



**OBSERVACIONES GENERALES AL EXAMEN:**

**RAZONA TODAS LAS RESPUESTAS  
LOS ERRORES GRAVES INVALIDAN CUALQUIER RESULTADO POSTERIOR  
EXPRESA LOS RESULTADOS CON CLARIDAD, EVITANDO EXCESIVAS TACHADURAS**

1. Dada la siguiente función

$$f(x) = x(x-1)(x-3)$$

- (a) (0.8 puntos). Encuentra, si existen, todos sus extremos (locales y globales, máximos y mínimos) sobre  $\mathbb{R}$ .
- (b) (0.8 puntos). Utilizando  $x_0 = 0$  como punto inicial, calcula los siguientes 4 términos de la sucesión que se obtiene al emplear el método de Newton sobre la función  $f(x)$ , (no emplees ningún criterio de parada). A partir de estos términos: ¿es posible afirmar que la sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  que se obtendría al aplicar sucesivamente el método de Newton, es convergente?. En caso afirmativo, ¿sería su límite un extremo de  $f(x)$ ?, ¿de qué tipo?. Explica el resultado.

**NOTA:** Utiliza en TODOS los cálculos 4 cifras decimales significativas por redondeo.

*Solución:*

- (a) Puesto que la función es suficientemente derivable, procederemos a buscar los extremos mediante la ecuación

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 3 = 0$$

cuyas soluciones son

$$x_1 = \frac{4 + \sqrt{7}}{3} = 2.2153$$

$$x_2 = \frac{4 - \sqrt{7}}{3} = 0.4514$$

donde hemos tomado 4 cifras decimales tal y como se pide en el enunciado.

Si ahora utilizamos la derivada segunda para encontrar la naturaleza de  $x_1$  y  $x_2$  obtenemos

$$f''(x) = 6x - 8$$

de donde

$$f''(x_1) = f''(2.2153) = 5.2918 > 0 \quad (2\sqrt{7} \text{ valor exacto})$$

$$f''(x_2) = f''(0.4514) = -5.2916 < 0 \quad (-2\sqrt{7} \text{ valor exacto})$$

por tanto  $x_1 = 2.2153$  es un mínimo local estricto mientras que  $x_2 = 0.4514$  es un máximo local estricto.

Sin embargo, la función  $f(x)$  carece de extremos globales, puesto que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - 4x^2 + 3x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 4x^2 + 3x = -\infty$$

y el valor de la función no está acotado, pudiendo tomar cualquier valor.

- (b) El método de Newton consiste en partir de un punto o aproximación inicial, en este caso  $x_0 = 0$ , y construir una sucesión de números basados en la ecuación

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

En este caso y como ya hemos calculado previamente los valores de  $f'(x)$  y  $f''(x)$  los utilizaremos para obtener una ecuación explícita de la sucesión de Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{3x_k^2 - 8x_k + 3}{6x_k - 8}$$

y al operar obtenemos

$$x_{k+1} = \frac{3x_k^2 - 3}{6x_k - 8}$$

de esta forma es muy sencillo encontrar los 5 primeros términos de la sucesión de Newton

$k$	$x_k$	$x_{k+1}$
0	0	0.3750
1	0.3750	0.4484
2	0.4484	0.4514
3	0.4514	0.4514
4	0.4514	0.4514

Está claro que la sucesión obtenida es convergente y su límite es 0.4514, que es uno de los puntos obtenidos en el primer apartado, concretamente el máximo local estricto. La explicación para este fenómeno es que el objetivo del método de Newton es resolver la ecuación  $f'(x) = 0$  y como sabemos tanto los máximos como los mínimos, bajo condiciones de derivabilidad, deben cumplir esta ecuación, la causa de haber obtenido el máximo y no el mínimo es porque el punto de partida,  $x_0 = 0$ , estaba más cerca del máximo (0.4514) que del mínimo (2.2153).

## 2. Dada la función

$$f(x, y) = e^{\cos(x)} e^{\sin(y)} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Responde a los siguientes apartados:

- (a) **(1.0 punto)** Utilizando cualquiera de los resultados y teoremas conocidos, encuentra todos los puntos estacionarios de  $f(x, y)$  en  $\mathbb{R}^2$ , identificando en cada caso si son máximos, mínimos o puntos de silla.
- (b) **(0.4 puntos)** ¿Cuáles son los valores máximos y mínimos de  $f(x, y)$  en  $\mathbb{R}^2$ ?

