



1. (1.2 puntos) La empresa de automóviles PENAULT tiene una planta que construye 3 tipos de su modelo PEGANE: Sport, Berlina y Rancher. En la fábrica hay 5 departamentos: Fabricación de Chasis, Armado de motores y 3 departamentos de montaje para cada uno de los modelos. El departamento de chasis puede realizar, en cada mes, los chasis necesarios o para 50000 automóviles de tipo Sport, o para 35000 de tipo Berlina, o para 25000 de tipo Rancher o para las correspondientes combinaciones de los tres. El departamento 2 puede armar, también por mes, o 20000 motores del modelo Sport, o 25000 motores del modelo Berlina, o 30000 motores del modelo Rancher o las correspondientes combinaciones de ambos. Por último los 3 departamentos de montaje puede montar y terminar 15000 automóviles en cada departamento. Si cada automóvil deja un beneficio de 6000 euros el Sport, 4500 euros el modelo Berlina y 3000 euros el modelo Rancher, y suponemos que toda la producción es vendida, PLANTEA el problema de producción mensual de manera que el beneficio obtenido sea máximo.

Solución:

Definimos como variables de decisión el número de automóviles de cada modelo que se deben fabricar mensualmente, por tanto, tendremos 3 variables: S , B y R .

Las restricciones vendrán dadas por las limitaciones en la producción:

Fabricación de Chasis: La capacidad de producción es de 50000 vehículos del modelo Sport. Existen 2 formas de ver la restricción de producción en este departamento:

- (a) El primer punto de vista es el siguiente: supongamos que cada vehículo del tipo Sport se tarda en hacer t_1 unidades de tiempo, mientras que para el modelo Berlina el tiempo invertido en realizar una unidad es de t_2 unidades de tiempo y t_3 para el modelo Rancher. La producción en este departamento indicaría por tanto que

$$50000t_1 = 35000t_2 = 25000t_3$$

puesto que hemos fabricado S , B y R unidades de cada tipo el tiempo gastado total será de

$$St_1 + Bt_2 + Rt_3$$

y ese tiempo no puede superar la capacidad de producción máxima $50000t_1$ (o $35000t_2$ o $25000t_3$, puesto que son iguales)

$$St_1 + Bt_2 + Rt_3 \leq 50000t_1$$

Si ahora ponemos t_2 y t_3 en función de t_1

$$St_1 + B\frac{50000}{35000}t_1 + R\frac{50000}{25000}t_1 \leq 50000t_1$$

y dividiendo por t_1 , que podemos suponer distinto de cero, porque en caso contrario no se tardaría nada en hacer un modelo de tipo Sport

$$S + B\frac{50000}{35000} + R\frac{50000}{25000} \leq 50000$$

o simplificando

$$S + \frac{10}{7}B + 2R \leq 50000$$

- (b) La segunda forma de contemplar esta restricción es la siguiente: Si hacer 35000 unidades del modelo Berlina equivalen a hacer 50000 unidades del modelo Sport, entonces hacer B unidades del modelo Berlina es equivalente a hacer $\frac{50000}{35000}B$ unidades del modelo S , es decir, una regla de tres simple

$$\begin{array}{ccc} 50000 & \longleftrightarrow & 35000 \\ ? & \longleftrightarrow & B \end{array}$$

o equivalentemente, si hemos hecho B unidades modelos Berlina, podríamos haber hecho $\frac{50000}{35000}B$ unidades del modelo Sport.

Lo mismo podemos indicar para el modelo Rancher (R) y pensar que habiendo hecho R unidades de este modelo podíamos haber hecho

$$\frac{50000}{25000}R$$

unidades del modelo Sport. Al final la suma de los que hemos hecho y los que podíamos haber hecho no pueden superar la producción máxima y nos vuelve a salir la misma restricción

$$S + B \frac{50000}{35000} + R \frac{50000}{25000} \leq 50000$$

Motores: Esta restricción es del mismo tipo que la anterior y eligiendo una cualquiera de las formas de construir la restricción tendremos

$$S + B \frac{20000}{25000} + R \frac{20000}{30000} \leq 20000$$

y simplificando

$$S + \frac{4}{5}B + \frac{2}{3}R \leq 20000$$

Montaje: En este caso si consideramos que cada línea de montaje sirve para cada modelo, tendremos

$$\begin{array}{rcl} S & \leq & 15000 \\ B & \leq & 15000 \\ R & \leq & 15000 \end{array}$$

Si consideramos que cualquier modelo puede montarse en cualquier departamento de montaje:

$$S + B + R \leq 45000$$

El problema se completa con las restricciones de no negatividad

$$S, B, R \geq 0$$

y con la función objetivo

$$\text{Maximizar } 6000S + 4500B + 3000R$$

2. Al resolver el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & -x_1 + 3x_2 - 2x_3 \\ \text{Sujeto a} & \begin{array}{rcl} 3x_1 + x_2 + 2x_3 & \leq & 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 & \leq & 6 \\ x_j & \geq & 0 \end{array} \end{array}$$

se ha obtenido la siguiente tabla óptima:

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^h	b
x_1	1	$-1/7$	0	$3/7$	$-2/7$	$3/7$
x_3	0	$5/7$	1	$-1/7$	$3/7$	$13/7$
	0	$30/7$	0	$1/7$	$4/7$	$29/7$

Resuelve de forma INDEPENDIENTE y utilizando análisis post-óptimo.

