



1. Dada la siguiente función

$$f(x) = e^{-x} + (x - 4)^2$$

- (a) (1 punto) Utiliza un paso del método de estimación cuadrática (o método cuadrático) para obtener una aproximación del mínimo que la función tiene en el intervalo $[3, 5]$.
(b) (0.5 puntos) ¿Cuántos mínimos tiene $f(x)$ en \mathbb{R} ?

NOTA: Utiliza en TODOS los cálculos 4 cifras decimales significativas por redondeo.

Solución:

- (a) Para utilizar el método cuadrático necesitamos 3 puntos y podemos tomar los siguientes

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 \\ x_2 &= 4 \\ x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Evalúamos la función en cada uno de los puntos

$$f_1 = f(x_1) = f(3) = 1.0498$$

$$f_2 = f(x_2) = f(4) = 0.0183$$

$$f_3 = f(x_3) = f(5) = 1.0067$$

Utilizando las fórmulas correspondientes obtenemos

$$a_1 = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} = \frac{0.0183 - 1.0498}{4 - 3} = -1.0315$$

$$a_2 = \frac{1}{x_3 - x_2} \left(\frac{f_3 - f_1}{x_3 - x_1} - a_1 \right) = \frac{1}{5 - 4} \left(\frac{1.0067 - 1.0498}{5 - 3} + 1.0315 \right) = 1.0100$$

y el valor aproximado buscado es

$$x^* = \frac{(x_1 + x_2)}{2} - \frac{a_1}{2a_2} = \frac{3 + 4}{2} - \frac{-1.0315}{2 * 1.0100} = 4.0106$$

- (b) Podemos comprobar que la función es estrictamente convexa

$$f(x) = e^{-x} + (x - 4)^2$$

$$f'(x) = -e^{-x} + 2(x - 4)$$

$$f''(x) = e^{-x} + 2 > 0$$

La derivada segunda $f''(x)$ es estrictamente positiva, luego $f(x)$ es una función estrictamente convexa en \mathbb{R} , por tanto si la función $f(x)$ tuviera mínimo, que lo tiene por el enunciado del problema, este sería único. La respuesta a la cuestión es que la función $f(x)$ solamente tiene un mínimo en \mathbb{R} .

2. Dada la función

$$f(x, y) = \cos(x^2) \sin(y^2) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

- (a) (1 punto) Encuentra TODOS sus puntos estacionarios en \mathbb{R}^2 .
 (b) (0.6 puntos) ¿Cumple el punto $(0, 0)$ las condiciones necesarias de segundo orden para ser un extremo?. ¿Y las suficientes?. Estudia el comportamiento de la función cerca del punto $(0, 0)$ para determinar su naturaleza (máximo, mínimo, punto de silla).
 (c) (0.6 puntos) ¿Qué se puede decir de los extremos globales de $f(x, y)$?

Solución:

- (a) Los puntos estacionarios de $f(x, y) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ son aquellos puntos que anulan su gradiente

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} -2x \sin(x^2) \sin(y^2) \\ 2y \cos(x^2) \cos(y^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De la primera ecuación obtenemos

$$2x \sin(x^2) \sin(y^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = k_1\pi \\ y^2 = k_2\pi \end{cases}$$

Puesto que $x^2, y^2 \geq 0$, los valores de k_1 y k_2 deben ser positivos, es decir, $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. Llevando estos valores a la segunda de las ecuaciones anteriores obtenemos

$$x = 0 \Rightarrow 2y \cos(x^2) \cos(y^2) = 2y \cos(y^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y^2 = \frac{\pi}{2} + k_3\pi \end{cases}$$

$$x^2 = k_1\pi \Rightarrow 2y \cos(x^2) \cos(y^2) = 2y (-1)^{k_1} \cos(y^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y^2 = \frac{\pi}{2} + k_4\pi \end{cases}$$

$$y^2 = k_2\pi \Rightarrow 2y \cos(x^2) \cos(y^2) = 2k_2\pi \cos(x^2) (-1)^{k_2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{\pi}{2} + k_5\pi \end{cases}$$

donde de nuevo los valores de los parámetros k_3, k_4 y k_5 deben ser positivos.