*Solución:*

- (a) La función  $f(x, y)$  es suficientemente derivable, por tanto los puntos estacionarios se van a obtener resolviendo la ecuación

$$\nabla f(x, y) = 0$$

Previamente podemos hacer una simplificación en la función. Por las propiedades de la exponencial, la función puede expresarse como

$$f(x, y) = e^{\cos(x) + \sin(y)} = e^{\cos(x) + \sin(y)}$$

y puesto que  $e^x$  es una función creciente cuya derivada no se anula nunca, podemos utilizar cierto resultado de optimización de funciones compuestas y buscar los puntos estacionarios de

$$g(x, y) = \cos(x) + \sin(y)$$

que coincidirán con los de  $f(x, y)$ , ya que  $f(x, y)$  es la composición de  $g(x, y)$  con la exponencial  $h(x) = e^x$ . Los puntos estacionarios de  $g(x, y)$  cumplirán entonces

$$\nabla g(x, y) = 0$$

es decir

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -\sin(x) = 0 \\ \text{y} \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \cos(y) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x = k_1\pi, \quad k_1 \in \mathbb{Z} \\ y = \frac{\pi}{2} + k_2\pi, \quad k_2 \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$$

Como ambas ecuaciones deben anularse simultáneamente los puntos estacionarios son de la forma

$$P(k_1, k_2) = \left(k_1\pi, \frac{\pi}{2} + k_2\pi\right) \quad (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}$$

Podemos deducir la naturaleza de cada uno de ellos utilizando el Hessiano de  $g(x, y)$

$$Hg(x, y) = \begin{bmatrix} -\cos(x) & 0 \\ 0 & -\sin(y) \end{bmatrix}$$

y evaluando en los puntos  $P(k_1, k_2)$

$$Hg(x, y) = \begin{bmatrix} -(-1)^{k_1} & 0 \\ 0 & -(-1)^{k_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^{k_1+1} & 0 \\ 0 & (-1)^{k_2+1} \end{bmatrix}$$

que es una matriz diagonal para cualquier par de la forma  $(k_1, k_2)$ , luego sus valores propios son

$$\lambda_1(k_1, k_2) = (-1)^{k_1+1} = \begin{cases} 1 & \text{Si } k_1 \text{ es impar} \\ -1 & \text{Si } k_1 \text{ es par} \end{cases}$$

$$\lambda_2(k_1, k_2) = (-1)^{k_2+1} = \begin{cases} 1 & \text{Si } k_2 \text{ es impar} \\ -1 & \text{Si } k_2 \text{ es par} \end{cases}$$

Luego tendremos

$$k_1, k_2 \text{ pares} \rightarrow \lambda_1(k_1, k_2), \lambda_2(k_1, k_2) > 0 \rightarrow P(k_1, k_2) \text{ mínimo local estricto}$$

$$k_1, k_2 \text{ impares} \rightarrow \lambda_1(k_1, k_2), \lambda_2(k_1, k_2) < 0 \rightarrow P(k_1, k_2) \text{ máximo local estricto}$$

En cualquier otro caso el punto estacionario será un punto de silla.

Podemos obtener el mismo resultado viendo que las funciones  $\cos(x)$  y  $\sin(y)$  están acotadas por  $-1$  y  $1$ , y que por tanto en los puntos en los que ambas valen  $-1$  se obtiene un mínimo, mientras que en los puntos donde ambas funciones valen  $1$  se obtiene un máximo. Estos puntos son

$$\cos(x) = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi = (2k+1)\pi = k_1\pi \text{ con } k_1 \text{ impar}$$

$$\sin(x) = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi = \frac{\pi}{2} + k_2\pi \text{ con } k_2 \text{ impar}$$

para los puntos de mínimo y

$$\cos(x) = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi = k_1\pi \text{ con } k_1 \text{ par}$$

$$\sin(x) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + k_2\pi \text{ con } k_2 \text{ par}$$

para los puntos de máximo, tal y como hemos obtenido antes.

- (b) Los valores máximo y mínimo de  $f(x, y)$  se obtienen teniendo en cuenta que  $\cos(x)$  y  $\sin(x)$  tienen como valores máximos por  $-1$  y  $1$ . De ahí que

$$\max f(x, y) = e^1 e^1 = e^2$$

$$\min f(x, y) = e^{-1} e^{-1} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

### 3. Sea $\Omega$ el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ definido como

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq 1 + y; \quad x^2 + y^2 \leq 25\}$$

Contesta razonadamente a cada uno de los siguientes apartados:

- (a) (0.5 puntos) Plantea explícitamente, sin resolver, el problema que permite determinar los puntos del conjunto  $\Omega$  que se encuentran a máxima y mínima distancia de los puntos del conjunto  $\Omega^*$  definido como:

$$\Omega^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-10)^2 + (y-10)^2 = 1\}$$

- (b) (2.2 puntos) Plantea y resuelve utilizando multiplicadores el problema correspondiente para determinar los extremos locales y globales de la función  $f(x, y) = 6x + 8y$  sobre el conjunto  $\Omega$ .

