



1. Sea la función de una variable:

$$f(x) = e^{-2x} + (x-4)^2$$

(a) ¿Es $f(x)$ una función convexa?. Razona la respuesta. (0.25 puntos)

Como $f(x) \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ siendo $\Omega = \mathbb{R}$ un conjunto convexo, solamente tenemos que calcular el signo de $f''(x)$

$$f'(x) = -2e^{-2x} + 2(x-4)$$

$$f''(x) = 4e^{-2x} + 2$$

donde podemos comprobar que

$$f''(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

y $f''(x)$ es convexa, de hecho es estrictamente convexa.

(b) Utiliza el método de Swann con parámetros $x_0 = 0$ y $\Delta = 1$ para acotar el mínimo de $f(x)$ en un intervalo. (0.75 puntos).

i. En primer lugar determinamos el signo del incremento para determinar si la sucesión de Swann hay que construirla a la derecha o a la izquierda de x_0 . Para ello calculamos, tal y como se indica en el método de Swann, el valor de la función $f(x)$ en los puntos: $x_0 - |\Delta|$, x_0 y $x_0 + |\Delta|$

$$x_0 - |\Delta| = -1 \quad f(-1) = 32.3891$$

$$x_0 = 0 \quad f(0) = 17.0000$$

$$x_0 + |\Delta| = 1 \quad f(1) = 9.1353$$

Como

$$f(-1) \geq f(0) \geq f(1)$$

el mínimo estará a la derecha de x_0 y el incremento será positivo: $\Delta = 1$.

ii. En segundo lugar se construye la sucesión de Swann

$$x_{k+1} = x_k + 2^k \Delta$$

empezando por $x_0 = 0$ y tomando $\Delta = 1$

k	x_k	$f(x_k)$
0	0	17.0000
1	1	9.1353
2	3	1.0025
3	7	9.0000

se comprueba que

$$f(1) > f(3) < f(7)$$

y por tanto el mínimo se encontrará en el intervalo

$$[1, 7]$$

(c) ¿Sería el mínimo localizado en el intervalo anterior local o global?. Razona la respuesta. (0.25 puntos)

Puesto que la función es convexa (estrictamente convexa) el mínimo localizado en el apartado anterior será global, además es único porque la convexidad es estricta.

2. Responde a las siguientes preguntas

- (a) **Construye un simplex regular de lado 2, utilizando como vértices inicial $\mathbf{x}_0 = (1, 1)$ (0.5 puntos)**

Calculamos los parámetros del conjunto simplex inicial, teniendo en cuenta que estamos en \mathbb{R}^2 y por tanto $n = 2$, además del enunciado se deduce $\alpha = 2$.

$$\delta_1 = \left(\frac{\sqrt{n+1} + n - 1}{n\sqrt{2}} \right) \alpha = \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} \right) 2 = 1.93185$$

$$\delta_2 = \left(\frac{\sqrt{n+1} - 1}{n\sqrt{2}} \right) \alpha = \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \right) 2 = 0.51764$$

Las coordenadas de los 2 vértices que faltan (son 3 vértices para un simplex en dimensión 2) son

$$\mathbf{x}^1 = (x_1^1, x_2^1) = (x_1^0 + \delta_1, x_2^0 + \delta_2) = (2.93185, 1.51764)$$

$$\mathbf{x}^2 = (x_1^2, x_2^2) = (x_1^0 + \delta_2, x_2^0 + \delta_1) = (1.51764, 2.93185)$$

- (b) **Explica brevemente las ventajas e inconvenientes del método S^2 . (0.5 puntos)**

- Ventajas:* Sencillez del cálculo, no necesita derivadas, puede utilizarse incluso para funciones no continuas.
- Inconvenientes:* No guarda la información del proceso, pueden ocurrir ciclos y su velocidad de convergencia es lenta.