Podemos observar además que para $y \neq 0$, se anulan ambas ecuaciones independientemente del valor de la variable x , luego los puntos de la forma

$$P_0(x) = (x, 0) \quad x \in \mathbb{R}$$

son puntos críticos de $f(x, y)$.

El conjunto de todos los puntos críticos, utilizando los dos valores para la raíz cuadrada y combinando las soluciones anteriores (tomando una de cada ecuación para que ambas se anulen), estaría formado por los siguientes puntos:

$$P_0(x) = (x, 0) \quad x \in \mathbb{R}$$

$$P_1 = (0, 0) \quad \text{Ya incluido en la familia } P_0(x)$$

$$P_2^+(k_3) = \left(0, \sqrt{\frac{\pi}{2} + k_3\pi}\right)$$

$$P_2^-(k_3) = \left(0, -\sqrt{\frac{\pi}{2} + k_3\pi}\right)$$

$$P_3^+(k_1) = \left(\sqrt{k_1\pi}, 0\right) \text{ Ya incluido en la familia } P_0(x)$$

$$P_3^-(k_1) = \left(-\sqrt{k_1\pi}, 0\right) \text{ Ya incluido en la familia } P_0(x)$$

$$\begin{aligned}
P_4^{++}(k_1, k_4) &= \left(\sqrt{k_1\pi}, \sqrt{\frac{\pi}{2} + k_4\pi} \right) \\
P_4^{+-}(k_1, k_4) &= \left(\sqrt{k_1\pi}, -\sqrt{\frac{\pi}{2} + k_4\pi} \right) \\
P_4^{-+}(k_1, k_4) &= \left(-\sqrt{k_1\pi}, \sqrt{\frac{\pi}{2} + k_4\pi} \right) \\
P_4^{--}(k_1, k_4) &= \left(-\sqrt{k_1\pi}, -\sqrt{\frac{\pi}{2} + k_4\pi} \right) \\
\\
P_5^{++}(k_2, k_5) &= \left(\sqrt{\frac{\pi}{2} + k_5\pi}, \sqrt{k_2\pi} \right) \\
P_5^{+-}(k_2, k_5) &= \left(\sqrt{\frac{\pi}{2} + k_5\pi}, -\sqrt{k_2\pi} \right) \\
P_5^{-+}(k_2, k_5) &= \left(-\sqrt{\frac{\pi}{2} + k_5\pi}, \sqrt{k_2\pi} \right) \\
P_5^{--}(k_2, k_5) &= \left(-\sqrt{\frac{\pi}{2} + k_5\pi}, -\sqrt{k_2\pi} \right)
\end{aligned}$$

Se utiliza un parámetro distinto para cada punto porque son independientes.

- (b) Como se ha comprobado en el apartado anterior, el punto $P_1 = (0, 0)$ es un punto crítico puesto que cumple las condiciones necesarias de primer orden. Para comprobar si cumple las condiciones de segundo orden, obtenemos el hessiano de la función

$$\begin{aligned}
Hf(x, y) &= \begin{pmatrix} -2\sin(x^2)\sin(y^2) - 4x^2\cos(x^2)\sin(y^2) & -4xy\sin(x^2)\cos(y^2) \\ -4xy\sin(x^2)\cos(y^2) & 2\cos(x^2)\cos(y^2) - 4y^2\cos(x^2)\sin(y^2) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -2\sin(y^2)(\sin(x^2) + 2x^2\cos(x^2)) & -4xy\sin(x^2)\cos(y^2) \\ -4xy\sin(x^2)\cos(y^2) & 2\cos(x^2)(\cos(y^2) - 2y^2\sin(y^2)) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

y evaluando en $P_1 = (0, 0)$ obtenemos la matriz hessiana

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

que es semidefinida positiva $\Rightarrow P_1$ cumple las condiciones necesarias de segundo orden para ser mínimo local.

Sin embargo, por el mismo motivo $Hf(0, 0)$ no es definida positiva y tampoco $f(x, y)$ es convexa, de ahí que P_1 no cumple condiciones suficientes de ningún tipo. Con estas condiciones no se puede afirmar que P_1 sea un mínimo.