**NOTA:** Para que el problema esté completo, cualquier resultado obtenido debe estar razonado adecuadamente, es decir, si un punto es extremo se deben dar razones matemáticas que lo demuestren. Emplea en todos los cálculos los valores exactos de los puntos obtenidos.

*Solución:* Resolvemos cada uno de los apartados

- (a) Para calcular la máxima y mínima distancia entre un punto de  $\Omega$  y otro de  $\Omega^*$ , tomamos en primer lugar un punto de  $\Omega$ , por ejemplo,  $P = (x_1, y_1)$  y tomamos otro punto de  $\Omega^*$ , por ejemplo  $Q = (x_2, y_2)$ , y el problema de forma descriptiva puede expresarse como

$$\begin{array}{ll} \text{Optimizar} & d(P, Q) \\ \text{s.a.} & P \in \Omega \\ & Q \in \Omega^* \end{array}$$

o de forma explícita, tal y como se pide en el enunciado

$$\begin{array}{ll} \text{Optimizar} & \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ \text{s.a.} & x_1^2 \leq 1 + y_1 \\ & x_1^2 + y_1^2 \leq 25 \\ & (x_2 - 10)^2 + (y_2 - 10)^2 = 1 \end{array}$$

- (b) Ahora tenemos que resolver el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Optimizar} & 6x + 8y \\ \text{s.a.} & x^2 \leq 1 + y \\ & x^2 + y^2 \leq 25 \end{array}$$

utilizando las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker.

Para garantizar la solución del problema realizaremos algunas consideraciones previas sobre el problema. En primer lugar vemos que el conjunto factible  $\Omega$  es intersección de dos subconjuntos

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq 1 + y, \quad x^2 + y^2 \leq 25\} = \Omega_1 \cap \Omega_2$$

siendo

$$\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq 1 + y\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g_1^*(x, y) \leq 1\}$$

siendo

$$g_1^*(x, y) = x^2 - y$$

y

$$\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g_2^*(x, y) \leq 25\}$$

siendo

$$g_2^*(x, y) = x^2 + y^2$$

El conjunto  $\Omega_1$  será convexo si la función  $g_1^*(x, y)$  es convexa, pero como  $g_1^*(x, y)$  es de clase  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$  podemos utilizar su matriz hessiana

$$Hg_1^*(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que es semidefinida positiva en  $\mathbb{R}^2$  y por la caracterización de segundo orden de funciones convexas,  $g_1^*$  es una función convexa.

Para el conjunto  $\Omega_2$  ocurre lo mismo puesto que  $g_2^*(x, y)$  es también una función convexa, de hecho es estrictamente convexa, ya que

$$Hg_2^*(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Como  $\Omega$  es la intersección de dos conjuntos convexas, es también un conjunto convexo de  $\mathbb{R}^2$

En cuanto a la función objetivo

$$f(x, y) = 6x + 8y$$

es una función lineal y por tanto es convexa y cóncava.

Con las propiedades de convexidad de la función objetivo  $f(x, y)$  y del conjunto factible  $\Omega$ , podemos obtener algunos resultados del problema de optimización sin la realización de cálculos previos.

El problema es convexo, es decir, la función objetivo  $f(x)$  es una función convexa y el conjunto factible  $\Omega$  es un conjunto convexo. Ahora bien teniendo en cuenta que  $f(x, y)$  es una función continua sobre un compacto (es cerrado -contiene a la frontera- y acotado -está dentro de una esfera de radio 5-) podemos decir:

- i. Por el teorema de Weierstrass, la función  $f(x, y)$  tiene máximo y mínimo (global) sobre el conjunto  $\Omega$ .
- ii. Como  $f$  es convexa sobre  $\Omega$  convexo y compacto, y por el apartado anterior, tiene máximo  $\Rightarrow$  El máximo se encuentra en la frontera del conjunto.
- iii. Como  $f$  es cóncava sobre  $\Omega$  convexo y compacto, y por el apartado anterior, tiene mínimo  $\Rightarrow$  El mínimo se encuentra en la frontera del conjunto.
- iv. Como  $f$  es convexa sobre  $\Omega$  convexo  $\Rightarrow$  Todo mínimo local es global.
- v. Como  $f$  es cóncava sobre  $\Omega$  convexo  $\Rightarrow$  Todo máximo local es global.
- vi. Como  $f$  es convexa sobre  $\Omega$  convexo y  $f \in \mathcal{C}^1 \Rightarrow$  Un punto que cumpla las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker para ser mínimo local, automáticamente lo será.
- vii. Como  $f$  es cóncava sobre  $\Omega$  convexo y  $f \in \mathcal{C}^1 \Rightarrow$  Un punto que cumpla las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker para ser máximo local, automáticamente lo será.
- viii. Como  $\Omega$  es un conjunto convexo con interior no vacío -por ejemplo, el origen  $(0, 0)$  está en su interior  $\Rightarrow$  Todos los puntos cumplen las hipótesis de cualificación de las restricciones.
- ix. Un extremo global es también un extremo local, pero como cualquier punto factible cumple por el apartado anterior, las hipótesis de cualificación de las restricciones, entonces un mínimo o máximo global debe cumplir las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker. De hecho, como el máximo y mínimo (globales) existen por el teorema de Weierstrass, los obtendremos utilizando las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker.

Utilizaremos ahora los multiplicadores para construir la función Lagrangiana y encontrar los puntos extremos.

$$L(x, y, \mu_1, \mu_2) = 6x + 8y + \mu_1(x^2 - y - 1) + \mu_2(x^2 + y^2 - 25)$$

y planteamos las condiciones de KKT:

- i. Condición Estacionaria

$$\begin{aligned} 6 + 2\mu_1 x + 2\mu_2 x &= 0 \\ 8 - \mu_1 + 2\mu_2 y &= 0 \end{aligned}$$

- ii. Condición de factibilidad

$$\begin{aligned} x^2 - y - 1 &\leq 0 \\ x^2 + y^2 - 25 &\leq 0 \end{aligned}$$

- iii. Condición de positividad

$$\begin{aligned} \mu_1, \mu_2 &\geq 0 \Rightarrow \text{Para mínimo} \\ \mu_1, \mu_2 &\leq 0 \Rightarrow \text{Para máximo} \end{aligned}$$

- iv. Condición de holgura

$$\begin{aligned} \mu_1(x^2 - y - 1) &= 0 \\ \mu_2(x^2 + y^2 - 25) &= 0 \end{aligned}$$

Como siempre, es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones de la condición estacionaria y la condición de holgura:

$$\left. \begin{aligned} 6 + 2\mu_1 x + 2\mu_2 x &= 0 \\ 8 - \mu_1 + 2\mu_2 y &= 0 \\ \mu_1(x^2 - y - 1) &= 0 \\ \mu_2(x^2 + y^2 - 25) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

(c) En el cual distinguimos los correspondientes casos:

$$\left\{ \begin{aligned} \mu_1 &= 0 \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \mu_2 &= 0 && \Rightarrow \text{CASO I} \\ (x^2 + y^2 - 25) &= 0 && \Rightarrow \text{CASO II} \end{aligned} \right. \\ (x^2 - y - 1) &= 0 \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \mu_1 &= 0 && \Rightarrow \text{CASO III} \\ (x^2 + y^2 - 25) &= 0 && \Rightarrow \text{CASO IV} \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.$$

Revisamos cada uno de los casos:

i. CASO I:  $\mu_1 = \mu_2 = 0$

En este caso las dos primeras ecuaciones del sistema 1 nos dan

$$\begin{aligned} 6 &= 0 \\ 8 &= 0 \end{aligned}$$

que es obviamente imposible, luego este caso no es válido.

ii. CASO II:  $\mu_1 = 0, x^2 + y^2 - 25 = 0$

En este caso el sistema queda

$$\left. \begin{aligned} 6 + 2\mu_2 x &= 0 \\ 8 + 2\mu_2 y &= 0 \\ \mu_1 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 25 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Si despejamos  $x$  e  $y$  de la primera ecuación (podemos hacerlo puesto que  $2\mu_2 x = -6$  y por tanto  $\mu_2 \neq 0$ ), tendremos

$$\begin{aligned} x &= -\frac{6}{2\mu_2} \\ y &= -\frac{8}{2\mu_2} \end{aligned}$$

y sustituyendo en la última ecuación

$$\left(-\frac{6}{2\mu_2}\right)^2 + \left(-\frac{8}{2\mu_2}\right)^2 = 25$$

desarrollando

$$\frac{36}{4\mu_2^2} + \frac{64}{4\mu_2^2} = 25 \Rightarrow \frac{100}{4\mu_2^2} = 25 \Rightarrow 100 = 100\mu_2^2$$

