



Ingeniero Industrial
Asignatura: Optimización y Simulación
Convocatoria de 3 de febrero de 2006
Prof.: Silvestre Paredes Hernández

1. Considera el diseño de una tubería de L metros (m) de longitud que pueda transportar un fluido a una velocidad de Q litros por minuto ($l \cdot \text{min}^{-1}$). La selección del diámetro de la tubería D , en decímetros (dm), está basado en la minimización del coste total de la instalación y que puede expresarse como:

$$f(D) = 0.05L + 0.025LD^{3/2} + \frac{1}{6}QD^{-5/2} + \frac{1}{54}Q^2D^{-9/2}$$

- (a) (1.0 puntos). Plantea el problema del diseño de una tubería de longitud $L = 1000m$ y una velocidad de fluido de $Q = 18l \cdot \text{min}^{-1}$ litros por minuto, sabiendo que el diámetro tiene que estar entre $0.25dm$ y $1dm$ y encuentra la solución aproximada después de 2 iteraciones del método de la sección áurea.
- (b) (0.25 puntos). ¿Cuántas iteraciones de este algoritmo habría que dar para conseguir una solución aproximada con un error menor que 10^{-4} ?

Solución:

- (a) Con los valores dados para Q y L , la función $f(D)$ es

$$f(D) = 50 + 25D^{3/2} + 3D^{-5/2} + 6D^{-9/2}$$

y el problema que hay que resolver es

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & 50 + 25D^{3/2} + 3D^{-5/2} + 6D^{-9/2} \\ \text{s.a.} & D \in [0.25, 1] \end{array}$$

Aplicamos el método de la sección áurea tomando $\tau = 0.618$.

- i. 1ª Iteración: El intervalo inicial es $[a_1, b_1] = [0.25, 1]$

$$\lambda_1 = a_1 + (1 - \tau)(b_1 - a_1) = 0.25 + (1 - 0.618) * (1 - 0.25) = 0.5365$$

$$\mu_1 = a_1 + \tau(b_1 - a_1) = 0.25 + 0.618 * (1 - 0.25) = 0.7135$$

$$f(\lambda_1) = 172.9291 > f(\mu_1) = 99.4517$$

El nuevo intervalo será $[a_2, b_2] = [\lambda_1, b_1] = [0.5365, 1]$

- ii. 2ª Iteración: A partir del intervalo $[a_2, b_2]$

$$\lambda_2 = \mu_1 = 0.7135$$

$$\mu_2 = a_2 + \tau(b_2 - a_2) = 0.5365 + 0.618 * (1 - 0.5365) = 0.8229$$

$$f(\lambda_2) = 99.4517 < f(\mu_2) = 87.9674$$

y el nuevo intervalo será $[a_3, b_3] = [\lambda_2, b_2] = [0.7135, 1]$

Después de 2 iteraciones la solución se encuentra en el intervalo

$$[0.7135, 1]$$

Tomamos como solución aproximada el punto medio de ese intervalo

$$x^* \simeq 0.8568$$

(Observación: La solución real es 0.9851)

- (b) Si el intervalo inicial es $[a, b]$, la longitud del intervalo que se obtiene después de n iteraciones será $\tau^n (b - a)$. Si tomamos como solución aproximada el punto medio de ese intervalo, para tener un error menor que 10^{-4} se tendrá que cumplir

$$\frac{\tau^n (b - a)}{2} < 10^{-4} \Leftrightarrow \tau^n < \frac{2 \cdot 10^{-4}}{(b - a)} \Leftrightarrow n \ln \tau < \ln \frac{2 \cdot 10^{-4}}{(b - a)} \Leftrightarrow n > \frac{\ln \left(\frac{2 \cdot 10^{-4}}{(b - a)} \right)}{\ln \tau}$$

El cambio de signo en la desigualdad, es debido a que $\ln \tau < 0$. En este problema $b = 1$, $a = 0.25$ y el valor de n debe cumplir

$$n > \frac{\ln \left(\frac{2 \cdot 10^{-4}}{(1 - 0.25)} \right)}{\ln (0.618)} = 17.0997$$

Tendremos que dar $n = 18$ iteraciones para garantizar la solución con un error menor que el pedido.

2. Dado el siguiente problema de optimización con restricciones.

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Minimizar} & x^2 + y^2 + z^2 \\ \text{Sujeto a} & 3x + 2y + z = 4 \end{array} \right\} (\mathbf{P}_1)$$

- (a) **(0.25 puntos).** Transforma el problema (\mathbf{P}_1) en un problema sin restricciones utilizando un método de penalización adecuado.
- (b) **(0.4 puntos)** Si M es el parámetro de penalización del método utilizado en el apartado anterior; resuelve el problema sin restricciones que se obtiene para $M = 1, 10, 100$ y 1000 , indicando para cada uno de estos valores la solución óptima y el valor óptimo.
- (c) **(0.4 puntos).** Haz lo mismo para los valores $M = 0.1, 0.01, 0.001$ y 0.0001 .
- (d) **(0.25 puntos).** ¿Cuál de los 8 valores anteriores tomarías como solución más aproximada del problema (\mathbf{P}_1) ? ¿Por qué?