Para despejar las dudas acerca de la naturaleza de P_1 , se estudiará a continuación el comportamiento de la función cerca del punto $(0, 0)$.

Por una parte la función en P_1 vale 0, mientras que los valores de $f(x, y)$ cerca de P_1 lo obtendremos con el siguiente análisis:

$$\text{Dados } x, y \in \left[-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right] \Rightarrow x^2, y^2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos(x^2) \geq 0, \sin(y^2) \geq 0$$

luego

$$f(x, y) = \cos(x^2)\sin(y^2) \geq 0 = f(0, 0)$$

al menos dentro del cuadrado

$$(x, y) \in \left[-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right] \times \left[-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right]$$

como P_1 es el centro de ese cuadrado, podemos afirmar que hay una bola de centro P_1 y radio $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (que está contenida en el cuadrado anterior) donde la función siempre toma valores ≥ 0 , mientras que en P_1 vale 0, luego en P_1 , la función tiene un mínimo local, que no es estricto, puesto que en los puntos de la forma

$$\left(\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}, y\right) \text{ o } (x, 0)$$

la función toma el mismo valor que en P_1 .

(c) Dado que la función $f(x, y)$ es un producto de 2 funciones que están acotadas en valor absoluto por 1, tendremos

$$|f(x, y)| = |\cos(x^2) \sin(y^2)| = |\cos(x^2)| |\sin(y^2)| \leq 1 \cdot 1 = 1$$

es decir

$$-1 \leq f(x, y) \leq 1$$

Los puntos donde se alcancen estos valores serán máximos y mínimos globales de la función. Estos puntos son algunos los puntos críticos obtenidos en el primer apartado. El valor máximo se alcanza cuando la función toma el valor 1

$$f(x, y) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x^2) = 1 \text{ y } \sin(y^2) = 1 \\ \text{ó} \\ \cos(x^2) = -1 \text{ y } \sin(y^2) = -1 \end{cases}$$

es decir

$$f(x, y) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2k_1\pi \text{ y } y^2 = \frac{\pi}{2} + 2k_2\pi \\ \text{ó} \\ x^2 = 2(k_1 + 1)\pi \text{ y } y^2 = \frac{3\pi}{2} + 2k_2\pi = \frac{\pi}{2} + (2k_2 + 1)\pi \end{cases}$$

Que podemos comprobar son casos particulares de los puntos del tipo P_4 tomando valores pares o impares en ambos parámetros k .

Mientras que tomará el valor -1 en los siguientes puntos

$$f(x, y) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x^2) = 1 \text{ y } \sin(y^2) = -1 \\ \text{ó} \\ \cos(x^2) = -1 \text{ y } \sin(y^2) = 1 \end{cases}$$

es decir

$$f(x, y) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2k_1\pi \text{ y } y^2 = \frac{3\pi}{2} + 2k_2\pi = \frac{\pi}{2} + (2k_2 + 1)\pi \\ \text{ó} \\ x^2 = 2(k_1 + 1)\pi \text{ y } y^2 = \frac{\pi}{2} + 2k_2\pi \end{cases}$$

correspondientes a los valores del tipo P_4 tomando valores par-impar y viceversa en sus argumentos. Notar que en los puntos de la forma P_5 la función toma el valor 0.

3. Sea Ω el conjunto de puntos de \mathbb{R}^3 definido como

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1; x + y + z = 1\}$$

Contesta razonadamente a cada uno de los siguientes apartados:

- (1.8 puntos) Plantea y resuelve utilizando multiplicadores el problema correspondiente para determinar aquel o aquellos puntos de Ω cuyas distancias al origen sean máxima y mínima respectivamente.
- (0.6 punto) ¿Cuáles serán los puntos de máxima y mínima distancia al origen de los puntos del conjunto $\partial\Omega$? Siendo

$$\partial\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1; x + y + z = 1\}?$$

NOTA: Para que el problema esté completo, cualquier resultado obtenido debe estar razonado adecuadamente, es decir, si un punto es extremo se deben dar razones matemáticas para demostrarlo. Emplea en todos los cálculos los valores exactos de los puntos obtenidos.