de donde está claro que

$$\mu_2^2 = 1$$

y de ahí tendremos 2 valores

$$\mu_2 = 1 \quad \text{y} \quad \mu_2 = -1$$

y sustituyendo en  $x$  e  $y$ , obtenemos 2 puntos

$$\begin{aligned} P_1 &= (-3, -4) & \mu_1 &= 0 & \mu_2 &= 1 \\ P_2 &= (3, 4) & \mu_1 &= 0 & \mu_2 &= -1 \end{aligned}$$

iii. CASO III:  $(x^2 - y - 1) = 0, \mu_2 = 0$

El sistema queda

$$\left. \begin{aligned} 6 + 2\mu_1 x &= 0 \\ 8 - \mu_1 &= 0 \\ x^2 - y - 1 &= 0 \\ \mu_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

De la segunda ecuación

$$\mu_1 = 8$$

valor que sustituido en la primera

$$6 + 2\mu_1 x = 0 \Rightarrow 6 + 16x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{6}{16} = -\frac{3}{8}$$

resultado que al sustituirlo en la tercera

$$y = x^2 - 1 \Rightarrow y = \left(-\frac{3}{8}\right)^2 - 1 = \frac{9}{64} - 1 = -\frac{55}{64}$$

que nos da otro punto

$$P_3 = \left(-\frac{3}{8}, -\frac{55}{64}\right) \quad \mu_1 = 8 \quad \mu_2 = 0$$

iv. CASO IV:  $(x^2 - y - 1) = 0$ ,  $(x^2 + y^2 - 25)$

En el último caso tendremos

$$\left. \begin{aligned} 6 + 2\mu_1 x + 2\mu_2 x &= 0 \\ 8 - \mu_1 + 2\mu_2 y &= 0 \\ x^2 - y - 1 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 25 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Restando las dos últimas ecuaciones tendremos

$$(x^2 - y - 1) - (x^2 + y^2 - 25) = 0 \Leftrightarrow x^2 - y - 1 - x^2 - y^2 + 25 = 0$$

o equivalentemente

$$y^2 + y - 24 = 0$$

cuya solución es

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 * 24}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{97}}{2}$$

y sustituyendo en la tercera para  $x^2$

$$x^2 = 1 + y = 1 + \frac{-1 \pm \sqrt{97}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{97}}{2}$$

está claro que para el valor negativo de la raíz no tenemos solución real ya que

$$x^2 = \frac{1 - \sqrt{97}}{2} < 0$$

y solamente nos queda la solución positiva

$$x^2 = \frac{1 + \sqrt{97}}{2}$$

cuyas soluciones ahora son

$$x = \pm \sqrt{\frac{1 + \sqrt{97}}{2}}$$

De esta forma tenemos dos nuevos puntos

$$P_4 = \left( \sqrt{\frac{1 + \sqrt{97}}{2}}, \frac{-1 + \sqrt{97}}{2} \right) = (2.3290, 4.4244)$$

$$P_5 = \left( -\sqrt{\frac{1 + \sqrt{97}}{2}}, \frac{-1 + \sqrt{97}}{2} \right) = (-2.3290, 4.4244)$$

Sólo resta por calcular los valores de  $\mu_1$  y  $\mu_2$  para cada punto. Este cálculo se realiza utilizando las dos primeras ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} 6 + 2\mu_1 x + 2\mu_2 x &= 0 \\ 8 - \mu_1 + 2\mu_2 y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2\mu_1 x + 2\mu_2 x &= -6 \\ -\mu_1 + 2\mu_2 y &= -8 \end{aligned} \right\}$$

que es un sistema lineal, ya que  $x$  y  $y$  serían conocidas. La solución general para el sistema es

$$\mu_1 = \frac{8x - 6y}{x(2y + 1)}$$

$$\mu_2 = \frac{-(3 + 8x)}{x(2y + 1)}$$

y sustituyendo los puntos

$$P_4 = (2.3290, 4.4244) \quad \mu_1 = -0.3450 \quad \mu_2 = -0.9431$$

$$P_5 = (-2.3290, 4.4244) \quad \mu_1 = 1.9696 \quad \mu_2 = -0.6815$$

Resumimos a continuación la tabla con los puntos obtenidos para comprobar su factibilidad:

Punto	Multiplicadores	Factibilidad	Valor de $f(x)$	Extremo
$P_1 = (-3, -4)$	$\mu_1 = 0 \quad \mu_2 = 1$	NO	-	-
$P_2 = (3, 4)$	$\mu_1 = 0 \quad \mu_2 = -1$	NO	-	-
$P_3 = \left(-\frac{3}{8}, -\frac{55}{64}\right)$	$\mu_1 = 8 \quad \mu_2 = 0$	SI	-9.1250	Mínimo
$P_4 = \left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{97}}{2}}, \frac{-1+\sqrt{97}}{2}\right)$ (2.3290, 4.4244)	$\mu_1 = -0.3450 \quad \mu_2 = -0.9431$	SI	49.3692	Máximo
$P_5 = \left(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{97}}{2}}, \frac{-1+\sqrt{97}}{2}\right)$ (-2.3290, 4.4244)	$\mu_1 = 1.9696 \quad \mu_2 = -0.6815$	SI	21.4212	-

Comprobamos pues que la función tiene un mínimo en el punto  $P_3$  y un máximo en el punto  $P_4$ . En el punto  $P_5$  los multiplicadores son de distinto signo, por tanto, tampoco puede ser un extremo.

Se puede verificar que tanto  $P_3$  como  $P_5$  se encuentran en la frontera de  $\Omega$ , tal y como se había pronosticado al principio.

#### 4. Responde razonadamente a las siguientes cuestiones.

- (a) (0.3 puntos). Dado un problema de minimización no lineal, se sabe que todas las restricciones del problema son lineales y que  $x^*$  es el único punto que cumple las condiciones necesarias de Karush-Kuhn-Tucker. ¿Qué debe cumplirse para que  $x^*$  sea el único óptimo del problema?. Supón que la función objetivo es suficientemente derivable.
- (b) (0.3 puntos). En un problema de programación lineal en forma estándar con 10 variables y 5 restricciones, ¿cuál es el número máximo de soluciones factibles básicas que podemos encontrar?.
- (c) (0.3 puntos). ¿Es convexa la función  $f(x, y, z) = (x-3)^5 + y^2 + z^3$ ? En caso afirmativa, demuéstralo. En caso contrario, indica si existe algún conjunto de  $\mathbb{R}^3$  donde  $f(x, y, z)$  pueda definirse como una función convexa.

Solución:

- (a) Por una parte, puesto que la función es suficientemente derivable, también es continua. Por otra parte como todas las restricciones son lineales, tendremos que el conjunto factible es convexo y que todas sus restricciones cumplen la hipótesis de cualificación de Karlin. El hecho de que un punto cumpla las condiciones necesarias para ser mínimo no implica que lo sea, para que ocurra esto, el punto debe además cumplir alguna hipótesis adicional. Por ejemplo, es fácil comprobar que el problema de restricciones lineales

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & -x^4 - y^4 \\ \text{Sujeto a} & x \geq 0 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

no tiene solución y sin embargo el punto  $(0, 0)$ , con multiplicadores  $(0, 0)$ , cumple las condiciones necesarias de primer y segundo orden para ser mínimo (aunque también máximo).

Observamos en primer lugar que el conjunto factible es no acotado, luego podemos pensar que exigir esta condición podría ser una de las buscadas. Si  $\Omega$  es acotado, como la función es continua, por el teorema de Weierstrass habría óptimo global, que sería también local, pero por otra parte al cumplir las restricciones la hipótesis de cualificación de Karlin, ese óptimo debería cumplir las condiciones de KKT y hemos encontrado una de las condiciones para la unicidad, ya que si existiera otro óptimo local también debería cumplir KKT y hemos dicho que es el único.

¿Qué ocurre si la función es convexa?. En este caso, tendríamos una función convexa, definida sobre un conjunto convexo, luego cualquier punto que cumpla las condiciones de KKT será mínimo local y por tanto global, cualquier otro mínimo debería cumplir las condiciones de KKT, como vemos en el ejemplo anterior la función no es convexa, sino cóncava.

La respuesta correcta a la cuestión sería:  $\Omega$  compacto o  $f(x)$  convexa.

- (b) Recordemos que en un problema en forma estándar las restricciones son de igualdad, por tanto, no es necesario añadir ninguna variable más. Una solución factible básica es una solución básica que además es factible, mientras que una solución básica está asociada a una base, es decir, a un número de vectores linealmente independientes, en nuestro caso ese número es 5, es decir, necesitamos 5 columnas de las 10 que tenemos (una para cada restricción) para poder construir una base y con ella una solución básica, que en principio no sabemos si va a ser o no factible. Luego el número máximo de s.f.b. que podemos obtener es

$$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!(10-5)!} = 252$$

que es la respuesta buscada.



- (c) Para comprobar la convexidad de una función suficientemente derivable, como es el caso, utilizamos la caracterización de segundo orden, es decir, vamos a estudiar el comportamiento del Hessiano de la función.

