



OBSERVACIONES GENERALES AL EXAMEN:

- 1.- Responde razonadamente a las preguntas.
- 2.- Resuelve cada apartado de forma independiente.
- 3.- Los resultados graves invalidan cualquier resultado posterior.
- 4.- Expresa los resultados con claridad, evitando excesivas tachaduras.
- 5.- Si utilizas cálculos aproximados debes emplear 4 cifras decimales significativas por redondeo.

1. Dada la función

$$f(x, y) = (y - 2x)^2 + (x - 2)^2$$

- (a) (0.6 ptos.) Resuelve el problema de optimizar $f(x, y)$ con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
- (b) (0.8 ptos.) Tomando como error $\varepsilon = 10^{-2}$ y como aproximación inicial $\mathbf{x}_0 = (1, 1)$ realiza una iteración del método del Gradiente para conseguir una nueva aproximación \mathbf{x}_1 . Compara el valor de $f(x, y)$ en ambos puntos.
- (c) (0.8 ptos.) Con los datos del apartado anterior realiza los mismos cálculos para una iteración del método de Newton.

Solución: Resolveremos cada apartado de forma individual:

- (a) La función es suficientemente derivable y como no hay restricciones se cumple una de las hipótesis de cualificación, por tanto, si hay óptimos globales, serán locales y estos tendrán que cumplir las condiciones necesarias de primer orden, que para un problema sin restricciones se reducen a la condición estacionaria

$$\nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2(x - 2) - 4(y - 2x) \\ 2(y - 2x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De la segunda ecuación obtenemos $y - 2x = 0$, que al sustituir en la primera se obtiene

$$2(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

y entonces

$$y - 2x = 0 \Rightarrow y = 2x = 4$$

El único punto estacionario es

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Para determinar la naturaleza de este punto recurriremos a las condiciones de segundo orden y por tanto a la matriz Hessiana de $f(x, y)$

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

que es constante para cualquier punto (x, y) , además es definida positiva, y esto indica por una parte que el punto anterior es un mínimo local estricto y por otro que la función es estrictamente convexa, ambos resultados implican que el punto $\mathbf{x}^* = (2, 4)$ es el único mínimo global de $f(x, y)$ y también que no hay máximo global.

Este resultado también puede obtenerse observando la función y comprobando que siempre es positiva, por ser una suma de números positivos (suma de cuadrados)

$$f(x, y) = (y - 2x)^2 + (x - 2)^2 \geq 0$$

que se hace 0, cuando ambos sumandos son 0

$$(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x=2$$

$$(y-2x)^2 = 0 \Leftrightarrow (y-2x)=0 \Leftrightarrow y=2x=4$$

tal y como hemos obtenido antes.

(b) A partir del punto inicial

$$\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

primero comprobamos que no se cumple el criterio de parada, utilizando la expresión del gradiente obtenida en el apartado anterior

$$\nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\nabla f(1,1)\| = \sqrt{8} \geq 10^{-2}$$

Se obtiene el siguiente punto mediante el método del gradiente utilizando la expresión

$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 - \alpha_0 \nabla f(\mathbf{x}^0) \quad (\alpha_0 \geq 0)$$

que en nuestro caso

$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 - \alpha_0 \nabla f(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \alpha_0 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2\alpha_0 \\ 1+2\alpha_0 \end{pmatrix}$$

y α_0 es la solución del siguiente problema

$$\underset{\alpha \geq 0}{\text{Minimizar}} \quad f(\mathbf{x}^0 - \alpha \nabla f(\mathbf{x}^0)) = \underset{\alpha \geq 0}{\text{Minimizar}} \quad f(1-2\alpha, 1+2\alpha) = g(\alpha)$$

La función $g(\alpha)$ es

$$g(\alpha) = f(1-2\alpha, 1+2\alpha) = (1+2\alpha-2(1-2\alpha))^2 + (1-2\alpha-2)^2 = (1+2\alpha-2+4\alpha)^2 + (1-2\alpha-2)^2$$

operando obtenemos una expresión más sencilla

$$g(\alpha) = (1+6\alpha)^2 + (-1-2\alpha)^2$$

Derivamos $g(\alpha)$ para encontrar el mínimo

$$g'(\alpha) = 2(-1+6\alpha)6 + 2(-1-2\alpha)(-2) = 80\alpha - 8 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{8}{80} = \frac{1}{10}$$