Solución:

- El problema que hay que resolver es

$$\begin{array}{ll} \text{Optimizar} & x^2 + y^2 + z^2 \\ \text{s.a.} & x^2 + y^2 \leq 1 \\ & x + y + z = 1 \end{array}$$

Donde hemos cambiado la función distancia al origen, $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, por la anterior, ya que como se comentó en clase este cambio podía hacerse por el teorema de la optimización de funciones compuestas.

Se puede comprobar fácilmente, calculando su Hessiano, que $f(x, y, z)$ es una función estrictamente convexa.

$$Hf(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ definida positiva}$$

Y del mismo modo podemos comprobar que Ω es un conjunto convexo puesto que es intersección de un conjunto de la forma $g(x, y, z) \leq k$ con g convexa, y un hiperplano que es convexo.

$$\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$$

donde

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \\ \Omega_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}\end{aligned}$$

con

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 \Leftrightarrow Hg(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ semidefinida positiva} \Rightarrow \Omega_1 \text{ convexo}$$

Luego estamos ante un problema de optimización convexa. Además la función es continua y el conjunto es cerrado y acotado, por tanto, haciendo uso del teorema de Weierstrass podemos asegurar que el problema tiene solución, es decir, existen al menos dos valores en Ω donde la función alcanza respectivamente el mínimo y el máximo.

Antes de resolver el problema mediante multiplicadores podemos observar que el máximo se encontrará en la frontera del conjunto, al tratarse de la optimización de una función convexa sobre un conjunto convexo y compacto y existir el máximo del problema.

Por último como la función es convexa y derivable sobre un conjunto convexo, las condiciones de KKT para mínimo son suficientes.

La hipótesis de cualificación de las restricciones que se cumple en este caso, no es ni la condición de Karlin, puesto que hay una restricción no lineal, ni la condición de Slater, puesto que el interior del conjunto es vacío, ya que estamos en \mathbb{R}^3 y no hay ninguna bola enteramente contenida en el conjunto Ω , puesto que este conjunto es una superficie.

La única condición que puede cumplirse es la de regularidad. Vemos a continuación los posibles puntos irregulares para las restricciones. Indicamos a continuación el conjunto de vectores para los que hay que comprobar la independencia en los dos casos posibles: cuando g sea activa y cuando no lo sea

$$\text{CASO I: } g(x, y, z) \text{ activa} \Rightarrow \{\nabla h, \nabla g\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{CASO II: } g(x, y, z) \text{ no activa} \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

En el caso II vemos que la familia de vectores siempre es linealmente independiente, esto implica que los puntos factibles para los cuales la restricción de desigualdad sea no activa, son regulares.

En el caso I, podemos comprobar que cuando $x = y = 0$ la familia de vectores es linealmente dependiente, es decir, para puntos de la forma $(0, 0, z)$. Sin embargo, como los puntos en cuestión deben ser factibles y en ellos la restricción de desigualdad debe ser activa, ocurre que para los puntos anteriores debería ocurrir

$$\begin{aligned}0 + 0 + z &= 1 \\ 0^2 + 0^2 &= 1\end{aligned}$$

que como vemos no tiene solución. No hay, por tanto, puntos irregulares, todos los puntos factibles son regulares y los posibles extremos del problema tendrán que cumplir las condiciones de KKT.

Planteamos finalmente las condiciones de KKT para este problema: como hay una restricción de desigualdad y una de igualdad, utilizaremos μ y λ para representar el multiplicador correspondiente. Una vez que se ha determinado que las condiciones de KKT proporcionarán la solución al problema, indicamos aquí dichas condiciones:

- Condición estacionaria

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

- Condición de factibilidad

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &\leq 1 \\ x + y + z &= 1\end{aligned}$$

- Condición de positividad[negatividad]

$$\mu \geq 0 \text{ para mínimo } [\leq 0 \text{ para máximo}]$$

recordando que este criterio se aplica para restricciones del tipo $g(x) \leq 0$.

- Condición de holgura

$$\mu(x^2 + y^2 - 1) = 0$$

El sistema que debemos resolver es

$$\begin{aligned} 2x + 2\mu x + \lambda &= 0 \\ 2y + 2\mu y + \lambda &= 0 \\ 2z + \lambda &= 0 \\ \mu(x^2 + y^2 - 1) &= 0 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que las soluciones deben ser factibles para la restricción de desigualdad (esto no es necesario para la restricción de igualdad puesto que es una de las restricciones del sistema).