Solución:

- (a) Por ser un problema con una restricción de igualdad, utilizaremos un método de penalización exterior, por ejemplo, la penalización parabólica, el problema sin restricciones sería en este caso

$$\text{Minimizar } F(x, M) = x^2 + y^2 + z^2 + M(3x + 2y + z - 4)^2$$

- (b) Resolvemos este problema sin restricciones, planteando las condiciones necesarias de primer orden

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 2x + 6M(3x + 2y + z - 4) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2y + 4M(3x + 2y + z - 4) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= 2z + 2M(3x + 2y + z - 4) = 0 \end{aligned}$$

Despejando el término $2M(3x + 2y + z - 4)$ en cada una de las ecuaciones anteriores obtenemos

$$\frac{-x}{3M} = \frac{-y}{2M} = \frac{-z}{M} \Leftrightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$$

de donde

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x}{3} \\ z &= \frac{x}{3} \end{aligned}$$

Substituyendo, por ejemplo, en la primera de las ecuaciones

$$2x + 6M(3x + 2y + z - 4) = 0 \Leftrightarrow x + 3M \left(3x + 2 \frac{2x}{3} + \frac{x}{3} - 4 \right) = 0$$

$$x + M(9x + 4x + x - 12) = 0 \Leftrightarrow x + M(9 + 4 + 1)x - 12M = 0$$

$$x(1 + 14M) = 12M \Leftrightarrow x = \frac{12M}{1 + 14M}$$

De manera que

$$y = \frac{24M}{3(1 + 14M)} = \frac{8M}{1 + 14M}$$

$$z = \frac{12M}{3(1 + 14M)} = \frac{4M}{1 + 14M}$$

y tendremos la solución para cualquier M .

M	x	y	z
1	0.8000	0.5333	0.2667
10	0.8511	0.5674	0.2837
100	0.8565	0.5710	0.2855
1000	0.8571	0.5714	0.2857

(c) Empleamos la misma expresión para los nuevos valores

M	x	y	z
0.1	0.5000	0.3333	0.1667
0.01	0.1053	0.0702	0.0351
0.001	0.0118	0.0079	0.0039
0.0001	0.0012	0.0008	0.0004

(d) El valor obtenido para $M = 1000$, por ser un método de penalización exterior donde $M \rightarrow \infty$.

3. (1.5 puntos) Plantea el modelo lineal que maximice el beneficio de una refinería que procesa 4 tipos de crudo, que utiliza para elaborar 4 productos: gasolina, gasóleo, queroseno RP-1 y aceite lubricante, teniendo en cuenta que existen cantidades limitadas tanto para la disponibilidad de petróleo, como para la venta máxima de productos y que en la refinería hay 3 tipos de procesamiento del petróleo para la obtención de los productos. En la siguiente tabla se indica la tasa de producto por cada barril de cada tipo de crudo y en cada proceso en el que puede utilizarse, junto con los beneficios y los costes en euros:

	1	2	3	4	Beneficio	Venta Máxima
Proceso	I	I	II	III		
Gasolina	0.6	0.5	0.4	0.2	0.4	0.4
Gasoleo	0.2	0.2	0.3	0.2	0.3	0.1
Queroseno RP-1	0.1	0.2	0.2	0.5	0.2	0.2
Lubricante	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.2
Otros (Pérdidas, etc.)	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
Coste Petróleo	150	150	200	200	250	250
Coste Proceso	50	60	55	70	60	80
Existencias Crudo	100000	100000	200000	200000		

Solución: Llamaremos

- $x_{1,1}$ Barriles de petróleo del tipo 1 utilizado en el proceso I
- $x_{2,1}$ Barriles de petróleo del tipo 2 utilizado en el proceso I
- $x_{3,1}$ Barriles de petróleo del tipo 3 utilizado en el proceso I
- $x_{3,2}$ Barriles de petróleo del tipo 3 utilizado en el proceso II
- $x_{4,2}$ Barriles de petróleo del tipo 4 utilizado en el proceso II
- $x_{4,3}$ Barriles de petróleo del tipo 4 utilizado en el proceso III

Utilizando estas variables de decisión las restricciones se obtienen fácilmente:

- (a) *De Venta máxima:* De cada barril de petróleo de los diferentes tipos se obtienen las cantidades indicadas en la tabla, por ejemplo, de un barril de petróleo de tipo 1, se obtienen 0.6 barriles de gasolina, de ahí que de $x_{1,1}$ barriles de tipo 1, obtendremos $0.6x_{1,1}$ barriles de gasolina. Con esta relación y para cada tipo de petróleo y cada producto obtenemos

$$\begin{aligned}
 0.6x_{1,1} + 0.5x_{2,1} + 0.4x_{3,1} + 0.2x_{3,2} + 0.4x_{4,2} + 0.4x_{4,3} &\leq 100000 \\
 0.2x_{1,1} + 0.2x_{2,1} + 0.3x_{3,1} + 0.2x_{3,2} + 0.3x_{4,2} + 0.1x_{4,3} &\leq 150000 \\
 0.1x_{1,1} + 0.2x_{2,1} + 0.2x_{3,1} + 0.5x_{3,2} + 0.2x_{4,2} + 0.2x_{4,3} &\leq 85000 \\
 0.0x_{1,1} + 0.0x_{2,1} + 0.0x_{3,1} + 0.0x_{3,2} + 0.0x_{4,2} + 0.2x_{4,3} &\leq 20000
 \end{aligned}$$