Podemos comprobar que es un mínimo utilizando su segunda derivada

$$g''(\alpha) = 80 \Rightarrow g''(1/10) = 80 \geq 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{10} \text{ es un mínimo y además } \geq 0$$

luego $\alpha_0 = \frac{1}{10}$ es el valor buscado y el punto buscado es

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1-2\alpha_0 \\ 1+2\alpha_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2\frac{1}{10} \\ 1+2\frac{1}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/10 \\ 12/10 \end{pmatrix}$$

Evaluamos $f(x,y)$ en cada punto

$$f(1,1) = 2 > 1.60 = f\left(\frac{8}{10}, \frac{12}{10}\right)$$

observa que el valor ha disminuido, como era de esperar.

(c) Para el método de Newton y siendo \mathbf{x}^0 el mismo punto de partida que en el apartado anterior sabemos que no se cumple el criterio de parada, por tanto procede el cálculo del siguiente punto, utilizando la expresión para el método de Newton que es:

$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 - Hf(\mathbf{x}^0)^{-1} \nabla f(\mathbf{x}^0)$$

El Hessiano es constante y no depende de \mathbf{x}^0

$$Hf(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow (Hf(\mathbf{x}^0))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

por tanto

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que el punto obtenido es el mismo que para el primer apartado, esto no es de extrañar, puesto que $f(x, y)$ es una función cuadrática y el método de Newton es exacto para este tipo de funciones.

2. Un viticultor embotella y comercializa 3 tipos de vino: *Tintorro*, *Blanquito* y *Consiconsá*. Por cada cuba de vino obtiene un beneficio de 500, 250 y 200 euros respectivamente. Cada cuba ha de pasar por dos fases: llenado y precintado. En la primera fase se pueden emplear hasta un máximo de 640 horas semanales y en la segunda hasta un máximo de 900 horas semanales. El número de horas que una cuba necesita en cada fase viene dado por la tabla siguiente:

	Llenado	Precintado
Tintorro (x_1)	16	30
Blanquito (x_2)	4	5
Consiconsá (x_3)	6	10

Después de plantear el problema lineal correspondiente

$$\left. \begin{array}{lll} \text{Maximizar} & 500x_1 & +250x_2 & +200x_3 \\ \text{Sujeto a} & 16x_1 & +4x_2 & +6x_3 \leq 640 \\ & 30x_1 & +5x_2 & +10x_3 \leq 900 \\ & x_1, & x_2, & x_3 \geq 0 \end{array} \right\}$$

pasar a la forma estándar y utilizar el método simplex, se obtiene la tabla óptima

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^h	b
x_2	4	1	3/2	1/4	0	160
x_5^h	10	0	5/2	-5/4	1	100
	500	0	175	125/2	0	40000

Empleando sólo técnicas de análisis post-óptimo responde de forma independiente a los siguientes apartados:

- (a) (0.8 ptos.) El viticultor quiere saber si será rentable la producción de un nuevo tipo de vino, *Clarete*, con un beneficio de 150 euros por cuba. Si para la elaboración de este vino se emplean 2 horas en la fase de llenado y 4 en la de precintado por cuba, ¿cuál debería ser ahora la nueva producción?
- (b) (0.8 ptos.) El consejo regulador de la denominación de origen ha impuesto al viticultor una limitación de 100 cubas en la producción del vino *Blanquito* (x_2). Con esta limitación, ¿cuál debería ser la nueva producción de vinos?

Solución: Resolvemos cada apartado de forma independiente.

- (a) Se trata de la inclusión de una nueva variable x_6 con $c_6^{\max} = 150$ y $\mathbf{A}_6 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Para resolver el problema se ha utilizado el objetivo de minimización de la forma estándar y por tanto habrá que cambiar el signo del coeficiente de la función objetivo asociado a x_6 y tomar $c_6^{\min} = -150$. Para comprobar si la nueva variable entra o no en la base, hay que calcular su coeficiente de coste relativo r_6 respecto a la base actual. Para ello necesitamos el valor de \mathbf{c}_B y de \mathbf{B}^{-1} , mientras que el primero se obtiene directamente de la función objetivo (minimizar) teniendo en cuenta que las variables básicas son x_2 y x_5^h

$$\mathbf{c}_B = (-250, 0)$$

el segundo \mathbf{B}^{-1} se puede obtener directamente de la tabla, en el lugar de las variables de holgura (por ser un problema de \leq) o bien teniendo en cuenta que

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_5^h) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

y calculando su inversa.