3. Dado el siguiente problema

$$\begin{array}{ll} \text{Optimizar} & x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z \\ \text{Sujeto a} & \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \\ z \leq 1 \end{array} \end{array}$$

Responde razonadamente a cada uno de los siguientes apartados:

- (a) **Discute sobre la convexidad del problema. (0.5 pts.)**

El conjunto factible es

$$\Omega = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4; z \leq 1 \} = \Omega_1 \cap \Omega_2$$

siendo

$$\Omega_1 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g_1(x, y, z) \leq 4 \}$$

$$\Omega_2 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \leq 1 \}$$

El conjunto Ω_1 será convexo si la función $g_1(x, y, z)$ es convexa, como $g_1(x, y, z)$ es de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ podemos utilizar su matriz hessiana

$$Hg_1(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

que es definida positiva en \mathbb{R}^3 y por la caracterización de segundo orden de funciones convexas, g_1 es una función convexas.

El conjunto Ω_2 es un semiespacio, por tanto, también es un conjunto convexo.

Como Ω es la intersección de dos conjuntos convexas, es también un conjunto convexo de \mathbb{R}^3

La función objetivo

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z$$

es también una función convexa, puesto que es de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ y su matriz hessiana es

$$Hf(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

que es definida positiva.

- (b) **Sin cálculos previos: ¿qué puedes decir de sus extremos locales y globales?. (0.5 pts.)**

El problema es convexo, es decir, la función objetivo $f(x)$ es una función convexa y el conjunto factible Ω es un conjunto convexo. Ahora bien teniendo en cuenta que $f(x, y, z)$ es una función continua (es un polinomio) sobre un compacto (es cerrado -contiene a la frontera- y acotado -está dentro de una esfera de radio 2-) podemos decir:

- Por el teorema de Weierstrass, la función $f(x, y, z)$ tiene máximo y mínimo (global) sobre el conjunto Ω .
- Como f es convexa sobre Ω convexo y compacto, y por el apartado anterior, tiene máximo \Rightarrow El máximo se encuentra en la frontera del conjunto.

- iii. Como f es convexa sobre Ω convexo \Rightarrow Todo mínimo local es global
- iv. Como f es convexa sobre Ω convexo y $f \in C^1 \Rightarrow$ Un punto que cumpla las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker para ser mínimo local, automáticamente lo será.
- v. Como Ω es un conjunto convexo con interior no vacío -por ejemplo, el origen $(0,0,0)$ está en su interior \Rightarrow Todos los puntos cumplen las hipótesis de cualificación de las restricciones.
- vi. Un extremo global es también un extremo local, pero como cualquier punto factible cumple por el apartado anterior, las hipótesis de cualificación de las restricciones, entonces un mínimo global debe cumplir las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker. De hecho, como el máximo y mínimo (globales) existen por el teorema de Weierstrass, los obtendremos utilizando las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker.

(c) **Encuentra, si existen, mediante los multiplicadores correspondientes la solución del problema. (1.5 pts.)**

Por la última propiedad del apartado anterior, los puntos solución del problema deben encontrarse resolviendo el sistema de ecuaciones que nos proporcionan las condiciones de KKT:

$$\begin{aligned} 2x + 1 + 2\mu_1 x &= 0 \\ 2y + 1 + 2\mu_1 y &= 0 \\ 2z + 1 + 2\mu_1 z + \mu_2 &= 0 \\ \mu_1 (x^2 + y^2 + z^2 - 4) &= 0 \\ \mu_2 (z - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Los puntos obtenidos en este sistema deben además ser puntos factibles, es decir, deben cumplir las desigualdades

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$$

$$z \leq 1$$

La forma usual de resolver estos sistemas es utilizar las 2 últimas ecuaciones, también llamadas, ecuaciones de holgura complementaria. Como es un producto de dos factores que debe dar cero, alguno de ellos debe ser cero, y tendremos 2 opciones para cada ecuaciones, lo que proporciona un total de 4 casos que describimos a continuación