(b) *De Existencias de crudo:* Las existencias de petróleo están limitadas

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_{1,1} \leq 100000 \\ 0 &\leq x_{2,1} \leq 100000 \\ x_{3,1} + x_{3,2} &\leq 200000 \\ x_{4,2} + x_{4,3} &\leq 200000 \\ 0 &\leq x_{3,1}, x_{3,2}, x_{4,2}, x_{4,3} \end{aligned}$$

(c) *Beneficio bruto producto*

$$\begin{aligned} B = & 450 * (0.6x_{1,1} + 0.5x_{2,1} + 0.4x_{3,1} + 0.2x_{3,2} + 0.4x_{4,2} + 0.4x_{4,3}) + \\ & 300 * (0.2x_{1,1} + 0.2x_{2,1} + 0.3x_{3,1} + 0.2x_{3,2} + 0.3x_{4,2} + 0.1x_{4,3}) + \\ & 500 * (0.1x_{1,1} + 0.2x_{2,1} + 0.2x_{3,1} + 0.5x_{3,2} + 0.2x_{4,2} + 0.2x_{4,3}) + \\ & 600 * (0.2x_{4,3}) \end{aligned}$$

(d) *Coste operaciones + coste petroleo*

$$C = (150 + 50) x_{1,1} + (150 + 60) x_{2,1} + (200 + 55) x_{3,1} + (200 + 70) x_{3,2} + (250 + 60) x_{4,2} + (250 + 80) x_{4,3}$$

y la función objetivo será: $B - C$

4. Al resolver el siguiente problema de programación lineal mediante el método SIMPLEX

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\ \text{Sujeto a} & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430 \\ & 3x_1 + 2x_3 \leq 460 \\ & x_1 + 4x_2 \leq 450 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

se obtiene la siguiente tabla óptima

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^h	x_6^h	b
x_2	$-1/4$	1	0	$1/2$	$-1/4$	0	100
x_3	$3/2$	0	1	0	$1/2$	0	230
x_6^h	2	0	0	-2	1	1	50
	3	0	0	1	2	0	-1350

Empleando análisis post-óptimo responde de forma independiente a los siguientes apartados (no se puntuarán otras técnicas distintas al análisis post-óptimo).

- (0.85 puntos). Construye el dual de (P_2) y encuentra su solución utilizando holgura complementaria.
- (0.6 puntos). ¿Cuál es la nueva solución si el coeficiente c_3 disminuye de 5 hasta 4?
- (0.25 puntos). ¿Qué valores debe tener c_1 para que x_1 forme parte de la solución?
- (0.5 puntos). ¿Cuál será la solución si hacemos el cambio $b_1 = 430$ por $b'_1 = 500$?

Solución: Los tres últimos apartados del problema necesitan el conocimiento de la matriz básica; matriz que viene dada por las variables básicas del problema. La matriz está formada por las columnas (A_2, A_3, A_6^h) , por lo que la matriz B es

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

cuya inversa, al ser un problema con variables de holgura, la podemos encontrar en la tabla óptima en las columnas de las variables de holgura:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) El problema (**P2**) es realmente el problema dual ($D1$) de la forma simétrica de la dualidad, por tanto su problema dual será el problema primal ($P1$) de la forma simétrica de la dualidad.

$$\begin{array}{llll} \text{Minimizar} & 430\lambda_1 & +460\lambda_2 & +450\lambda_3 \\ \text{Sujeto a} & \lambda_1 & +3\lambda_2 & +\lambda_3 \geq 4 \\ & 2\lambda_1 & & +4\lambda_3 \geq 2 \\ & \lambda_1 & +2\lambda_2 & \geq 5 \\ & \lambda_1, & \lambda_2, & \lambda_3 \geq 0 \end{array}$$

La solución óptima del primal es

$$x^* = (0, 100, 230, 0, 0, 50)$$

Puesto que $x_2^* \neq 0$ y $x_3^* \neq 0$, las restricciones 2 y 3 del problema dual serán de igualdad en la solución óptima.

$$\begin{array}{rcl} 2\lambda_1^* & +4\lambda_3^* & = 2 \\ \lambda_1^* & +2\lambda_2^* & = 5 \end{array} \quad (1)$$

Substituyendo la solución óptima en las restricciones del primal tenemos

$$\begin{array}{rclcl} 0 & +2 * 100 & +230 & = & 430 \equiv 430 \\ 3 * 0 & & +2 * 230 & = & 460 \equiv 460 \\ 0 & +4 * 100 & & = & 400 < 450 \end{array}$$

La tercera restricción tiene holgura, por eso la tercera variable del dual es nula $\lambda_3 = 0$.