- (a) (0.5 puntos) Calcula la solución si $c_3 = -2$ se cambia por $c'_3 = 2$.

El coeficiente c_3 está asociado a una variable básica, por tanto, habrá una modificación en todos los coeficientes de coste relativo de las variables no básicas

$$r'_2 = c_2 - (c_1, c'_3) B^{-1} A_2 = 3 - (-1, 2) * \begin{pmatrix} -1/7 \\ 5/7 \end{pmatrix} = 10/7 \geq 0$$

$$(r_4^h)' = c_4 - (c_1, c'_3) B^{-1} A_4^h = 0 - (-1, 2) \begin{pmatrix} 3/7 \\ -1/7 \end{pmatrix} = 5/7 \geq 0$$

$$(r_5^h)' = c_5 - (c_1, c'_3) B^{-1} A_5^h = 0 - (-1, 2) \begin{pmatrix} -2/7 \\ 3/7 \end{pmatrix} = -8/7 \leq 0$$

Puesto que uno de los nuevos coeficientes de coste relativo es negativo, habrá un cambio en la base.

Para encontrar la nueva solución partimos de la tabla original, realizando los oportunos cambios asociados a los nuevos r'_k

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^h	b
x_1	1	$-1/7$	0	$3/7$	$-2/7$	$3/7$
x_3	0	$5/7$	1	$-1/7$	$3/7$	$13/7$
	0	$10/7$	0	$5/7$	$-8/7$	$-23/7$

Pivotando sobre el objeto recuadrado, ya que por los criterios de entrada y salida del simplex: entrará x_5^h y saldrá x_3 , tendremos:

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^h	b
x_1	1	$1/3$	$2/3$	$1/3$	0	$5/3$
x_5^h	0	$5/3$	$7/3$	$-1/3$	1	$13/3$
	0	$10/3$	$8/3$	$1/3$	0	$5/3$

que vuelve a ser óptima con variables básicas óptimas: x_1 y x_5^h , y solución óptima

$$(5/3, 0, 0)$$

- (b) (0.5 puntos) Calcula la solución si introducimos la restricción $x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 2$

Añadir la nueva restricción supone aumentar la dimensión del problema. Incorporamos la nueva restricción, introduciendo además una variable de holgura que va a pertenecer a la base, la restricción se transforma en

$$x_1 + 3x_2 + x_3 + x_6^h = 2$$

que incorporamos a la tabla óptima actual para obtener:

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^h	x_6^h	b
x_1	1	$-1/7$	0	$3/7$	$-2/7$	0	$3/7$
x_3	0	$5/7$	1	$-1/7$	$3/7$	0	$13/7$
x_6^h	1	3	1	0	0	1	2
	0	$30/7$	0	$1/7$	$4/7$	0	$29/7$

En primer lugar debemos reconstruir la base, para ello habrá que hacer un 0, en las columnas de las variables básicas de la tabla de partida y en la posición de la última restricción incorporada:

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^h	x_6^h	b
x_1	1	$-1/7$	0	$3/7$	$-2/7$	0	$3/7$
x_3	0	$5/7$	1	$-1/7$	$3/7$	0	$13/7$
x_6^h	0	$17/7$	0	$-2/7$	$-1/7$	1	$-2/7$
	0	$30/7$	0	$1/7$	$4/7$	0	$29/7$

que proporciona una solución infactible, pero factible dual, por lo que podemos aplicar el método simplex dual pivotando según los criterios de este método sobre el elemento encuadrado, para obtener:

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^h	x_6^h	b
x_1	1	$7/2$	0	0	$-1/2$	$3/2$	0
x_3	0	$-1/2$	1	0	$1/2$	$-1/2$	2
x_4^h	0	$-17/2$	0	1	$1/2$	$-7/2$	1
	0	$11/2$	0	0	$1/2$	$1/2$	4

- (c) (0.5 puntos) Plantea y resuelve su problema dual.
El dual del problema presentado es

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & 5\lambda_1 + 6\lambda_2 \\ \text{Sujeto a} & 3\lambda_1 + \lambda_2 \leq -1 \\ & \lambda_1 + 2\lambda_2 \leq 3 \\ & 2\lambda_1 + 3\lambda_2 \leq -2 \\ & \lambda_1, \lambda_2 \leq 0 \end{array}$$

y su solución puede obtenerse fácilmente mediante los multiplicadores simplex como

$$(\lambda^*)^T = c_B^T B^{-1} = (-1, -2) \begin{pmatrix} 3/7 & -2/7 \\ -1/7 & 3/7 \end{pmatrix} = (-1/7, -4/7)$$

3. Dada la función

$$f(x, y) = (x - 4)^2 + (y - 2)^2 + 2x + 4y$$

- (a) (0.8 ptos.) Da UN paso del método del gradiente a partir de $x_0 = (1, 1)$ y error $\varepsilon_x = 10^{-3}$.