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 5(x-3)^4 \\ 2y \\ 3z^2 \end{pmatrix} \Rightarrow Hf(x, y, z) = \begin{pmatrix} 20(x-3)^3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6z \end{pmatrix}$$

Comprobamos que al estar en forma diagonal, los elementos de la diagonal principal serán los valores propios de  $Hf(x, y, z)$ , luego

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 20(x-3)^3 \\ \lambda_2 &= 2 \\ \lambda_3 &= 6z \end{aligned}$$

Para que  $Hf$  sea semidefinida positiva y con ello  $f$  convexa debe ocurrir

$$\lambda_k \geq 0 \quad k = 1, 2, 3$$

que implica

$$\lambda_1 = 20(x-3)^3 \geq 0$$

$$\lambda_3 = 6z \geq 0$$

de donde

$$x \geq 3$$

$$z \geq 0$$

luego para que  $f$  sea convexa el conjunto donde debemos definir la función debe ser

$$\Omega = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 3; z \geq 0 \}$$

que es un conjunto convexo por ser intersección de semiespacios.

##### 5. Considera el siguiente problema

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} && 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ &\text{Sujeto a} && \begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 2x_3 &\leq 30 \\ x_1 - 5x_2 - 6x_3 &\leq 40 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned} \end{aligned}$$

Después de poner el problema en forma estándar, se ha resuelto mediante el método SIMPLEX, obteniéndose la siguiente tabla óptima:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4^h$	$x_5^h$	$b$
$x_1$	1	5	2	1	0	30
$x_5^h$	0	-10	-8	-1	1	10
$r$	0	23	7	5	0	150

Utilizando técnicas de análisis post-óptimo y tratando cada apartado de forma independiente determina:

- (a) (0.7 puntos) Encuentra el rango de valores que puede tomar el coeficiente  $c_1$  sin que cambie la solución óptima.
- (b) (0.7 puntos) Encuentra, si existen, la solución y el valor óptimos cuando se cambia el vector  $b = \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix}$ , por el nuevo vector  $b' = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$ .
- (c) (0.7 puntos) Encuentra, si existen, la solución y el valor óptimos, cuando se introduce una nueva variable  $x_6$ , cuyos coeficientes asociados en el problema original son:  $c_6 = 6$  y  $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

*Solución:*

- (a) Como el coeficiente  $c_1$  pertenece a una base, tendremos que encontrar los valores para  $c_1$  de forma que todos los coeficientes de coste relativo de las variables no básicas sean positivos. Utilizamos en todos los casos la ecuación

$$r_k = c_k - c_B B^{-1} A_k$$

teniendo en cuenta el cambio de signo que supone el paso a la forma estándar, es decir, si  $c_1$  es el coeficiente en el problema original de maximizar,  $-c_1$  lo será en el problema de minimizar.

La matriz  $B^{-1}$  es conocida, puesto que el problema original tenía solamente restricciones del tipo  $\leq$ , la matriz buscada estará en las columnas asociadas a las variables de holgura

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Y más sencillo aún, puesto que  $B^{-1}A_k$  es la columna correspondiente a la variable  $x_k$  en la tabla óptima. Por último el vector  $c_B$  es

$$c_B = (-c_1, 0)$$

Calculamos los coeficientes de coste relativo, para el problema de minimización

$$r_2 = c_2 - c_B B^{-1} A_2 = -2 - (-c_1, 0) \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix} = -2 + 5c_1$$

$$r_3 = c_3 - c_B B^{-1} A_3 = -3 - (-c_1, 0) \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix} = -3 + 2c_1$$

$$r_4^h = c_4^h - c_B B^{-1} A_4^h = 0 - (-c_1, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = c_1$$

Para que no haya cambios, los tres coeficientes anteriores deben ser 0:

$$\begin{aligned} -2 + 5c_1 &> 0 \Rightarrow c_1 > 2/5 \\ -3 + 2c_1 &> 0 \Rightarrow c_1 > 3/2 \\ c_1 &> 0 \Rightarrow c_1 > 0 \end{aligned}$$

Este sistema de inecuaciones tiene como solución

$$c_1 > 3/2$$

que es el rango buscado.