Utilizando esta información calculamos r_6

$$r_6 = c_6^{\min} - \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_6 = -150 - (-250, 0) \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ -5/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = -150 - (-250, 0) \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} = -25 < 0$$

que como es negativo indica que la nueva variable puede formar parte de la nueva solución y mejorar el objetivo. Habrá que realizar los cambios pertinentes en la tabla óptima, incorporando los nuevos cambios

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^h	x_6	b
x_2	4	1	3/2	1/4	0	1/2	160
x_5^h	10	0	5/2	-5/4	1	3/2	100
	500	0	175	125/2	0	-25	40000

Notar que en la tabla hay que poner $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_6$ y no \mathbf{A}_6 , puesto que esta tabla se obtiene al multiplicar por \mathbf{B}^{-1} la tabla inicial, a la que pertenece \mathbf{A}_6 .

Utilizando el criterio de entrada elegimos x_6 como variable de entrada, mientras que el criterio de salida proporciona

$$\min \left\{ \frac{160}{1/2}, \frac{100}{3/2} \right\} = \min \left\{ 320, \frac{200}{3} \right\} = \frac{200}{3} \Rightarrow x_5^h \text{ variable de salida}$$

pivotamos sobre el elemento correspondiente, para obtener

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^h	x_6	b
x_2	2/3	1	2/3	2/3	1/3	0	380/3
x_6	20/3	0	5/3	-5/6	2/3	1	200/3
	2000/3	0	650/3	250/6	50/3	0	125000/3

que es óptima con solución óptima.

- (b) En este caso se trata de una nueva restricción puesto que es una imposición sobre una de las variables

$$x_2 \leq 100$$

Esta restricción se transforma en una igualdad utilizando una nueva variable de holgura

$$x_2 + x_6^h = 100$$

que incorporamos en la tabla actual

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^h	x_6^h	b
x_2	4	1	3/2	1/4	0	0	160
x_5^h	10	0	5/2	-5/4	1	0	100
x_6^h	0	1	0	0	0	1	100
	500	0	175	125/2	0	0	40000

En primer lugar hay que actualizar la tabla para conseguir solución básica (identidad) haciendo un 0 en el elemento recuadrado.

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^h	x_6^h	b
x_2	4	1	3/2	1/4	0	0	160
x_5^h	10	0	5/2	-5/4	1	0	100
x_6^h	-4	0	-3/2	-1/4	0	1	-60
	500	0	175	125/2	0	0	40000

Vemos que la solución básica no es factible, pero es factible dual (todos los coeficientes de coste relativo son positivos). Utilizamos el criterio de salida para elegir x_6^h como variable a sustituir, mientras que la variable de entrada, se obtiene utilizando el criterio de entrada

$$\min \left\{ \frac{-500}{-4}, \frac{-175}{-3/2}, \frac{-125/2}{-1/4} \right\} = \min \{125, 116.67, 250\} = 116.67 \Rightarrow x_3 \text{ variable de entrada}$$

y pivotamos sobre el elemento correspondiente

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^h	x_6^h	b
x_2	0	1	0	0	0	1	100
x_5^h	10/3	0	0	-5/3	1	5/3	0
x_3	8/3	0	1	1/6	0	-2/3	40
	100/3	0	0	100/3	0	350/3	33000

3. Dado el siguiente problema

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Optimizar} & f(x, y, z) = x + y + z \\ \text{s.a.} & \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 3 \end{cases} \end{array} \right\} \text{ (P)}$$

- (a) (2.0 ptos.) Resuelve el problema utilizando las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker.
- (b) (0.4 ptos.) ¿Cuál es la variación que debería tener el término independiente de la primera restricción para que el valor óptimo en el máximo aumente una unidad? ¿Y para que el valor óptimo en el mínimo disminuya una unidad?

Solución: Resolvemos cada apartado.