Por último, utilizamos el sistema 1

$$\begin{array}{rcl} 2\lambda_1^* & & = 2 \Leftrightarrow \lambda_1^* = 1 \\ \lambda_1^* & +2\lambda_2^* & = 5 \Leftrightarrow \lambda_2^* = 2 \end{array}$$

La solución óptima del dual es

$$\lambda^* = (1, 2, 0)$$

- (b) Se trata de un cambio en el coeficiente de coste de una variable básica, x_3 , se modifican, por tanto, los coeficientes de coste relativo de todas las variables no básicas. Aunque el problema es de maximización, se ha resuelto con objetivo de minimización, tendremos que cambiar el signo a la función objetivo. Si cambiamos el coeficiente indicado

$$\mathbf{c}_B = (-2, -5, 0) \hookrightarrow \mathbf{c}'_B = (-2, -4, 0)$$

los nuevos coeficientes de coste relativo serán

$$\begin{aligned} r'_1 &= c_1 - \mathbf{c}'_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_1 = -4 - (-2, -4, 0) * \begin{pmatrix} -1/4 \\ 3/2 \\ 2 \end{pmatrix} = -4 - \left(\frac{1}{2} - 6\right) = \frac{3}{2} > 0 \\ (r'_4)^h &= c_4^h - \mathbf{c}'_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_4^h = 0 - (-2, -4, 0) \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 - (-1) = 1 > 0 \\ (r'_5)^h &= c_5^h - \mathbf{c}'_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_5^h = 0 - (-2, -4, 0) \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 - \left(\frac{1}{2} - 2\right) = \frac{3}{2} > 0 \end{aligned}$$

Como son todos positivos no hay cambios en la solución óptima.

- (c) Tratamos de encontrar el precio c'_1 que tiene que tener x_1 para que entre en la base, es decir, hay que encontrar el valor c'_1 que hace a $r'_1 \leq 0$

$$r'_1 = c'_1 - \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_1 = c'_1 - (-2, -5, 0) \begin{pmatrix} -1/4 \\ 3/2 \\ 2 \end{pmatrix} = c'_1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{15}{2}\right) = c'_1 + 7$$

$$r'_1 \leq 0 \Leftrightarrow c'_1 + 7 \leq 0 \Leftrightarrow c'_1 \leq -7$$

que en el problema de maximización

$$c'_1 \geq 7$$

- (d) Es un cambio en el término independiente de la primera restricción, por lo que tendremos que ver si la solución básica actual sigue siendo factible con ese cambio.

$$\mathbf{x}'_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}' = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 500 \\ 460 \\ 450 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 135 \\ 230 \\ -90 \end{pmatrix}$$

Puesto que la solución básica actual ha dejado de ser factible, habrá que aplicar el método simplex dual. La tabla de la que tenemos que partir es

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^h	x_6^h	b
x_2	$-1/4$	1	0	$1/2$	$-1/4$	0	135
x_3	$3/2$	0	1	0	$1/2$	0	230
x_6^h	2	0	0	-2	1	1	-90
	3	0	0	1	2	0	1420

Utilizamos como pivote el único posible, -2 , ya que es el único negativo de la fila pivote, para obtener

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^h	x_6^h	b
x_2	$1/4$	1	0	0	0	$1/4$	$225/2$
x_3	$3/2$	0	1	0	$1/2$	0	230
x_4^h	-1	0	0	1	$-1/2$	$-1/2$	45
	4	0	0	0	$5/2$	$1/2$	$1375/2$

que es óptima.

5. Dada la función

$$f(x, y) = \sin(x^2) + \cos(y^2) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Responde a los siguientes apartados:

- (a) **(0.5 puntos).** Encuentra todos los puntos estacionarios de $f(x, y)$ sobre \mathbb{R}^2 .
- (b) **(0.75 puntos).** Utiliza las condiciones de segundo orden (necesarias y/o suficientes) para deducir la naturaleza de los puntos encontrados en el apartado anterior.
- (c) **(0.25 puntos)** ¿Es $f(x, y)$ convexa?. ¿Por qué?

Solución:

- (a) La función $f(x, y)$ es suficientemente derivable, por tanto los puntos estacionarios son aquellos que anulan el gradiente

$$\nabla f(x, y) = 0$$

Derivando e igualando a cero

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \cos(x^2) = 0 \\ \text{y} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y \sin(y^2) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x = 0 \quad \text{o} \quad x^2 = (2k_1 + 1) \frac{\pi}{2}, \quad k_1 \in \mathbb{N} \\ y = 0 \quad \text{o} \quad y^2 = k_2 \pi, \quad k_2 \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$$

Notar que los valores de k_1 y k_2 no pueden ser negativos al ser $x^2 \geq 0$ e $y^2 \geq 0$.