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \mu_2 = 0 & \text{CASO I} \\ z = 1 & \text{CASO II} \\ \mu_2 = 0 & \text{CASO III} \\ z = 1 & \text{CASO IV} \end{array} \right.$$

A continuación se resuelve cada uno de los sistemas que proporcionan los casos anteriores:

i. **CASO I:** $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0$

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= 0 \\ 2y + 1 &= 0 \\ 2z + 1 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

cuya única solución es

$$P_1 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

con

$$\mu = (0, 0)$$

ii. **CASO II:** $\mu_1 = 0, z = 1$

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= 0 \\ 2y + 1 &= 0 \\ 2 + 1 + \mu_2 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

cuya única solución es

$$P_2 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right)$$

con

$$\mu = (0, -3)$$

iii. **CASO III:** $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0, \mu_2 = 0$

$$\begin{aligned} 2x + 1 + 2\mu_1 x &= 0 \\ 2y + 1 + 2\mu_1 y &= 0 \\ 2z + 1 + 2\mu_1 z &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

cuya solución se obtiene fácilmente si utilizamos las tres primeras ecuaciones para concluir que $x = y = z$. Para ello restamos primera y segunda

$$2(x - y) + 2\mu_1(x - y) = 0 \Rightarrow (x - y)(1 + \mu_1) = 0$$

y observamos que si $1 + \mu_1 = 0 \Leftrightarrow \mu_1 = -1$ y sustituyendo en la primera de las ecuaciones obtenemos una contradicción, de ahí que $x = y$. Para la segunda igualdad y utilizando un razonamiento análogo se obtiene $y = z$. De este modo tenemos

$$x = y = z$$

Esta cadena de igualdades se utiliza en la ecuación de la esfera (la cuarta) para determinar

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

De la primera ecuación despejamos el valor de μ_1

$$\mu_1 = -\frac{1}{2x}(2x + 1) = -1 - \frac{1}{2x}$$

Obtenemos de este modo los puntos

$$\begin{aligned} P_3 &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}} \right) & \mu &= \left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{4}, 0 \right) \\ P_4 &= \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}} \right) & \mu &= \left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{4}, 0 \right) \end{aligned}$$

iv. **CASO IV:** $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0, z = 1$

$$\begin{aligned} 2x + 1 + 2\mu_1 x &= 0 \\ 2y + 1 + 2\mu_1 y &= 0 \\ 2 + 1 + 2\mu_1 + \mu_2 &= 0 \\ x^2 + y^2 + 1 - 4 &= 0 \\ z - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Restando la primera y la segunda ecuaciones (siguiendo el razonamiento del CASO III) obtenemos:

$$x = y$$

que se lleva hasta la cuarta ecuación para obtener:

$$x^2 + y^2 + 1 - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$$

De la primera ecuación obtenemos el valor de μ_1

$$\mu_1 = -1 - \frac{1}{2x} = -1 - \frac{1}{\pm\sqrt{6}} = -1 \mp \frac{1}{\sqrt{6}}$$

y el valor de μ_2 de la tercera

$$\mu_2 = -3 - 2\mu_1 = -1 \pm \frac{2}{\sqrt{6}}$$

Este caso nos ha proporcionado 2 nuevos puntos

$$\begin{aligned} P_5 &= \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, 1 \right) & \mu &= \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{6}}, -1 + \frac{2}{\sqrt{6}} \right) \\ P_6 &= \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}, 1 \right) & \mu &= \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{6}}, -1 - \frac{2}{\sqrt{6}} \right) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las propiedades del apartado anterior, los puntos encontrados y el signo de sus multiplicadores correspondientes, tendremos el siguiente cuadro:

Punto	Multiplicadores	Valor de $f(x)$	Factibilidad	Extremo
$P_1 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$	$\mu = (0, 0)$	$-\frac{3}{4}$	SI	¿Máximo o Mínimo?
$P_2 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$	$\mu = (0, -3) \leq 0$	$\frac{3}{2}$	SI	¿Máximo?
$P_3 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$	$\mu = \left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{4}, 0\right) \leq 0$	$4 + 2\sqrt{6}$	NO	—
$P_4 = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$	$\mu = \left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{4}, 0\right) \leq 0$	$4 - 2\sqrt{6}$	SI	¿Máximo?
$P_5 = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right)$	$\mu = \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{6}}, -1 + \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \leq 0$	$5 + \sqrt{6}$	SI	¿Máximo?
$P_6 = \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right)$	$\mu = \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{6}}, -1 - \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \leq 0$	$5 - \sqrt{6}$	SI	¿Máximo?