Resolvemos, como se ha visto en clase, para la ecuación de holgura en sus dos casos

$$\begin{aligned} \text{CASO I} &: \mu = 0 \\ \text{CASO II} &: x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

que analizamos a continuación.

- CASO I: $\mu = 0$.
En este caso el sistema queda

$$\begin{aligned} 2x + \lambda &= 0 \\ 2y + \lambda &= 0 \\ 2z + \lambda &= 0 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

y está claro que de las tres primeras ecuaciones

$$x = y = z = \frac{\lambda}{2}$$

sustituyendo en la ecuación del plano

$$3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

y el punto obtenido es

$$P_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \quad \mu = 0 \quad \lambda = -\frac{2}{3}$$

que es factible puesto que

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9} < 1$$

- CASO II: $x^2 + y^2 - 1 = 0$
En este caso el sistema queda

$$\begin{aligned} 2x + 2\mu x + \lambda &= 0 \\ 2y + 2\mu y + \lambda &= 0 \\ 2z + \lambda &= 0 \\ x^2 + y^2 - 1 &= 0 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

que se resuelve observando que la primera y segunda ecuación son la misma salvo la variable utilizada. Si restamos ambas ecuaciones y sacamos el factor común adecuado obtenemos

$$2(x - y)(1 + \mu) = 0$$

que tiene por soluciones

$$\begin{aligned} \mu &= -1 \\ &\text{ó} \\ x &= y \end{aligned}$$

Para el caso $\mu = -1$ obtenemos sustituyendo en la primera ecuación (o en la segunda)

$$\lambda = 0$$

que llevado a su vez a la tercera, proporciona el valor para la z

$$z = 0$$

Finalmente quedarían por determinar los valores de x e y , que se obtienen de las 2 últimas ecuaciones

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1 \\ x + y &= 1 \end{aligned}$$

Sistema que se resuelve fácilmente despejando de la segunda ecuación y sustituyendo en la primera

$$y = 1 - x \Rightarrow x^2 + (1 - x)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + x^2 - 2x + 1 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x = 0$$

que tiene por soluciones

$$\begin{aligned} x &= 0 \Rightarrow y = 1 \\ x &= 1 \Rightarrow y = 0 \end{aligned}$$

y se obtienen 2 puntos

$$\begin{aligned} P_2 &= (1, 0, 0) & \mu &= -1 & \lambda &= 0 \\ P_3 &= (0, 1, 0) & \mu &= -1 & \lambda &= 0 \end{aligned}$$

Para el caso $x = y$, sustituyendo en la cuarta ecuación

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

el valor de z se obtiene de la última ecuación

$$z = 1 - x - y \Rightarrow z = 1 - 2x \Leftrightarrow z = 1 \mp 2 \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 \mp \sqrt{2}$$

Los valores para λ son

$$\lambda = -2z = -2(1 \mp \sqrt{2}) = -2 \pm 2\sqrt{2}$$

Mientras que para μ

$$2x + 2\mu x + \lambda = 0 \Rightarrow 2x + 2\mu x - 2z = 0 \Rightarrow \mu x = z - x \Rightarrow \mu x = (1 - 2x) - x$$

y obtenemos una expresión sencilla para μ en términos de x

$$\mu = \frac{1}{x} - 3 = \pm\sqrt{2} - 3$$

Los puntos obtenidos son

$$P_4 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 - \sqrt{2} \right) \quad \mu = \sqrt{2} - 3 \quad \lambda = -2 + 2\sqrt{2}$$

$$P_5 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \sqrt{2} \right) \quad \mu = -\sqrt{2} - 3 \quad \lambda = -2 - 2\sqrt{2}$$

Como hemos dicho antes, la solución al problema debe ser alguno de estos puntos, puesto que se ha deducido que deben cumplir las condiciones de KKT y P_k , $k = 1, \dots, 5$ son los únicos que las cumplen. Evaluando la función en cada uno de ellos podemos obtener el máximo y el mínimo buscado

$$f(P_1) = 3 \left(\frac{1}{3} \right)^2 = \frac{1}{3}$$

$$f(P_2) = f(P_3) = 1$$

$$f(P_4) = 4 - 2\sqrt{2}$$

$$f(P_5) = 4 + 2\sqrt{2}$$

Luego P_5 es el máximo y P_1 es el mínimo.

