



Problemas de Optimización Hoja 6. Optimización lineal (II) Planteamientos y Simplex

- Un inversionista puede invertir en las actividades A y B al principio de cada uno de los próximos 5 años. Cada euro invertido en A se transforma en 1.40 euros 2 años después y cada euro invertido en B se transforma en 1.70 euros 3 años después. Además estarán disponibles las actividades C y D para invertir en una única ocasión dentro de los 5 años. Cada euro invertido en C , al principio del año 2 (cuando C está disponible) se transforma en 1.90 euros al final del año 5 y cada euro invertido en D al principio del año 5 (cuando D está disponible) se transforma en 1.30 euros al final de ese año. Si el inversionista cuenta al principio del primer año con 6000 euros, formula un problema lineal que maximice la cantidad de dinero de la que podrá disponer al final del año 5.
- La confederación Sur de Kibbutzim, que agrupa 3 kibbutzim del sur de Israel, está planeando la producción agrícola para el próximo año. Esta producción está limitada, tanto por la superficie de terreno de regadío disponible como por la cantidad de agua disponible para regar. Los datos de cada Kibbutz de la Confederación están en la siguiente tabla:

Kibbutz	terreno disponible en hectáreas (ha)	asignación de agua (m^3)
1	400	600
2	600	800
3	300	375

El tipo de cosecha apropiada para la región incluye remolacha, algodón y sorgo. Las cosechas difieren fundamentalmente en su rendimiento neto esperado por hectárea y en el consumo de agua que precisan. Además, el Ministerio de Agricultura ha establecido una cantidad máxima de hectáreas que la Confederación puede dedicar a estas cosechas. La tabla adjunta muestra esas cantidades.

cosecha	cantidad máxima (ha)	consumo de agua (m^3 /ha)	rendimiento (euros/ha)
Remolacha	600	3	400
Algodón	500	2	300
Sorgo	325	1	100

Los tres kibbutzim están de acuerdo en que cada uno de ellos sembrará la misma proporción de sus tierras disponibles de regadío. Cualquier combinación de estas cosechas se puede sembrar en cualquiera de los kibbutzim. El trabajo al que se enfrenta la oficina de coordinación técnica de la Confederación es determinar

cuántas hectáreas de cada una de las cosechas se deben sembrar en cada kibbutz con el fin de maximizar el rendimiento neto de la Confederación. Formula un problema lineal que resuelva el problema anterior.

- Una familia campesina es propietaria de 125ha de terreno y tiene 40000 euros para invertir. El conjunto de sus miembros puede producir un total de 3500h de mano de obra durante los meses de invierno y 4000h durante los de verano. Estas horas de trabajo se pueden emplear para trabajar en un campo vecino por 6 euros/h en invierno y 7 euros/h en verano.

Los ingresos pueden obtenerse a partir de 3 tipos de cosecha y 2 tipos de animales de granja: vacas y gallinas. Para las cosechas no se necesita inversiones monetarias, pero cada vaca vale 1000 euros y cada gallina 6 euros.

Cada vaca necesita 1.5ha de terreno, 100h de trabajo durante el invierno y 50h durante el verano; el corral disponible sólo permite tener como mucho 32 vacas y cada vaca produce un ingreso anual neto en leche de 2000 euros. Las cifras correspondientes a cada gallina son: nada de terreno, 0.6h de trabajo en invierno y 0.3h en verano con un ingreso neto de 50 euros/año/gallina por la venta de huevos. En el gallinero disponible caben 3000 gallinas.

Las estimaciones de horas de trabajo y beneficio por ha plantada de cada cosecha son:

	Soja	Maiz	Avena
Horas (Invierno)	20	35	10
Horas (Verano)	50	75	40
Ingresos anual neto (euros)	600	900	450

Plantea el problema lineal que determine la superficie que debe sembrar de cada tipo de cosecha, cuántas vacas y cuántas gallinas debe mantener la familia para maximizar sus ingresos netos.

- Acabas de ganar 36000 euros en la lotería y has decidido invertirlos. Dos amigos te ofrecen la oportunidad de participar como socio en sus respectivos negocios. En ambos casos la inversión significa dedicar un poco de tiempo al negocio durante el próximo verano, además de invertir en efectivo. Con el primer amigo, convertirse en socio completo de su negocio significaría invertir 30000 euros y 400h de trabajo siendo la ganancia estimada de 27000 euros. Las cifras correspondientes a la proposición del segundo amigo son 24000 euros de inversión, 500h de trabajo y con la misma ganancia estimada que en el anterior. Sin embargo ambos negocios son flexibles y permiten entrar en el negocio con cualquier fracción de la sociedad (la misma fracción de dinero que de tiempo). En ese caso la ganancia obtenida será la parte proporcional a dicha fracción.