En la tabla anterior se comprueba que P_1 es el único punto que puede ser mínimo, ya que sus multiplicadores son cero y puede considerarse cualquier signo (no ocurre lo mismo con el resto de puntos que solamente pueden ser máximos), por tanto y como según las propiedades del apartado anterior el problema debe tener mínimo y debe además cumplir las condiciones de KKT, se llega a la conclusión de que P_1 debe ser el mínimo global del problema. No hay mínimos locales.

El máximo global también debe cumplir las condiciones de KKT, por tanto debe ser alguno de los restantes (salvo P_3 que podemos comprobar que es infactible ya que su coordenada $z = 2/\sqrt{3} \geq 1$). Si comparamos los valores de la función objetivo en cada uno de ellos obtenemos

$$f(P_5) > f(P_6) > f(P_2) > f(P_4)$$

luego P_5 es el máximo global del problema.

No podemos garantizar que estos puntos sean máximos locales porque la función objetivo NO ES CÓNCAVA. Si queremos discutir la localidad de los puntos P_2 , P_4 y P_6 podemos emplear las condiciones de KKT de segundo orden utilizando las matrices hessianas en cada punto.

$$HL = Hf + \mu_1 Hg_1 + \mu_2 Hg_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \mu_1 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 + \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \mu_1 \end{bmatrix}$$

Para P_2 , $\mu_1 = 0$

$$HL(P_2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

que es definida positiva, pero como $\mu_3 \leq 0$, P_2 no puede ser máximo local.

Para P_4 , $\mu_1 = -1 + \frac{\sqrt{3}}{4}$

$$HL(P_4) = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/4 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/4 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/4 \end{bmatrix}$$

que es definida positiva, pero $\mu_1, \mu_2 \leq 0$, luego P_4 tampoco es máximo local.

Por último para P_6 , $\mu_1 = -1 + \frac{1}{\sqrt{6}}$

$$HL(P_6) = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

y ocurre lo mismo que en los casos anteriores.

Podemos comprobar que P_5 cumple las condiciones de KKT para ser un máximo local, en este caso $\mu_1 = -1 - 1/\sqrt{6}$ y la matriz hessiana asociada a P_5 es

$$HL(P_5) = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

que es definida negativa.

La solución del problema es por tanto

$$\text{Mínimo Global} \quad : \quad P_1$$

$$\text{Máximo Global} \quad : \quad P_5$$

4. Utiliza un método de penalización adecuado para resolver el problema (1 punto)

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & x^2 + y^2 + z^2 \\ \text{Sujeto a} & x + 2y + 3z = 4 \end{array}$$

Como es un problema con una única restricción de igualdad, podemos emplear el método de penalización parabólica, para ello se construye el problema sin restricciones

$$\text{Minimizar } x^2 + y^2 + z^2 + M(x + 2y + 3z - 4)^2$$

siendo $M \gg 0$ el parámetro de penalización.

Resolvemos el problema irrestricto para ello buscamos sus puntos críticos (que dependerán de M)

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 2x + 2M(x + 2y + 3z - 4) = 0 \Leftrightarrow x + M(x + 2y + 3z - 4) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2y + 4M(x + 2y + 3z - 4) = 0 \Leftrightarrow y + 2M(x + 2y + 3z - 4) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= 2z + 6M(x + 2y + 3z - 4) = 0 \Leftrightarrow z + 3M(x + 2y + 3z - 4) = 0 \end{aligned}$$

El sistema es lineal y fácil de resolver.