- (b) El problema es buscar el máximo y el mínimo sobre la frontera del conjunto Ω , pero este es uno de los casos contemplados en el apartado anterior, concretamente el caso II, cuando $x^2 + y^2 = 1$, luego los puntos que vamos a obtener al resolver el problema bajo estas restricciones serán

$$P_2, P_3, P_4 \text{ y } P_5$$

Está claro que el máximo seguirá siendo P_5 , mientras que los mínimos (en este caso son dos) serán P_2 y P_3 . Notar que aunque el multiplicador asociado a P_2 y P_3 es negativo, $\mu = -1$, el problema sobre $\partial\Omega$ es un problema con restricciones de igualdad y el signo del multiplicador no afecta en estos problemas.

Se observa además que P_1 era un punto del interior de Ω y por tanto ya no está en $\partial\Omega$.

4. Discute la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes proposiciones

- (a) (0.3 puntos) “En el método de las 2 fases, el problema inicial de la fase I (problema $P1$) siempre tiene solución”
- (b) (0.3 puntos) “El método optimización de Newton en n variables es exacto para cualquier función $f(\mathbf{x})$ de clase $\mathcal{C}^2(\Omega)$, siendo Ω un conjunto convexo de \mathbb{R}^n ”
- (c) (0.3 puntos) “El conjunto $\partial\Omega$ del ejercicio 3 es convexo”

Solución:

- (a) Cierta. La función objetivo del problema $P1$ es una suma de variables positivas, luego está acotada inferiormente por 0, y por tanto el problema $P1$ siempre tiene solución.
- (b) Falsa. El método de Newton se utiliza sobre funciones de clase $\mathcal{C}^2(\Omega)$, pero es exacto solamente sobre funciones cuadráticas.
- (c) Falsa. El conjunto $\partial\Omega$ es una elipse que no es un conjunto convexo. Por ejemplo, los puntos $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$ están en la elipse, pero el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ que está en el segmento que une los puntos anteriores no está en la elipse puesto que $(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2} \neq 1$.

5. Considera el siguiente problema

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{Sujeto a} & x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 30 \\ & x_1 - 5x_2 - 6x_3 \leq 40 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Después de poner en forma estándar y resolver mediante el método SIMPLEX se obtiene la siguiente tabla óptima

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4^h | x_5^h | b |
|---------|-------|-------|-------|---------|---------|-----|
| x_1 | 1 | 5 | 2 | 1 | 0 | 30 |
| x_3^h | 0 | -10 | -8 | -1 | 1 | 10 |
| r | 0 | 23 | 7 | 5 | 0 | 150 |

Utilizando técnicas de análisis post-óptimo y de forma independiente determina:

- (a) (0.6 puntos) La nueva solución óptima, si existe, cuando cambiamos en el problema inicial el coeficiente $c_2 = 2$ por $c_2 = 30$.
- (b) (0.6 puntos) La nueva solución óptima, si existe, cuando se incorpora la restricción

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 50$$

- (c) (0.6 puntos) La nueva solución óptima, si existe, si cambiamos $b_1 = 30$, por el nuevo valor $b'_1 = -10$.

Solución:

- (a) El cambio en c_2 es un cambio en un coeficiente de coste (beneficio en este caso) de una variable que no es básica, luego el único cambio que se produce es sobre el coeficiente de coste relativo de esta misma variable. Utilizando la información que proporciona la tabla óptima y realizando el cambio, teniendo en cuenta que para resolver hemos utilizado la forma estándar, tenemos

$$r'_2 = -30 - (-5, 0) \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix} = -30 + 25 = -5 < 0$$

Luego esta variable puede entrar en la base para producir una mejora en la función objetivo. La tabla queda

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4^h | x_5^h | b |
|---------|-------|-------|-------|---------|---------|-----|
| x_1 | 1 | 5 | 2 | 1 | 0 | 30 |
| x_5^h | 0 | -10 | -8 | -1 | 1 | 10 |
| r | 0 | -5 | 7 | 5 | 0 | 150 |

Utilizando el criterio de entrada, x_2 , mientras que al utilizar el criterio de salida, sale x_1 , pivotamos sobre el elemento correspondiente.