Como andas buscando un trabajo para el próximo verano (600h como máximo), has decidido participar en una o ambas propuestas, con la combinación que maximice su ganancia total estimada. Formula un modelo de programación lineal para este problema.

- La demanda de cierto producto, en número de unidades, durante los próximos 4 meses viene dada en la siguiente tabla:

	Enero	Febrero	Marzo	Abril
Demandas	200	250	300	320

La producción del número de unidades por mes se va a hacer teniendo en cuenta las siguientes premisas:

- Hay un coste de producción uniforme de 600 euros por unidad del producto.
- Debido a los ajustes de la cadena de producción, se incurre en un coste adicional de 30 euros, por cada unidad que se produce de más en un mes que en el anterior y de 18 euros, por cada unidad que se produce de menos en un mes que en el anterior.
- Si alguna unidad producida no se vende en el mismo mes, su almacenamiento durante un mes más supone un gasto de 90 euros.
- Al finalizar el último mes hay que satisfacer la demanda y no debemos tener ninguna unidad sobrante.

Plantea el problema de programación lineal cuya solución permita planificar la producción de los 4 próximos meses minimizando los costes.

- Alfredo tiene 2200 euros para invertir durante los siguientes 5 años. Al principio de cada año puede invertir su dinero en depósitos de plazo fijo de 1 o 2 años. El banco paga el 8% de interés en depósitos a plazo fijo de un año y el 17% en depósitos a plazo fijo de 2 años. Además, al principio del 2º año, la compañía West World Limited ofrecerá certificados a 3 años. Estos certificados tendrán una ganancia del 27%. Si Alfredo reinvierte todo su dinero disponible cada año, formula un programa lineal que le muestre como maximizar su ganancia total al final del quinto año.
- Se procesan 2 productos pasando secuencialmente a través de 2 máquinas diferentes. El tiempo disponible, para los 2 productos, en cada una de las máquinas está limitado a 8h diarias, pero se puede sobrepasar este límite en 4h mediante la utilización de horas extras. Cada hora extra supondrá un sobrecargo adicional en coste de 50 euros por hora. Las razones de producción para los 2 productos junto con las ganancias por unidad se resumen en la siguiente tabla. Determina mediante un problema lineal el nivel de producción para cada producto que maximice la ganancia neta.

Máquina	Razón de producción (unidades/hora)	
	Producto 1	Producto 2
1	5	6
2	4	8
Ganancia por unidad de producto	60	40

- Un avión de carga tiene 3 compartimentos para almacenar: delantero, central y trasero. Estos compartimentos tienen un límite de capacidad, tanto en peso como en espacio, cuyos valores se dan a continuación:

Compartimento	Capacidad de peso (Toneladas)	Capacidad de espacio (centímetros cúbicos)
Delantero	12	7000
Central	18	9000
Trasero	10	5000

Para mantener el equilibrio del avión, el peso de la carga en los respectivos compartimentos debe ser proporcional a su capacidad de peso.

Se tienen ofertas de los siguientes envíos en un próximo vuelo.

Carga	Peso (Toneladas)	Volumen (cc/Tonelada)	Ganancia (Euros/Tonelada)
1	20	500	320
2	16	700	400
3	25	600	360
4	15	400	290

Si se puede aceptar cualquier fracción de estas cargas, determina qué cantidad de cada carga debe aceptarse y la distribución en los compartimentos para maximizar la ganancia.

- Tres excavadoras son capaces de proporcionar respectivamente una extracción máxima de 200, 500 y 300 toneladas diarias. La producción diaria es almacenada en primer lugar en un local de una capacidad máxima de $1800m^3$, siendo los volúmenes específicos respectivos de las tres categorías de productos 1.8, 2 y $2.2m^3/TM$. Al día siguiente los minerales se lavan, fluyendo del lavadero 80, 90 y 100 toneladas por hora, respectivamente, limitándose su trabajo diario a 10 horas. Por último, los beneficios unitarios son respectivamente 40, 50 y 60 euros. Formula el problema lineal para encontrar el mejor reparto de las cantidades a extraer.
- Una fábrica compuesta por tres talleres A, B y C fabrica 3 productos P_1 , P_2 y P_3 . Los talleres tienen limitadas las horas de trabajo a 2766, 642 y 416 horas mensuales respectivamente. El producto P_1 es fabricado según el proceso

Talleres sucesivos	A	C	B	C
Producción horaria	0.357	30	12	15

El producto P_2 es fabricado según el proceso

Talleres sucesivos	A	B	C
Producción horaria	0.281	12	15

El producto P_3 es fabricado según el proceso

Talleres sucesivos	B	C
Producción horaria	9.6	12

Si las demandas mensuales para los 3 productos son 250, 1250 y 1500 unidades y los beneficios unitarios son respectivamente 350, 250 y 400 euros. Encuentra el programa de producción que asegure una ganancia máxima.