- (a) El conjunto factible para este problema es la intersección de 2 conjuntos

$$\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$$

siendo

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1\} \\ \Omega_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 3\} \end{aligned}$$

Los conjuntos Ω_1 y Ω_2 son de la forma

$$\Gamma_k = \{g_j(\mathbf{x}) \leq k\} \quad j = 1, 2$$

por tanto, si $g_1(\mathbf{x})$ y $g_2(\mathbf{x})$ son convexas, podríamos asegurar que Ω_1 y Ω_2 son conjuntos convexas. Pero este hecho es muy fácil de demostrar, puesto que

$$g_1(x, y, z) = (x-1)^2 + y^2$$

tiene como matriz hessiana

$$\mathbf{H}g_1(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que es semidefinida positiva para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ luego $g_1(x, y, z)$ es una función convexa y cualquier conjunto de la forma $\Gamma_k = \{g_1(\mathbf{x}) \leq k\}$ lo será, en particular si $k = 1$.

De la misma forma

$$g_2(x, y, z) = (x-1)^2 + y^2 + z^2$$

tiene como matriz hessiana

$$\mathbf{H}g_2(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

que es definida positiva para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ luego $g_2(x, y, z)$ es una función convexa y cualquier conjunto de la forma $\Gamma_k = \{g_2(\mathbf{x}) \leq k\}$ lo será, en particular si $k = 3$.

Puesto que Ω_1 y Ω_2 son conjuntos convexas también será un conjunto convexo la intersección de ambos.

Sin cálculos previos podemos dar alguna información sobre los máximos y mínimos del problema. En primer lugar vemos que el conjunto factible es cerrado (contiene a la frontera) y acotado ($\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2 \subseteq \Omega_2$, que es una bola de centro $(1, 0, 0)$ y radio $\sqrt{3}$), por tanto es compacto y que la función es continua por ser una función polinomial, luego por el teorema de Weierstrass la función tendrá un máximo y un mínimo sobre el conjunto factible.

En segundo lugar vemos que la función objetivo es lineal y por tanto es cóncava y convexa, además de continua. Con esta información podemos decir:

- i. Por el teorema de Weierstrass, la función $f(x, y)$ tiene máximo y mínimo (global) sobre el conjunto Ω .
- ii. Como f es convexa sobre Ω convexo y compacto, y por el apartado anterior, tiene máximo \Rightarrow El máximo se encuentra en la frontera del conjunto.
- iii. Como f es cóncava sobre Ω convexo y compacto, y por el apartado anterior, tiene mínimo \Rightarrow El mínimo se encuentra en la frontera del conjunto.
- iv. Como f es convexa sobre Ω convexo \Rightarrow Todo mínimo local es global.
- v. Como f es cóncava sobre Ω convexo \Rightarrow Todo máximo local es global.
- vi. Como f es convexa sobre Ω convexo y $f \in \mathcal{C}^1 \Rightarrow$ Un punto que cumpla las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker para ser mínimo local, automáticamente lo será.
- vii. Como f es cóncava sobre Ω convexo y $f \in \mathcal{C}^1 \Rightarrow$ Un punto que cumpla las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker para ser máximo local, automáticamente lo será.
- viii. Como Ω es un conjunto convexo con interior no vacío -por ejemplo, el origen $(0, 0)$ está en su interior \Rightarrow Todos los puntos cumplen las hipótesis de cualificación de las restricciones.
- ix. Un extremo global es también un extremo local, pero como cualquier punto factible cumple por el apartado anterior, las hipótesis de cualificación de las restricciones, entonces un mínimo o máximo global debe cumplir las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker. De hecho, como el máximo y mínimo (globales) existen por el teorema de Weierstrass, los obtendremos utilizando las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker.

Utilizaremos ahora los multiplicadores para construir la función Lagrangiana y encontrar los puntos extremos.

$$L(x, y, z) = x + y + z + \mu_1 \left((x-1)^2 + y^2 - 1 \right) + \mu_2 \left((x-1)^2 + y^2 + z^2 - 3 \right)$$

y planteamos las condiciones de KKT:

- i. Condición Estacionaria

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\mu_1(x-1) + 2\mu_2(x-1) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\mu_1 y + 2\mu_2 y = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\mu_2 z = 0 \quad (3)$$