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} &= 4x - 2y = 0 \Rightarrow y = 2x \\ 3 \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial z} &= 6x - 2z = 0 \Rightarrow z = 3x \end{aligned}$$

y sustituyendo

$$x + M(x + 2y + 3z - 4) = 0 \Rightarrow x + M(x + 2 * 2x + 3 * 3x - 4) = 0 \Rightarrow x + M(14x - 4) = 0$$

y despejando la x en términos de M

$$x = \frac{4M}{1 + 14M}$$

Si ahora hacemos $M \rightarrow \infty$

$$x \rightarrow \frac{4}{14}$$

mientras que

$$\begin{aligned} y &\rightarrow \frac{8}{14} \\ z &\rightarrow \frac{12}{14} \end{aligned}$$

5. Determina las condiciones más económicas de una piscina abierta al aire, de volumen 32 m^3 con un fondo cuadrado, de manera que la superficie de sus paredes y del suelo necesite la cantidad mínima de material. Plantea y resuelve. Utiliza el método que creas más oportuno. (1 punto)

El problema consistirá en minimizar el área lateral para un volumen fijo. Si las dimensiones de la piscina son (x, y, z) siendo x el ancho, y el fondo y z la altura. El área lateral de la piscina será

$$\text{Suelo} + \text{Paredes} = xy + (2xz + 2yz)$$

y el volumen

$$V = xyz = 32$$

como la base es cuadrada

$$x = y$$

y el problema queda

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & x^2 + 4xz \\ \text{Sujeto a} & x^2 z = 32 \end{array}$$

que puede resolverse mediante los multiplicadores de Lagrange o más fácilmente mediante la sustitución

$$z = \frac{32}{x^2}$$

en un problema univariante

$$\text{Minimizar } \frac{128}{x} + x^2 = g(x)$$

con $x \in (0, \infty)$.

Derivando

$$g'(x) = \frac{-128}{x^2} + 2x \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-128}{x^2} + 2x = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3 - 128}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

que podemos comprobar que es un mínimo, utilizando la derivada segunda

$$g''(x) = \frac{256}{x^3} + 2 \Rightarrow g''(4) > 0$$

6. Una determinada empresa fabrica 3 productos que necesitan: materia prima, pasar por la línea de producción y pasar por la línea de acabado. El gerente ha planteado el siguiente problema de programación lineal con el fin de obtener el máximo beneficio semanal, teniendo en cuenta la materia y tiempo necesarios para la fabricación de los 3 productos.

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 \\ \text{Sujeto a} & 8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48 \quad (\text{materia prima}) \\ & 4x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2}x_3 \leq 20 \quad (\text{horas producción}) \\ & 2x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \leq 8 \quad (\text{horas acabado}) \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Una vez que se ha puesto el problema en la forma estándar, se ha resuelto mediante el método simplex y se ha obtenido la siguiente tabla óptima

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^h	x_6^h	b
x_4^h	0	-2	0	1	2	-8	24
x_3	0	2	1	0	2	-4	8
x_1	1	5/4	0	0	-1/2	3/2	2
	0	5	0	0	10	10	280

Responde a las siguientes preguntas:

- (a) Determina el rango de variación para c_3 (el beneficio del producto 3), de tal manera que se mantiene óptima la base actual. (0.5 puntos)

Puesto que c_3 es el coeficiente de beneficio asociado a x_3 que es una variable básica, habrá que estudiar la variación de los coeficientes de coste relativo de TODAS las variables no básicas: r_2 , r_5^h y r_6^h . Como hemos utilizado la forma estándar para resolver el problema, entonces se cambia el signo de los coeficientes de beneficio del problema original; es decir, se utiliza como función objetivo la siguiente:

$$-60x_1 - 30x_2 - 20x_3$$

Como ahora tenemos que determinar el rango de valores del coeficiente c_3 en el problema original, tendremos que comprobar qué ocurre con $-c_3$ en la versión estándar. La base óptima actual viene dada por los vectores $\{\mathbf{A}_4^h, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_1\}$ asociados a las variables $\{x_4^h, x_3, x_1\}$, por tanto los coeficientes de beneficio asociados a la base óptima son (como se ha dicho, vamos a emplear la forma estándar)

$$\mathbf{c}_B = (-c_4^h, -c_3, -c_1) = (0, -c_3, -60)$$

mientras que la expresión de la inversa de la base óptima la encontramos en las columnas de las variables de holgura (por ser un problema de este tipo).