11. Un fabricante desea planificar la producción de 2 artículos A y B para los meses de Marzo, Abril, Mayo y Junio. Las demandas que hay que satisfacer, así como la producción máxima de cada artículo vienen dadas por la siguiente tabla

	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Producción
Artículo A	400	500	600	400	500
Artículo B	600	600	700	600	650

El inventario de los artículos A y B al final de Febrero es de 100 y 150 unidades respectivamente. El coste de inventario de los artículos A y B es de 1 y 1.50 euros respectivamente por unidad de artículo almacenado al final de cada mes.

Por limitaciones de espacio, la cantidad almacenada no debe exceder de 250 unidades cada mes.

Si al final del mes de Junio debe haber al menos 150 unidades del artículo B . Formula el problema lineal que minimice el coste total del inventario.

12. Una empresa tiene la posibilidad de fabricar con una máquina determinada, trabajando 45 horas por semana, 3 productos diferentes A , B y C . Los rendimientos de la máquina, así como el beneficio y la demanda máxima para cada producto vienen dados en la tabla

	Rendimiento Unidades/Hora	Beneficio Neto (Euros)	Demanda Máxima
A	50	4	1000
B	25	12	500
C	75	3	1500

Plantea el problema que maximice el beneficio.

13. Una firma comercial fabrica 2 tipos de mermelada. Para la mermelada de fresa utiliza la fruta y el azúcar en proporciones de 2 a 3 y para la mermelada de manzana la proporción es de 1 a 1. Se dispone de 1000kg de fresas, de 1500kg de manzanas y de 3000kg de azúcar. La mermelada se elabora en una caldera y posteriormente es embotellada. Se dispone de 2 calderas y 2 embotelladoras. Las horas necesarias para fabricar un kilo de mermelada, las horas disponibles para cada máquina y el coste por hora se dan a continuación:

	Fresa	Manzana	Horas Disponibles	Coste por Hora
Caldera	A 0.6	0.9	1000	8
	B 0.9	0.9	5000	4
Embotelladora	A 0.01	0.02	100	90
	B 0.04	0.03	50	40

Si el precio de venta es de 1 euro/kg la mermelada de fresa y 0.72 euros/kg la de manzana. ¿Qué cantidades de cada tipo de mermelada hay que producir para maximizar el beneficio?.

14. Una fábrica de automóviles y camiones consta de 4 departamentos:

- 1) Estampado de planchas metálicas
- 2) Armado de motores
- 3) Montaje de automóviles
- 4) Montaje de camiones

El departamento 1 puede estampar, por mes, planchas necesarias para 25000 coches o 35000 camiones, o las correspondientes combinaciones de ambos. El departamento 2 puede armar, por mes, 33333 motores de coche o 16667 motores de camión o las correspondientes combinaciones de ambos. El departamento 3 puede montar y terminar 22500 coches y el 4, 15000 camiones. Si cada coche deja un beneficio de 2000 euros y cada camión de 1500 euros. ¿Cuántos coches y camiones deben producirse para maximizar el beneficio?.

15. Resuelve el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & 2x_1 + 3x_2 - x_3 \\ \text{Sujeto a} & \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 5 \\ 6x_1 + x_2 \geq 4 \\ -5x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \end{array}$$

16. Resuelve el siguiente problema el método de la M-grande y el método de las dos fases

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & 8x_1 + 6x_2 - 11x_3 \\ \text{Sujeto a} & \begin{array}{l} x_1 - x_2 - 2x_3 \geq 6 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \end{array}$$

17. Resolver los siguientes problemas de programación lineal

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \\ \text{Sujeto a} & \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ x_1 + x_2 \geq 6 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 7 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \end{array}$$

$$a) -x_1 + 5x_2 + x_3 = 2 \quad \text{y} \quad b) -x_1 + 5x_2 + x_3 = 16$$

18. Resuelve el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & 2x_1 + x_2 - x_3 \\ \text{Sujeto a} & \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 4 \\ 0 \leq x_j \leq j \end{array} \end{array}$$

19. Resuelve el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \\ \text{Sujeto a} & \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 14 \\ -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 23 \\ 0 \leq x_1 \leq 4 \\ 0 \leq x_2 \leq 5 \\ 0 \leq x_3 \leq 3 \end{array} \end{array}$$