- ii. Condición de factibilidad

$$(x-1)^2 + y^2 - 1 \leq 0$$

$$(x-1)^2 + y^2 + z^2 - 3 \leq 0$$

- iii. Condición de positividad

$$\mu_1, \mu_2 \geq 0 \Rightarrow \text{Para mínimo}$$

$$\mu_1, \mu_2 \leq 0 \Rightarrow \text{Para máximo}$$

- iv. Condición de holgura

$$\mu_1 g_1(x) = 0 \Leftrightarrow \mu_1 \left((x-1)^2 + y^2 - 1 \right) = 0 \quad (4)$$

$$\mu_2 g_2(x) = 0 \Leftrightarrow \mu_2 \left((x-1)^2 + y^2 + z^2 - 3 \right) = 0 \quad (5)$$

Las posibles alternativas para resolver el sistema anterior las proporcionan las dos últimas ecuaciones según el siguiente esquema

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1 = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \mu_2 = 0 & \text{Caso I} \\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 - 3 & \text{Caso II} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_2 = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \mu_2 = 0 & \text{Caso III} \\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0 & \text{Caso IV} \end{array} \right.$$

Comprobamos cada caso:

Caso I: Este caso es imposible, puesto que sustituyendo en la primera ecuación del sistema obtenemos: $1 = 0$

Caso II: Sustituyendo el valor de $\mu_1 = 0$ en el sistema obtenemos

$$1 + 2\mu_2(x - 1) = 0 \quad (6)$$

$$1 + 2\mu_2 y = 0 \quad (7)$$

$$1 + 2\mu_2 z = 0 \quad (8)$$

$$(x - 1)^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0$$

En el que si restamos la primera ecuación y la segunda ecuación obtenemos

$$(1 + 2\mu_2(x - 1)) - (1 + 2\mu_2 y) = 0 \Leftrightarrow 2\mu_2(x - 1 - y) = 0$$

y como μ_2 no puede ser cero puesto que entonces la primera ecuación nos da $1 = 0$ se llega a la conclusión de que

$$x - 1 = y$$

Si restamos 8 y 7

$$(1 + 2\mu_2 y) - (1 + 2\mu_2 z) = 0 \Leftrightarrow 2\mu_2(y - z) = 0$$

que nos proporciona (como $\mu_2 \neq 0$)

$$y = z$$

y sustituyendo en la última

$$(x - 1)^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 + 2y^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow z = \pm 1$$

Y por tanto

$$y = z = \pm 1$$

$$x = y + 1$$

Despejando μ_2 de 7 o de 8 obtenemos

$$\mu_2 = -\frac{1}{2y} = \mp \frac{1}{2}$$

y en este caso obtenemos 2 puntos

$$P_1 = (2, 1, 1) \quad \mu = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$$

$$P_2 = (0, -1, -1) \quad \mu = \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

Sin embargo estos puntos no son factibles ya que

$$P_1 = (2, 1, 1) \Rightarrow (x - 1)^2 + y^2 = (2 - 1)^2 + (1)^2 = 2 \not\leq 1$$

$$P_2 = (0, -1, -1) \Rightarrow (0 - 1)^2 + y^2 = (-1)^2 + (1)^2 = 2 \not\leq 1$$

y no cumplen la primera de las restricciones.

Caso III: Este caso también es imposible, puesto que sustituyendo $\mu_2 = 0$ en la ecuación 3 del sistema volvemos a obtener una inconsistencia del tipo $1 = 0$.

Caso IV: El sistema que hay que resolver es

$$1 + 2\mu_1(x-1) + 2\mu_2(x-1) = 0$$

$$1 + 2\mu_1 y + 2\mu_2 y = 0$$

$$1 + 2\mu_2 z = 0$$

$$(x-1)^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (9)$$

$$(x-1)^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0 \quad (10)$$

Y sustituyendo la cuarta ecuación en la quinta

$$(x-1)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow 1 + z^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow z^2 = 2 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{2}$$

Ahora de la tercera ecuación obtenemos el valor de μ_2

$$\mu_2 = -\frac{1}{2z} = -\frac{1}{2(\pm\sqrt{2})} = \mp\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Si restamos la primera ecuación y la segunda ecuación obtenemos

$$2\mu_1(x-1-y) + 2\mu_2(x-1-y) = 0 \Leftrightarrow (\mu_1 + \mu_2)(x-1-y) = 0$$

de donde obtenemos 2 opciones. La primera

$$\mu_1 + \mu_2 = 0$$

no nos produce ningún punto, puesto que en este caso

$$\mu_1 = -\mu_2$$

y los dos multiplicadores tienen distinto signo puesto que $\mu_2 \neq 0$ (los mínimos y máximos locales tienen multiplicadores del mismo signo), luego solamente nos queda el segundo caso