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4^h | x_5^h | b |
|---------|---------------|-------|---------------|---------------|---------|-----|
| x_2 | $\frac{1}{5}$ | 1 | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | 0 | 6 |
| x_5^h | 2 | 0 | -4 | 1 | 1 | 70 |
| r | 1 | 0 | 9 | 6 | 0 | 180 |

- (b) Comprobamos en primer lugar si la solución óptima actual cumple la nueva restricción, ya que en ese caso no habría que hacer ningún cálculo.

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 2 * 30 + 0 + 0 = 60 \not\leq 50$$

La solución actual no cumple la nueva restricción, luego habrá que realizar un cambio en la base. Para ello introducimos la nueva restricción en la tabla óptima actual, incorporando la correspondiente variable de holgura

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4^h | x_5^h | x_6^h | b |
|---------|-------|-------|-------|---------|---------|---------|-----|
| x_1 | 1 | 5 | 2 | 1 | 0 | 0 | 30 |
| x_5^h | 0 | -10 | -8 | -1 | 1 | 0 | 10 |
| x_6^h | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 50 |
| r | 0 | 23 | 7 | 5 | 0 | 0 | 150 |

y actualizamos la tabla para obtener la solución básica inicial

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4^h | x_5^h | x_6^h | b |
|---------|-------|-------|-------|---------|---------|---------|-----|
| x_1 | 1 | 5 | 2 | 1 | 0 | 0 | 30 |
| x_5^h | 0 | -10 | -8 | -1 | 1 | 0 | 10 |
| x_6^h | 0 | -9 | 3 | 2 | 0 | 1 | -10 |
| r | 0 | 23 | 7 | 5 | 0 | 0 | 150 |

que podemos comprobar es factible, pero factible dual y podemos aplicar los criterios del método simplex dual para obtener:

$$\begin{aligned} \text{Variable de salida} &: x_6^h \\ \text{Variable de entrada} &: \min \left\{ \frac{-23}{-9}, \frac{-7}{-3}, \frac{-5}{-2} \right\} = \frac{7}{3} \Rightarrow x_3 \end{aligned}$$

Pivotamos sobre el elemento correspondiente (elemento encuadrado) para obtener

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4^h | x_5^h | x_6^h | b |
|---------|-------|-------|-------|---------|---------|---------|-------|
| x_1 | 1 | -1 | 0 | -1/3 | 0 | 2/3 | 70/3 |
| x_5^h | 0 | 14 | 0 | 13/3 | 1 | -8/3 | 110/3 |
| x_3 | 0 | 3 | 1 | 2/3 | 0 | -1/3 | 10/3 |
| r | 0 | 2 | 0 | 1/3 | 0 | 7/3 | 380/3 |

- (c) En este caso al cambiar un coeficiente independiente cambiarán los valores de la solución básica y tendremos que comprobar si sigue siendo factible o si por el contrario hay que hacer algún cambio. Calculamos los nuevos valores de la solución básica

$$x'_B = B^{-1}b' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -10 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 50 \end{pmatrix}$$

que ya no es factible, luego no es válida.

La tabla con este cambio es

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4^h | x_5^h | b |
|---------|-------|-------|-------|---------|---------|-----|
| x_1 | 1 | 5 | 2 | 1 | 0 | -10 |
| x_5^h | 0 | -10 | -8 | -1 | 1 | 50 |
| r | 0 | 23 | 7 | 5 | 0 | -50 |

Luego es una solución factible dual. Aplicamos el criterio de entrada-salida del método simplex dual, para obtener

$$\begin{aligned} \text{Variable de salida} &: x_1 \\ \text{Variable de entrada} &: \text{No hay elementos negativos en la fila correspondiente} \end{aligned}$$

Como vemos no es posible aplicar el método simplex dual, puesto que no hay pivotes negativos, recordemos que en este caso el problema dual es no acotado y por tanto el primal es infactible.