$$\mathbf{B}^{-1} = (\mathbf{A}_4^h, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 3/2 & 4 \\ 0 & 1/2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Si utilizamos ahora la fórmula general del cálculo de los coeficientes de coste relativo

$$r_j = c_j - \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_j$$

obtendremos el valor de los mismos en términos de la base actual. Notar que la expresión $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_j$ no es necesario calcularla, puesto que al ser un problema con variables de holgura este vector se puede obtener en la tabla óptima final, en su variable correspondiente.

$$r_2 = -30 - (0, -c_3, -60) \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 5/4 \end{pmatrix} = 45 - 2c_3$$

$$r_5^h = 0 - (0, -c_3, -60) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = 2c_3 - 30$$

$$r_6^h = 0 - (0, -c_3, -60) \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 3/2 \end{pmatrix} = 90 - 4c_3$$

para que no haya cambios en la base, estos coeficientes deben ser todos > 0 , y se obtienen el siguiente sistema de inecuaciones

$$45 - 2c_3 > 0 \Leftrightarrow c_3 < 45/2$$

$$2c_3 - 30 > 0 \Leftrightarrow c_3 > 15$$

$$90 - 4c_3 > 0 \Leftrightarrow c_3 < 45/2$$

cuya solución es

$$15 < c_3 < 45/2$$

para el problema de maximización original.

- (b) Si se dispusiera solamente de 6 horas en la línea de acabado, ¿Cuál sería el ingreso esperado de la empresa?. (0.5 puntos)

Se trata de un cambio en el vector de recursos \mathbf{b} , que pasa de $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{b}' = \begin{pmatrix} 48 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix}$ y por tanto habrá un cambio en los valores de la solución óptima actual. Cambiará el valor de \mathbf{x}_B

$$\mathbf{x}'_B = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 48 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 16 \\ -1 \end{pmatrix}$$

y la nueva solución básica deja de ser factible. Por tanto habrá cambios en la base actual. Para recuperar la factibilidad de la base hay que aplicar el método simplex dual. La tabla después del cambio queda como:

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^h	x_6^h	\mathbf{b}	
x_4^h	0	-2	0	1	2	-8	40	
x_3	0	-2	1	0	2	-4	16	
x_1	1	5/4	0	0	-1/2	3/2	-1	⇐ Salida
	0	5	0	0	10	10	260	
					↑			Entrada

Utilizando los criterios de salida y entrada del método simplex dual obtenemos el pivote correspondiente y haciendo el cambio correspondiente (pivotando sobre este elemento) obtenemos

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^h	x_6^h	\mathbf{b}
x_4^h	4	3	0	1	0	-2	36
x_3	4	3	1	0	0	2	12
x_5^h	-2	-5/2	0	0	1	-3	2
	20	30	0	0	0	40	240

que es la tabla óptima. La solución es

$$\mathbf{x} = (0, 0, 12) \quad z^* = 240$$

para el problema de maximización original.

- (c) ¿Cuál es el beneficio mínimo que debe tener el producto x_2 para que sea rentable su producción? (0.3 puntos)

La variable x_2 es no básica y por tanto su valor óptimo es 0, es decir, no hay producción. Para que el valor de esta variable sea distinto de 0 (haya producción), este elemento debería formar parte de la base con valor no nulo. Para que x_2 entre en la base su coeficiente de coste relativo tendría que ser negativo:

$$r_2 = c_2 - \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_2 = -c_2 - (0, -20, -60) \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 5/4 \end{pmatrix} = -c_2 + 35 \leq 0 \Leftrightarrow c_2 \geq 35$$

- (d) Obtener mediante holgura complementaria la solución del problema dual (0.5 puntos).