Como ambas ecuaciones deben anularse simultáneamente los puntos estacionarios son de la forma

$$\begin{aligned} P_0 &= (0, 0) \\ P_1(k_1) &= \left(\pm \sqrt{(2k_1 + 1) \frac{\pi}{2}}, 0 \right) \quad k_1 \in \mathbb{N} \\ P_2(k_2) &= \left(0, \pm \sqrt{k_2 \pi} \right) \quad k_2 \in \mathbb{N} \\ P_3(k_1, k_2) &= \left(\pm \sqrt{(2k_1 + 1) \frac{\pi}{2}}, \pm \sqrt{k_2 \pi} \right) \quad k_1, k_2 \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Es fácil comprobar que los puntos P_0 y $P_1(k_1)$ están incluidos en los conjuntos descritos por $P_2(k_2)$ y $P_3(k_3)$, respectivamente, simplemente tomando $k_2 = 0$. Si tenemos en cuenta los dos signos para la raíz tendremos como puntos estacionarios:

$$\begin{aligned} P_2^+(k_2) &= (0, \sqrt{k_2\pi}) & P_2^-(k_2) &= (0, -\sqrt{k_2\pi}) \\ P_3^{++}(k_1, k_2) &= \left(\sqrt{(2k_1+1)\frac{\pi}{2}}, \sqrt{k_2\pi}\right) & P_3^{+-}(k_1, k_2) &= \left(\sqrt{(2k_1+1)\frac{\pi}{2}}, -\sqrt{k_2\pi}\right) \\ P_3^{-+}(k_1, k_2) &= \left(-\sqrt{(2k_1+1)\frac{\pi}{2}}, \sqrt{k_2\pi}\right) & P_3^{--}(k_1, k_2) &= \left(-\sqrt{(2k_1+1)\frac{\pi}{2}}, -\sqrt{k_2\pi}\right) \end{aligned}$$

(b) Deduiremos la naturaleza de cada uno de ellos utilizando el Hessiano de $f(x, y)$

$$Hf(x, y) = \begin{bmatrix} 2 \cos(x^2) - 4x^2 \sin(x^2) & 0 \\ 0 & -2 \sin(y^2) - 4y^2 \cos(y^2) \end{bmatrix}$$

Como el Hessiano depende de x^2 e y^2 ocurrirá

$$Hf(P_2^+) = Hf(P_2^-)$$

y también

$$Hf(P_3^{++}) = Hf(P_3^{+-}) = Hf(P_3^{-+}) = Hf(P_3^{--})$$

por tanto solamente hay que considerar 2 casos: $P_2^+(k)$ y $P_3^{++}(k)$

En el primer caso

$$Hf(P_2^+) = Hf(0, \sqrt{k_2\pi}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4k_2\pi(-1)^{k_2} \end{bmatrix}$$

los valores propios son

$$\lambda_1 = 2 \text{ y } \lambda_2 = -4k_2\pi(-1)^{k_2}$$

y entonces:

$$\text{Si } k_2 \text{ par} \Rightarrow \lambda_2 < 0 \Rightarrow P_2^+ \text{ es un punto de silla}$$

$$\text{Si } k_2 \text{ impar} \Rightarrow \lambda_2 > 0 \Rightarrow P_2^+ \text{ es un mínimo local estricto}$$

$$\text{Si } k_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \Rightarrow P_2^+ \text{ puede ser un mínimo local}$$

En el segundo caso

$$Hf(P_3^{++}) = Hf\left(\sqrt{(2k_1+1)\frac{\pi}{2}}, \sqrt{k_2\pi}\right) = \begin{bmatrix} -4(2k_1+1)\frac{\pi}{2}(-1)^{k_1} & 0 \\ 0 & -4k_2\pi(-1)^{k_2} \end{bmatrix}$$

cuyos valores propios son

$$\lambda_1(k_1, k_2) = 4(2k_1+1)\frac{\pi}{2}(-1)^{k_1+1} = \begin{cases} 4(2k_1+1)\frac{\pi}{2} & \text{Si } k_1 \text{ es impar} \\ -4(2k_1+1)\frac{\pi}{2} & \text{Si } k_1 \text{ es par} \end{cases}$$

$$\lambda_2(k_1, k_2) = 4k_2\pi(-1)^{k_2+1} = \begin{cases} 4k_2\pi & \text{Si } k_2 \text{ es impar} \\ -4k_2\pi & \text{Si } k_2 \text{ es par} \end{cases}$$

Y por tanto tendremos los siguientes casos:

$$k_1, k_2 \text{ pares} \rightarrow \lambda_1(k_1), \lambda_2(k_2) < 0 \rightarrow P_3^{++}(k_1, k_2) \text{ máximo local estricto}$$

$$k_1, k_2 \text{ impares} \rightarrow \lambda_1(k_1), \lambda_2(k_2) > 0 \rightarrow P_3^{++}(k_1, k_2) \text{ mínimo local estricto}$$

En cualquier otro caso el punto estacionario será un punto de silla.

(c) La función no es convexa porque el hessiano no siempre es semidefinido positivo.