- (b) Se trata de un cambio en el vector de términos independientes, por tanto, cambiarán los valores de las variables básicas, llegando incluso a perder su factibilidad. Tendremos una nueva solución

$$x'_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -10 \end{pmatrix}$$

y un nuevo valor objetivo

$$z'_B = (-5, 0) \begin{pmatrix} 20 \\ -10 \end{pmatrix} = -100$$

Como vemos la solución es infactible y para conseguir la nueva solución habrá que aplicar el método simplex dual. La tabla con este cambio queda

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4^h$	$x_5^h$	$b$
$x_1$	1	5	2	1	0	20
$x_5^h$	0	-10	-8	-1	1	-10
$r$	0	23	7	5	0	100

y comprobamos que se trata de una solución factible dual. Aplicamos el método simplex dual, pivotando sobre el elemento encuadrado, siguiendo el criterio de este método, para obtener

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4^h$	$x_5^h$	$b$
$x_1$	1	5/2	0	3/4	1/4	35/2
$x_3$	0	5/4	1	1/8	-1/8	5/4
$r$	0	57/4	0	33/8	7/8	365/4

Luego la solución y el valor óptimo son:

$$\begin{aligned} x^* &= (35/2, 0, 5/4) \\ z^* &= -365/4 \text{ (Minimizar)} \end{aligned}$$

- (c) Al introducir una nueva variable, tenemos que ver si su coeficiente de coste relativo asociado es o no menor que cero para incorporar o no la nueva variable a la base. Calculamos este coeficiente, teniendo de nuevo en cuenta que si  $c_6 = 6$ , es el coeficiente en el problema original, para minimizar tendremos que utilizar  $c'_6 = -c_6 = -6$ .

$$\begin{aligned} r_6 &= c'_6 - c_B B^{-1} A_6 = -6 - (-5, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= -6 - (-5, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -6 + 5 = -1 < 0 \end{aligned}$$

luego la nueva variable puede entrar en la base mejorando la función objetivo. La nueva tabla con esta variable queda

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4^h$	$x_5^h$	$x_6$	$b$
$x_1$	1	5	2	1	0	1	30
$x_5^h$	0	-10	-8	-1	1	0	10
$r$	0	23	7	5	0	-1	150

donde se ha tenido en cuenta que en la tabla óptima no debe aparecer  $A_6$  sino  $B^{-1}A_6$ , como en el resto de columnas. La variable que entra es  $x_6$  mientras que la variable que sale es  $x_1$ , siguiendo los criterios de entrada y salida del simplex. Hay que pivotar sobre el elemento encuadrado.

La siguiente tabla se obtiene fácilmente

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4^h$	$x_5^h$	$x_6$	$b$
$x_6$	1	5	2	1	0	1	30
$x_5^h$	0	-10	-8	-1	1	0	10
$r$	1	28	9	6	0	0	180

6. (1.3 puntos) Un fabricante de juguetes comercializa tres modelos de muñecas: Andadora, Parlanchina y Repollo. La cantidad de materiales y mano de obra para su fabricación así como las existencias de esos materiales vienen dadas en la siguiente tabla:

	Plástico	Telas	Mano de Obra
Andadora	300 g	100 cm	2 h
Parlanchina	450 g	75 cm	1.5 h
Repollo	700 g	150 cm	1.25 h
Disponibilidad	800 Kg	1500 m	8000 h

Andadora y Parlanchina llevan además un pequeño motor eléctrico y las existencias de ese motor son de 800 unidades. El fabricante estima que puede vender no menos de 500 muñecas ni más de 1300 y además, que por estar de moda, la demanda de la muñeca Repollo será superior a la de las otras dos juntas. Sabiendo que el beneficio neto por la venta de las muñecas es: Andadora, 10 euros; Parlanchina, 15 euros; y repollo, 17 euros. Plantea un modelo para maximizar beneficios.

*Solución:* La elección más sencilla para resolver el problema es definir las variables  $A$ ,  $P$  y  $R$ , como el número de muñecas Andadora, Parlanchina y Repollo respectivamente. Con esta definición las restricciones del problema son: Materiales (Plásticos y Telas), Tiempo (Mano de Obra), Motores y Estimaciones de Demanda. Hay que realizar una conversión de unidades previa

- (a) Material Plástico

$$0.3A + 0.4P + 0.7R \leq 800 \quad | \quad 300A + 400P + 700R \leq 800000 \quad |$$

- (b) Material Tela

$$1A + 0.754P + 1.5R \leq 1500 \quad | \quad 100A + 75P + 150R \leq 150000 \quad |$$

- (c) Mano de Obra

$$2A + 1.5P + 1.25R \leq 8000$$

- (d) Motores

$$A + P \leq 800$$

- (e) Demanda

$$A + P + R \leq 1300$$

$$A + P + R \geq 500$$

$$R \geq A + P$$

- (f) Beneficio

$$10A + 15P + 17R$$

- (g) No negatividad

$$A, P, R \geq 0$$