La solución óptima actual es

$$\mathbf{x}^* = (2, 0, 8)$$

Aplicamos holgura complementaria, teniendo en cuenta que la matriz de coeficientes tecnológicos del dual es la transpuesta de la matriz tecnológica del primal:

$$x_1^* > 0 \Rightarrow \text{Igualdad en el Dual} \Rightarrow 8\lambda_1^* + 4\lambda_2^* + 2\lambda_3^* = 60$$

$$x_2^* = 0 \Rightarrow \text{No hay información en el dual}$$

$$x_3^* = 0 \Rightarrow \text{Igualdad en el Dual} \Rightarrow \lambda_1^* + \frac{3}{2}\lambda_2^* + \frac{1}{2}\lambda_3^* = 20$$

Sustituyendo ahora la solución óptima del primal en sus restricciones

$$8x_1^* + 6x_2^* + x_3^* = 8 \cdot 2 + 6 \cdot 0 + 8 = 24 < 48 \Rightarrow \text{Con holgura} \Rightarrow \lambda_1^* = 0$$

$$4x_1^* + 2x_2^* + \frac{3}{2}x_3^* = 4 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + \frac{3}{2} \cdot 8 = 20 = 20 \Rightarrow \text{Sin holgura}$$

$$2x_1^* + \frac{3}{2}x_2^* + \frac{1}{2}x_3^* = 2 \cdot 2 + \frac{3}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 8 = 8 = 8 \Rightarrow \text{Sin holgura}$$

Nos queda el sistema de ecuaciones

$$8\lambda_1^* + 4\lambda_2^* + 2\lambda_3^* = 60$$

$$\lambda_1^* + \frac{3}{2}\lambda_2^* + \frac{1}{2}\lambda_3^* = 20$$

$$\lambda_1^* = 0$$

cuya solución es

$$\lambda_1^* = 0, \lambda_2^* = 10, \lambda_3^* = 10$$

que es la solución del problema dual. Podemos comprobarlo, calculando el valor de la función objetivo del dual en este vector

$$48\lambda_1^* + 20\lambda_2^* + 8\lambda_3^* = 48 \cdot 0 + 20 \cdot 10 + 8 \cdot 10 = 280$$

vemos que coincide con el valor óptimo del primal.

O también podremos comprobarlo mediante los multiplicadores simplex

$$(\lambda^*)^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} = (0, 20, 60) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

notar que en este caso se ha utilizado los coeficientes de beneficio del problema original y no los de la forma estándar (cambio de signo) puesto que queremos calcular la solución del dual de este problema.

7. Una determinada empresa produce dos tipos de materiales (P1 y P2) a partir de la mezcla de tres materias primas diferentes (M1, M2 y M3) que contienen 3 componentes estructurales (C1, C2 y C3). Las especificaciones técnicas dicen que cada uno de los tres materiales producidos deben contener el porcentaje de componente estructural dado en la siguiente tabla

	C1	C2	C3
P1	$\geq 45\%$	$\leq 15\%$	$\geq 10\%$
P2	$\geq 30\%$	$\leq 30\%$	$\geq 15\%$

El porcentaje de estas componentes en cada una de las materias primas viene dado en la siguiente tabla

	C1	C2	C3
M1	60%	15%	10%
M2	45%	30%	10%
M3	30%	10%	30%

Los costes asociados a cada Kg. de materia prima son 350, 400 y 450 euros respectivamente. Se sabe que la disponibilidad presupuestaria para la adquisición de materias primas es de 60 mil euros y que la disponibilidad de las materias primas 2 y 3 es de 3000 y 7000kg. respectivamente (la materia prima 1 es ilimitada). Por otro lado la demanda del mercado obliga a producir al menos 2000 y 2500 kg. de los productos P1 y P2, respectivamente. Determina un problema lineal que permita encontrar la máxima cantidad de producto elaborada. (1.25 puntos)

Este problema puede resolverse desde dos puntos de vista: como un problema de la dieta o como un problema de transporte.