6. Dado el siguiente problema

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Optimizar} & f(x, y) = 3x + 4y \\ \text{s.a.} & (x, y) \in \Omega \end{array} \right\} (\mathbf{P}_3)$$

siendo Ω el conjunto de puntos de \mathbb{R}^2 definido como

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \leq x; \quad (x-1)^2 + y^2 \leq 4 \right\}$$

- (a) (0.25 puntos). Estudia la convexidad del problema (\mathbf{P}_3)
 (b) (0.4 puntos). ¿Cuáles de las hipótesis de cualificación se cumplen en el problema (\mathbf{P}_3) ?
 (c) (1 punto). encuentra todos los puntos de Ω , que cumplan las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker con ambos objetivos de maximizar y minimizar.
 (d) (0.6 puntos). Encuentra, si existen los óptimos globales del problema. ¿Hay óptimos locales que no sean globales?

Solución:

- (a) El conjunto factible Ω es intersección de dos subconjuntos

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \leq x; \quad (x-1)^2 + y^2 \leq 4 \right\} = \Omega_1 \cap \Omega_2$$

siendo

$$\Omega_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g_1^*(x, y) \leq 0 \right\}$$

con

$$g_1^*(x, y) = y^2 - x$$

y

$$\Omega_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g_2^*(x, y) \leq 4 \right\}$$

con

$$g_2^*(x, y) = (x-1)^2 + y^2$$

El conjunto Ω_1 será convexo si la función $g_1^*(x, y)$ es convexa, que al ser de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ podemos utilizar la caracterización de segundo orden utilizando su matriz hessiana

$$H g_1^*(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

que es semidefinida positiva en \mathbb{R}^2 luego $g_1^*(x, y)$ es una función convexa.

Para el conjunto Ω_2 ocurre lo mismo puesto que $g_2^*(x, y)$ es también una función convexa, de hecho es estrictamente convexa ya que

$$H g_2^*(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

es definida positiva $\forall x, y$.

El conjunto Ω es un conjunto convexo por ser la intersección de dos conjuntos convexos.

La función objetivo

$$f(x, y) = 3x + 4y$$

es lineal y por tanto convexa y cóncava a la vez.

- (b) Estudiamos cada una de las hipótesis de cualificación por separado:
 i. *Condición de Karlin*: No se cumple, ya que no todas las restricciones son lineales.
 ii. *Condición de Slater*: Se ha comprobado que Ω es un conjunto convexo, comprobaremos ahora si tiene interior no vacío.

$$\overset{\circ}{\Omega} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 < x; \quad (x-1)^2 + y^2 < 4 \right\}$$

El punto $(1, 0) \in \overset{\circ}{\Omega}$, puesto que

$$\begin{aligned} 0^2 &< 1 \Rightarrow y^2 < x \\ (0-1)^2 + 1^2 &= 2 < 4 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 < 4 \end{aligned}$$

Se cumple la condición de Slater.

iii. *Condición de Fiacco-McCormick o Regularidad.* En primer lugar calculamos el gradiente de cada restricción

$$\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2y \end{pmatrix} \quad \nabla g_2(x, y) = \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2y \end{pmatrix}$$

y distinguimos 3 casos:

- g_1 y g_2 activas $\Rightarrow \{g_1(x, y) = 0, g_2(x, y) = 0\}$ y $\{\nabla g_1(x, y), \nabla g_2(x, y)\}$ linealmente independientes.
Los puntos para los que las 2 restricciones son activas son

$$\left. \begin{matrix} y^2 = x \\ (x-1)^2 + y^2 = 4 \end{matrix} \right\} \Rightarrow (x-1)^2 + x = 4 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Los puntos son: Para $x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ obtenemos los puntos

$$P_1 = \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}, \sqrt{\frac{1+\sqrt{13}}{2}} \right)$$

y

$$P_2 = \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}, -\sqrt{\frac{1+\sqrt{13}}{2}} \right)$$

Para el valor $x = \frac{1-\sqrt{13}}{2} < 0$, al ser negativo no hay ningún valor real posible para y .

Es sencillo, por sustitución, comprobar que en los puntos P_1 y P_2 los vectores $\{\nabla g_1(P_k), \nabla g_2(P_k)\}$ son linealmente independientes.

- g_1 activa $\Rightarrow \{g_1(x, y) = 0\}$ y $\{\nabla g_1(x, y)\}$ linealmente independiente.
En este caso

$$\{\nabla g_1(x, y)\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2y \end{pmatrix} \right\} \neq 0$$

que siempre es linealmente independiente.

- g_2 activa $\Rightarrow \{g_2(x, y) = 0\}$ y $\{\nabla g_2(x, y)\}$ linealmente independiente.
En este caso

$$\{\nabla g_2(x, y)\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2y \end{pmatrix} \right\}$$

que para el punto $P_3 = (1, 2)$ es el vector nulo y por tanto linealmente dependiente, sin embargo

$$2^2 = 4 \neq 1$$

y P_3 no es un punto factible.

Como no existen puntos irregulares se cumplen las hipótesis de Fiacco-McCormick en todos los puntos factibles..

