



Problemas de Optimización Hoja 1 - Convexidad

1. Si Ω_1 y Ω_2 son dos subconjuntos convexos no vacíos de \mathbb{R}^n , demuestra que

(a) $\Omega_1 \pm \Omega_2 = \{\mathbf{x}_1 \pm \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}_1 \in \Omega_1; \mathbf{x}_2 \in \Omega_2\}$ es convexo.

(b) $\Omega_1 \cap \Omega_2$ es convexo.

2. Prueba la convexidad del conjunto Ω definido por

$$\Omega = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0; i = 1, \dots, n \right\}$$

3. Demuestra la convexidad del conjunto

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 3 - x^2\}$$

4. Probar si es o no convexo el conjunto

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = e^x\}$$

5. Siendo $r > 0$ y $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, prueba que la bola abierta de centro \mathbf{a} y radio r es un conjunto convexo.

6. Demuestra que si $f(\mathbf{x})$ es una función convexa definida sobre un conjunto Ω convexo y no vacío de \mathbb{R}^n , entonces el conjunto

$$S = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid f(\mathbf{x}) \leq K\}$$

es convexo para cualquier valor de $K \in \mathbb{R}$.

7. Prueba que los siguientes conjuntos son convexos

$$\Omega_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}$$

$$\Omega_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1 + 2x_2 \leq 4, 6x_1 + x_2 \leq 3, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

$$\Omega_3 = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x_1^2}{2} + x_2^2 \leq 1, x_2 \geq 0 \right\}$$

$$\Omega_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 3, x_1 + x_2 + x_3 \geq 1\}$$

8. Estudia la concavidad o convexidad en \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 de las siguientes funciones

$$f_1(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 + 1)^2$$

$$f_2(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + x_2^3$$

$$f_3(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

$$f_4(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_2$$

9. ¿Sera convexa la función $f_2(x_1, x_2)$ del problema anterior en el conjunto abierto y convexo

$$\Omega_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0, x_2 > 0\}?$$

¿Y $f_4(x_1, x_2)$ sobre el abierto convexo

$$\Omega_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0\}?$$

10. Para los problemas de optimización siguientes

(a) Optimizar
s. a.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ 2x_1 + 2x_2 &\leq 3 \\ 9x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

(b) Optimizar
s.a.

$$\begin{aligned} (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

se pide:

- El análisis de su convexidad.
- ¿Qué se puede decir de sus extremos locales y globales?
- La resolución geométrica del problema.