Si tratamos el problema como un problema de la dieta, en este caso, tendremos 2 dietas P_1 y P_2 , cuyos nutrientes básicos son los componentes C_1 , C_2 y C_3 que se obtienen de los “alimentos” (materias primas M_1 , M_2 y M_3). En este caso podemos considerar como variables a

$$x_{ij} : \text{Cantidad de materia prima } M_i \text{ empleada en } P_j$$

donde se ha utilizado un subíndice para cada “dieta”.

Con estas variables es sencillo construir las restricciones:

(a) *Productos* P_1 y P_2

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = P_1$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = P_2$$

(b) *Necesidades de componentes estructurales*: El componente C_k que tiene cada producto P_j depende de la cantidad de materia prima utilizada, y esa cantidad está restringida por las necesidades dadas en la primera de las tablas

$$\begin{array}{lcl} \text{Producto } P_1 & & \\ 0.60x_{11} + 0.45x_{21} + 0.30x_{31} \geq 0.45(x_{11} + x_{21} + x_{31}) & \Rightarrow & P_1 \text{ tiene más del 45\% de componente } C_1 \\ 0.15x_{11} + 0.30x_{21} + 0.10x_{31} \leq 0.15(x_{11} + x_{21} + x_{31}) & \Rightarrow & P_1 \text{ tiene menos del 15\% de componente } C_2 \\ 0.10x_{11} + 0.10x_{21} + 0.30x_{31} \geq 0.10(x_{11} + x_{21} + x_{31}) & \Rightarrow & P_1 \text{ tiene más del 10\% de componente } C_3 \\ \text{Producto } P_2 & & \\ 0.60x_{12} + 0.45x_{22} + 0.30x_{32} \geq 0.30(x_{12} + x_{22} + x_{32}) & \Rightarrow & P_2 \text{ tiene más del 30\% de componente } C_1 \\ 0.15x_{12} + 0.30x_{22} + 0.10x_{32} \leq 0.30(x_{12} + x_{22} + x_{32}) & \Rightarrow & P_2 \text{ tiene menos del 30\% de componente } C_2 \\ 0.10x_{12} + 0.10x_{22} + 0.30x_{32} \geq 0.15(x_{12} + x_{22} + x_{32}) & \Rightarrow & P_2 \text{ tiene más del 15\% de componente } C_3 \end{array}$$

(c) *Capital*: El capital disponible para la adquisición de materia prima está limitado por la siguiente restricción:

$$350(x_{11} + x_{12}) + 400(x_{21} + x_{22}) + 450(x_{31} + x_{32}) \leq 60000$$

que representa la cantidad de materia prima de cada tipo empleada en cada producto.

(d) *Disponibilidad*: Las restricciones correspondientes a la cantidad de materia prima disponible son:

$$x_{21} + x_{22} \leq 3000 \Rightarrow \text{Materia prima } M_2$$

$$x_{31} + x_{32} \leq 7000 \Rightarrow \text{Materia prima } M_3$$

la cantidad de materia prima M_1 es ilimitada.

(e) *Demanda*: Las restricciones relacionadas con la demanda solicitada son:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 2000 \Rightarrow \text{Cantidad de producto } P_1$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 2500 \Rightarrow \text{Cantidad de producto } P_2$$

(f) *No negatividad*: Las variables son todas no negativas

$$x_{ij} \geq 0$$

(g) *Función Objetivo*: El objetivo es maximizar la cantidad de producto P_1 y P_2

$$\text{Maximizar } P_1 + P_2 = (x_{11} + x_{21} + x_{31}) + (x_{12} + x_{22} + x_{32})$$