ y $c'_1 = 1$
- Cambia la columna \mathbf{A}_3 (los coeficientes de x_3): $\mathbf{A}_3^T = (1, 2, -1)$ y $c_3 = 1 \Rightarrow \mathbf{A}_3' = (3, 1, -2)$ y $c'_3 = 2$
- Cambia la función objetivo por $3x_1 - 2x_2 + 3x_3$
- Introduce la nueva restricción $3x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 30$
- Introduce una nueva variable x_8 con coeficientes: $\mathbf{A}_8^T = (-2, 1, 2)$ y $c_8 = -1$

10. Resuelve los problemas lineales paramétricos siguientes:

(a)

$$\begin{array}{llll} \text{Minimizar} & -2x_1 & -x_2 & +3x_3 \\ \text{Sujeto a} & 3x_1 & -x_2 & +x_3 \leq (8 + 8\lambda) \\ & x_1 & +x_2 & +4x_3 \leq (6 + 4\lambda) \\ & 2x_1 & +3x_2 & -x_3 \leq (10 + 8\lambda) \\ & x_j & \geq 0 & \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{llll} \text{Minimizar} & 3\lambda x_1 & +2(1 - \lambda)x_2 & -x_3 \\ \text{Sujeto a} & x_1 & +2x_2 & +3x_3 \leq 5 \\ & 2x_1 & +x_3 & \leq 6 \\ & 3x_1 & +1x_2 & +x_3 \leq 7 \\ & x_j & \geq 0 & \end{array}$$