6. (1.2 puntos) Un fabricante desea planificar la producción de 2 artículos A y B para los meses de Marzo, Abril, Mayo y Junio. Las demandas que hay que satisfacer, así como la producción máxima de cada artículo vienen dadas por la siguiente tabla

| | Marzo | Abril | Mayo | Junio | Producción |
|--------------|-------|-------|------|-------|------------|
| Artículo A | 400 | 500 | 600 | 400 | 500 |
| Artículo B | 600 | 600 | 700 | 600 | 650 |

El inventario de los artículos A y B al final de Febrero es de 100 y 150 unidades respectivamente. El coste de inventario de los artículos A y B es de 1 y 1.50 euros respectivamente por unidad de artículo almacenado al final de cada mes.

Por limitaciones de espacio, la cantidad almacenada de ambos artículos no debe exceder de 250 unidades cada mes.

Si al final del mes de Junio debe haber al menos 150 unidades del artículo B . Formula el problema lineal que minimice el coste total del inventario.

Solución: Las variables elegidas para el planteamiento de este problema son

x_i : Unidades del producto A en el mes i

y_i : Unidades del producto B en el mes i

donde $i = 1, 2, 3, 4$ representa a Marzo, Abril, Mayo y Junio respectivamente.

Tenemos restricciones de demanda y almacen. Además se deben cumplir una serie de condiciones iniciales.

Aunque se puede plantear una formulación alternativa sin variables de exceso, por comodidad, definiremos

r_i : Unidades del producto A que quedan en el almacén en el mes i

s_i : Unidades del producto B que quedan en el almacén en el mes i

con estas variables las restricciones se pueden plantear de la siguiente forma

- (a) *Demanda Artículo A:* La producción y las existencias de un mes son iguales a la demanda y las existencias que quedan en el almacén para el mes siguiente.

| Mes | Producto A |
|-------|-------------------------|
| Marzo | $x_1 + 100 = 400 + r_1$ |
| Abril | $x_2 + r_1 = 500 + r_2$ |
| Mayo | $x_3 + r_2 = 600 + r_3$ |
| Junio | $x_4 + r_3 = 400$ |

donde se ha supuesto que $r_4 = 0$, ya que en otro caso implicaría un gasto (También podríamos poner como restricción $x_4 + r_3 = 400 + r_4$, incorporando en la función objetivo el correspondiente gasto de almacén para r_4).

- (b) *Demanda Artículo B:* Procedemos del mismo modo para el artículo B .

| Mes | Producto B |
|-------|-------------------------|
| Marzo | $y_1 + 150 = 600 + s_1$ |
| Abril | $y_2 + s_1 = 600 + s_2$ |
| Mayo | $y_3 + s_2 = 700 + s_3$ |
| Junio | $y_4 + s_3 = 600 + s_4$ |

En este caso en el almacén deben haber al menos 150 artículos al final del periodo completo, luego la variable s_4 debe aparecer en el problema y además cumplirse

$$s_4 \geq 150$$

- (c) *Almacén:* El almacén tiene capacidad para 250 artículos de las dos clases, luego

| Mes | Almacén |
|-------|----------------------|
| Marzo | $r_1 + s_1 \leq 250$ |
| Abril | $r_2 + s_2 \leq 250$ |
| Mayo | $r_3 + s_3 \leq 250$ |
| Junio | $s_4 \leq 250$ |

La última de las ecuaciones puede cambiarse por

$$r_4 + s_4 \leq 250$$

(d) *Función Objetivo.* La función objetivo viene dada al intentar minimizar el coste de inventario

| Mes | Almacen |
|-------|----------------|
| Marzo | $r_1 + 1.5s_1$ |
| Abril | $r_2 + 1.5s_2$ |
| Mayo | $r_3 + 1.5s_3$ |
| Junio | $1.5s_4$ |

De nuevo el último coste puede cambiarse por $r_4 + 1.5s_4$

(e) *No negatividad:* Obviamente TODAS las variables son no negativas:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4, r_1, r_2, r_3, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$$

(f) *Máxima producción:* La producción mensual está limitada

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 500$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \leq 650$$

Silvestre Paredes