$$x-1=y$$

Sustituyendo en la ecuación 9

$$(x-1)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow 2y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

y x será

$$x = 1 \pm y = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Nos queda por determinar el valor de μ_1 . Despejamos para ello de la segunda ecuación

$$1 + 2\mu_1 y + 2\mu_2 y = 0 \Rightarrow \mu_1 = -\mu_2 - \frac{1}{2y}$$

y teniendo en cuenta los distintos valores de μ_2 e y

$$\mu_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \mu_1 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (A)$$

$$\mu_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \mu_1 = \frac{3}{2\sqrt{2}} \quad (B)$$

$$\mu_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \mu_1 = -\frac{3}{2\sqrt{2}} \quad (C)$$

$$\mu_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \mu_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (D)$$

Los casos (B) y (C) no nos sirve puesto que los multiplicadores μ_1 y μ_2 tienen distinto signo. Resumiendo tenemos dos puntos

$$\begin{aligned} P_3 &= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right) & \mu &= \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \\ P_4 &= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right) & \mu &= \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

que son factibles y cumplen las condiciones de KKT para ser máximo local y mínimo local respectivamente, pero como se ha comprobado en el apartado anterior esto implica que son los máximo y mínimo globales del problema.

(b) Por el análisis previo tenemos

$$\begin{aligned} \text{Máximo} &\Rightarrow P_3 = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right) & \mu &= \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \\ \text{Mínimo} &\Rightarrow P_4 = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right) & \mu &= \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

Hay que aplicar en este apartado la relación entre la variación del valor óptimo del problema y los multiplicadores de KKT obtenidos, tendremos

$$\Delta f(\mathbf{x}^*) = -\sum_{j=1}^m \lambda_j \Delta b_j - \sum_{j=1}^p \mu_j \Delta c_j$$

en nuestro caso solamente hay restricciones de desigualdad y solamente se buscan cambios en la primera restricción, luego

$$\begin{aligned} \Delta f(P_{\min}) &= -\mu_1 \Delta c_1 \Rightarrow \Delta c_1 = \frac{\Delta f(P_{\min})}{-\mu_1} = \frac{1}{-\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)} = 2\sqrt{2} \\ \Delta f(P_{\max}) &= -\mu_1 \Delta c_1 \Rightarrow \Delta c_1 = \frac{\Delta f(P_{\min})}{-\mu_1} = \frac{-1}{-\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

4. Responde razonadamente a cada una de las siguientes cuestiones:

- (0.3 ptos.) ¿Es verdadero o falso que en el método de la M grande de programación lineal, el problema artificial siempre tiene solución?
- (0.3 ptos.) Si un problema no tiene óptimos globales, ¿puede, no obstante, tener puntos que satisfagan las condiciones necesarias de optimalidad? ¿y si es infactible?
- (0.3 ptos.) Las restricciones de un problema son

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &\leq 1 \\ x^2 + y^3 - z^4 &= 1 \end{aligned}$$

y el óptimo se alcanza en el punto $(1, 0, 0)$. ¿Podremos asegurar que es un punto de KKT?

- (0.3 puntos) Indica si es verdadero o falso el razonamiento siguiente: Tenemos un punto de KKT en un problema de minimización en el que todas las soluciones factibles son regulares y todas las funciones son de clase C^2 . Si además la función objetivo es lineal, podemos afirmar que es convexa, luego el punto será de mínimo global.

Solución: Respondemos de forma independiente a cada cuestión:

- Falso, tiene solución factible básica inicial pero puede ser no acotado.
- Verdadero, puede tener óptimos locales. Falso, si es infactible, no hay soluciones porque $\Omega = \emptyset$
- En el punto las restricciones son activas

$$1^2 + 0^2 + 0^2 = 1$$

$$1^2 + 0^3 - 0^4 = 1$$

Notar que no se cumple ninguna de las hipótesis de cualificación de las restricciones: Hay restricciones, no son todas lineales y el interior es vacío (porque hay igualdades). Tampoco se cumple la hipótesis de regularidad, puesto que al se activas se considera el conjunto

$$\{\nabla g_1, \nabla h_1\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2x \\ 3y^2 \\ 4z^3 \end{pmatrix} \right\}$$

que el punto en cuestión

$$\{\nabla g_1(1, 0, 0), \nabla h_1(1, 0, 0)\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

son linealmente dependientes. Como no se cumple ninguna hipótesis de cualificación por las restricciones no podemos asegurar que el óptimo tenga que cumplir las condiciones de KKT.