(c) Para encontrar los puntos que cumplen las condiciones de KKT se construye la función Lagrangiana

$$L(x, y, \mu_1, \mu_2) = 3x + 4y + \mu_1(-x + y^2) + \mu_2((x-1)^2 + y^2 - 4)$$

y se plantean las condiciones de KKT:

i. *Condición Estacionaria*

$$\begin{aligned} 3 - \mu_1 + 2\mu_2(x-1) &= 0 \\ 4 + 2\mu_1 y + 2\mu_2 y &= 0 \end{aligned}$$

ii. *Condición de factibilidad*

$$\begin{aligned} y^2 &\leq x \\ (x-1)^2 + y^2 &\leq 4 \end{aligned}$$

iii. *Condición de positividad para minimizar [o negatividad para maximizar]*

$$\mu_1, \mu_2 \geq 0 \Rightarrow \text{Para mínimo}$$

$$\mu_1, \mu_2 \leq 0 \Rightarrow \text{Para máximo}$$

iv. Condición de holgura

$$\mu_1 (-x + y^2) = 0$$

$$\mu_2 ((x-1)^2 + y^2 - 4) = 0$$

Se resuelve el sistema formado por las ecuaciones de la condición estacionaria y la condición de holgura:

$$\left. \begin{aligned} 3 - \mu_1 + 2\mu_2(x-1) &= 0 \\ 4 + 2\mu_1 y + 2\mu_2 y &= 0 \\ \mu_1 (-x + y^2) &= 0 \\ \mu_2 ((x-1)^2 + y^2 - 4) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

En el cual distinguimos los correspondientes casos:

$$\left\{ \begin{aligned} \mu_1 &= 0 \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \mu_2 &= 0 && \Rightarrow \text{CASO I} \\ ((x-1)^2 + y^2 - 4) &= 0 && \Rightarrow \text{CASO II} \end{aligned} \right. \\ (-x + y^2) &= 0 \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \mu_2 &= 0 && \Rightarrow \text{CASO III} \\ ((x-1)^2 + y^2 - 4) &= 0 && \Rightarrow \text{CASO IV} \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.$$

i. CASO I: $\mu_1 = \mu_2 = 0$

Aquí las dos primeras ecuaciones del sistema 2 nos dan

$$\left. \begin{aligned} 3 &= 0 \\ 4 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

que es obviamente imposible, luego este caso no es válido.

ii. CASO II: $\mu_1 = 0, (x-1)^2 + y^2 - 4 = 0$

En este caso el sistema queda

$$\left\{ \begin{aligned} 3 + 2\mu_2(x-1) &= 0 \\ 4 + 2\mu_2 y &= 0 \\ \mu_1 &= 0 \\ (x-1)^2 + y^2 - 4 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Despejando x e y de la primera y segunda ecuación (se puede hacer puesto que $2\mu_2(x-1) = -3 \Rightarrow \mu_2 \neq 0$)

$$x-1 = -\frac{3}{2\mu_2}$$

$$y = -\frac{4}{2\mu_2}$$

Valores que se sustituyen en la última ecuación

$$\left(-\frac{3}{2\mu_2}\right)^2 + \left(-\frac{4}{2\mu_2}\right)^2 = 4$$

desarrollando obtenemos

$$\frac{9}{4\mu_2^2} + \frac{16}{4\mu_2^2} = 4 \Rightarrow \frac{25}{4\mu_2^2} = 4 \Rightarrow 25 = 16\mu_2^2$$

de donde

$$\mu_2^2 = \frac{25}{16}$$

y tendremos dos posibles valores para μ_2 :

$$\mu_2 = \frac{5}{4} \quad \text{y} \quad \mu_2 = -\frac{5}{4}$$

Si se sustituyen estos valores en x e y obtenemos 2 puntos

$$Q_1 = \left(-\frac{1}{5}, -\frac{8}{5}\right) \quad \mu_1 = 0 \quad \mu_2 = \frac{5}{4}$$

$$Q_2 = \left(\frac{11}{5}, \frac{8}{5}\right) \quad \mu_1 = 0 \quad \mu_2 = -\frac{5}{4}$$

iii. CASO III: $-x + y^2 = 0$, $\mu_2 = 0$

El sistema queda

$$\left. \begin{array}{l} 3 - \mu_1 = 0 \\ 4 + 2\mu_1 y = 0 \\ -x + y^2 = 0 \\ \mu_2 = 0 \end{array} \right\}$$

De la primera ecuación obtenemos

$$\mu_1 = 3$$

que al sustituir en la segunda produce

$$4 + 2\mu_1 y = 0 \Rightarrow 4 + 6y = 0 \Rightarrow y = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

este resultado se sustituye en la tercera ecuación

$$y^2 = x \Rightarrow x = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

que nos da otro punto

$$Q_3 = \left(\frac{4}{9}, -\frac{2}{3}\right) \quad \mu_1 = 3 \quad \mu_2 = 0$$

iv. CASO IV: $(-x + y^2) = 0$, $((x-1)^2 + y^2 - 4)$

En el último caso tendremos

$$\left. \begin{array}{l} 3 - \mu_1 + 2\mu_2(x-1) = 0 \\ 4 + 2\mu_1 y + 2\mu_2 y = 0 \\ -x + y^2 = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 - 4 = 0 \end{array} \right\}$$