(d) Falso, no se indica nada de la convexidad del conjunto.

5. (1 pto.) Resuelve mediante el método simplex

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ & x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 = 14 \\ & x_1 \geq 0; x_2 \leq 0; x_3 \text{ libre} \end{aligned}$$

Solución: En primer lugar transformamos a la forma estándar, cambiando la variable negativa x_2 por $-x'_2$ y la variable libre x_3 por una diferencia de variables positivas

$$\begin{aligned} x'_2 &= -x_2 \\ x_3 &= x'_3 - x''_3 \end{aligned}$$

Introducimos además una variable de holgura en la primera restricción y el problema queda

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & x_1 - 2x'_2 + 4(x'_3 - x''_3) \\ & x_1 - x'_2 - x''_4 \leq 10 \\ & x_1 - 2x'_2 + x'_3 - x''_3 = 14 \\ & x_1, x'_2, x'_3, x''_3 \geq 0 \end{aligned}$$

la tabla inicial será

	x_1	x'_2	x'_3	x''_3	x''_4	b
x''_4	1	-1	0	0	1	10
x_3	1	-2	1	-1	0	14
	1	-2	4	-4	0	0

actualizando la tabla para conseguir un 0 en el coeficiente de coste relativo de la variable básica actual, obtenemos

	x_1	x'_2	x'_3	x''_3	x''_4	b
x''_4	1	-1	0	0	1	10
x_3	1	-2	1	-1	0	14
	-3	6	0	0	0	-56

La variable de entrada será x_1 ($r_1 = -3 < 0$, es el único negativo) y como variable de salida tomaremos a x''_4 ($10/1 < 14/1$), pivotando sobre el elemento correspondiente obtendremos la tabla

	x_1	x'_2	x'_3	x''_3	x''_4	b
x_1	1	-1	0	0	1	10
x_3	0	-1	1	-1	-1	4
	0	3	0	0	3	-26

que es óptima.

6. Dado el siguiente funcional

$$J(y) = \int_0^1 [4xy - (2y')^2 + 5y'y] dx$$

(a) (0.8 pts.) Resuelve el problema de extremos fijos:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } J(y) \\ &y(0) = 1 \\ &y(1) = -1 \end{aligned}$$

(b) (0.8 pts.) Resuelve el problema de extremos variables:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } J(y) \\ &y(0) \text{ libre} \\ &y(1) \text{ libre} \end{aligned}$$

Solución: Resolvemos cada apartado, en ambos casos necesitamos las ecuaciones de Euler-Lagrange con

$$f(x, y, y') = 4xy - (2y')^2 + 5y'y$$

calculamos cada componente de la ecuación de Euler Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= 4x + 5y' \\ \frac{\partial f}{\partial y'} &= 5y - 8y' \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 5y' - 8y'' \end{aligned}$$

e igualando

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = \frac{\partial f}{\partial y} \Leftrightarrow 5y' - 8y'' = 4x + 5y'$$

de donde se obtiene

$$y'' = -\frac{x}{2}$$

e integrando 2 veces

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{x^2}{4} + A \\ y &= -\frac{x^3}{12} + Ax + B \end{aligned}$$

(a) Si los extremos son fijos

$$\begin{aligned} y(0) &= 1 \Rightarrow y(0) = B \Rightarrow B = 1 \\ y(1) &= -1 \Rightarrow y(1) = -\frac{1}{12} + A + B = -1 \Rightarrow A = -\frac{23}{12} \end{aligned}$$

(b) Si los extremos son variables

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial y'} \right|_{x=0} &= 0 \Rightarrow 5y(0) - 8y'(0) = 0 \Rightarrow 5(B) - 8(A) = 0 \\ \left. \frac{\partial f}{\partial y'} \right|_{x=1} &= 0 \Rightarrow 5y(1) - 8y'(1) = 0 \Rightarrow 5\left(-\frac{1}{12} + A + B\right) - 8\left(-\frac{1}{4} + A\right) = 0 \end{aligned}$$

Cuya solución es

$$\begin{aligned} A &= -\frac{19}{60} \\ B &= -\frac{38}{75} \end{aligned}$$