El sistema formado por las 2 últimas ecuaciones ha sido resuelto al estudiar las condiciones de regularidad de Fiacco-McCormick en el apartado anterior dando como resultados los puntos

$$Q_4 = P_1 = \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}, \sqrt{\frac{1 + \sqrt{13}}{2}}\right) = (2.3028, 1.5175)$$

y

$$Q_5 = P_2 = \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}, -\sqrt{\frac{1 + \sqrt{13}}{2}}\right) = (2.3028, -1.5175)$$

Sólo resta por calcular los valores de μ_1 y μ_2 para estos punto. Este cálculo se realiza utilizando las dos primeras ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} 3 - \mu_1 + 2\mu_2(x-1) = 0 \\ 4 + 2\mu_1 y + 2\mu_2 y = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} -\mu_1 + 2\mu_2(x-1) = -3 \\ 2\mu_1 y + 2\mu_2 y = -4 \end{array} \right\}$$

que es un sistema lineal, ya que para cada uno de los puntos x e y serían conocidas. La solución general para el sistema es

$$\mu_1 = \frac{-6y + 8(x-1)}{2y(1-2x)}$$

$$\mu_2 = \frac{4+6y}{2y(1-2x)}$$

y sustituyendo los puntos

$$P_4 = (2.3028, 1.5175) \quad \mu_1 = -0.1204 \quad \mu_2 = -1.1976$$

$$P_5 = (2.3028, -1.5175) \quad \mu_1 = 1.7845 \quad \mu_2 = -0.4665$$

Resumimos a continuación la tabla con los puntos obtenidos para comprobar su factibilidad:

Punto	Multiplicadores	Factibilidad	Valor de $f(x)$	Extremo
$Q_1 = (-\frac{1}{5}, -\frac{8}{5})$	$\mu_1 = 0 \quad \mu_2 = \frac{1}{4}$	NO (1^a)	-	-
$Q_2 = (\frac{11}{5}, \frac{8}{5})$	$\mu_1 = 0 \quad \mu_2 = -\frac{1}{4}$	NO (1^a)	-	-
$Q_3 = (\frac{4}{9}, -\frac{2}{3})$	$\mu_1 = 3 \quad \mu_2 = 0$	SI	$-\frac{4}{3}$	Mínimo
$Q_4 = \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}, \sqrt{\frac{1+\sqrt{13}}{2}}\right)$ (2.3028, 1.5175)	$\mu_1 = -0.1204 \quad \mu_2 = -1.1976$	SI	12.9783	Máximo
$Q_5 = \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}, -\sqrt{\frac{1+\sqrt{13}}{2}}\right)$ (2.3028, -1.5175)	$\mu_1 = 1.7845 \quad \mu_2 = -0.4665$	SI	21.4212	-

(d) El problema es convexo, es decir, la función objetivo $f(x)$ es una función convexa y el conjunto factible Ω es un conjunto convexo. Ahora bien teniendo en cuenta que $f(x, y)$ es una función continua sobre un compacto (es cerrado -contiene a la frontera- y acotado -está dentro de una esfera de radio 2-) podemos decir:

- Por el teorema de Weierstrass, la función $f(x, y)$ tiene máximo y mínimo (global) sobre el conjunto Ω .
- Como f es convexa sobre Ω convexo y compacto, y por el apartado anterior, tiene máximo \Rightarrow El máximo se encuentra en la frontera del conjunto.
- Como f es cóncava sobre Ω convexo y compacto, y por el apartado anterior, tiene mínimo \Rightarrow El mínimo se encuentra en la frontera del conjunto.
- Como f es convexa sobre Ω convexo \Rightarrow Todo mínimo local es global.
- Como f es cóncava sobre Ω convexo \Rightarrow Todo máximo local es global.
- Como f es convexa sobre Ω convexo y $f \in C^1 \Rightarrow$ Un punto que cumpla las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker para ser mínimo local, automáticamente lo será.
- Como f es cóncava sobre Ω convexo y $f \in C^1 \Rightarrow$ Un punto que cumpla las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker para ser máximo local, automáticamente lo será.
- Se cumplen las hipótesis de Slater y Fiacco-McCormick.
- Un extremo global es también un extremo local, pero como cualquier punto factible cumple por el apartado anterior, alguna de las hipótesis de cualificación de las restricciones, entonces un mínimo o máximo global debe cumplir las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker. De hecho, como el máximo y mínimo (globales) existen por el teorema de Weierstrass, los obtendremos utilizando las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker.

Observando la tabla del apartado anterior comprobamos que la función tiene un mínimo en el punto Q_3 y un máximo en el punto Q_4 . En el punto Q_5 los multiplicadores son de distinto signo, por tanto, no puede ser un extremo. No hay óptimos locales que no sean globales.