En el método del gradiente se construye una sucesión de puntos x_k que convergen a la solución x^* mediante la regla

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$$

y donde obtenemos el valor del parámetro α_k al resolver el problema de

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) \\ & \alpha \geq 0 \end{array}$$

donde para este caso

$$x_0 = (1, 1)$$

Calculamos el gradiente de $f(x, y)$ para cualquier punto

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2(x - 4) + 2 \\ 2(y - 2) + 4 \end{pmatrix}$$

El primer paso del gradiente para este caso es comprobar que el punto $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ no es la solución del problema,

$$\|\nabla f(1, 1)\| = \|(-4, 2)\|$$

$$x_1 = x_0 - \alpha_0 \nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \alpha_0 \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 4\alpha_0 \\ 1 - 2\alpha_0 \end{pmatrix}$$

y el valor de α_0 se obtendrá al resolver el problema univariante

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(1 + 4\alpha, 1 - 2\alpha) = (4\alpha - 3)^2 + (1 + 2\alpha)^2 + 2(1 + 4\alpha) + 4(1 - 2\alpha) = g(\alpha) \\ & \alpha \geq 0 \end{array}$$

cuya solución se encuentra al derivar respecto de α

$$g'(\alpha) = 8(4\alpha - 3) + 4(1 + 2\alpha)$$

e igualar a 0

$$8(4\alpha - 3) + 4(1 + 2\alpha) = 0 \Leftrightarrow 32\alpha - 24 + 4 + 8\alpha = 0 \Leftrightarrow 40\alpha - 20 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

luego como $\alpha^* = \frac{1}{2} \geq 0$, hemos obtenido la solución ya que la derivada segunda de $g(\alpha)$ es

$$g''(\alpha) = 40 \geq 0$$

el punto x_1 será por tanto

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 + 4\alpha_0 \\ 1 - 2\alpha_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 4\frac{1}{2} \\ 1 - 2\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (b) (0.6 ptos.) Calcula el mínimo exacto de $f(x, y)$ mediante métodos analíticos e indica el error cometido en el apartado anterior.

La resolución analítica consistirá en aplicar las condiciones necesarias de primer y segundo orden y/o las condiciones suficientes. En primer lugar podemos comprobar que la función cumple las tesis de dichas condiciones, puesto que la función es derivable de forma continua hasta el orden 2, mientras que el conjunto donde está definida la función es todo el plano real y por tanto se trata de un conjunto abierto de forma que si un punto es un extremo local de la función, debe cumplir las condiciones necesarias de primer y segundo orden.

Buscamos en primer lugar los puntos estacionarios

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - 6 \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = 3 \\ y = 0 \end{matrix}$$

y a continuación comprobamos las condiciones de segundo orden calculando el hessiano de la función

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

que puede comprobarse fácilmente que es definida positiva, por tanto el punto $(3, 0)$, es un mínimo relativo o local.

También podemos comprobar rápidamente que es el mismo punto que se ha obtenido en el paso anterior, por tanto, el error cometido en el apartado anterior es 0.

4. Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

- (a) (0.4 ptos.) ¿Es $H_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n \mid p^T x = \alpha, \quad p \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}\}$ convexo?

Para comprobar que un conjunto es convexo habrá que comprobar que la combinación lineal convexa de 2 elementos del conjunto sigue estando dentro del conjunto

$$\text{Sean } x, y \in H_\alpha \Rightarrow p^T x = \alpha \text{ y } p^T y = \alpha$$

Dado $\lambda \in [0, 1]$, consideramos la combinación lineal convexa de x e y

$$z = \lambda x + (1 - \lambda) y$$

tenemos que comprobar que estos elementos están en H_α , para ello debemos calcular cuánto vale $p^T z$

$$p^T z = p^T (\lambda x + (1 - \lambda) y) = p^T \lambda x + p^T (1 - \lambda) y = \lambda p^T x + (1 - \lambda) p^T y = \lambda \alpha + (1 - \lambda) \alpha = \alpha$$

y por tanto se demuestra que z está en H_α .

- (b) (0.4 ptos.) Sea $f(x) \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, convexo, cerrado y acotado. Sea $x^* \in \Omega$, con $\nabla f(x^*) = 0$. ¿Es x^* un extremo global de $f(x)$ en Ω ?

No, puesto que no tenemos información de las propiedades de $f(x, y)$, no se indica nada acerca de su convexidad. Solamente podemos decir, que x^* es un punto estacionario.

- (c) (0.4 ptos.) ¿ Porqué el método de Newton es exacto para funciones cuadráticas?
El método de Newton es exacto para funciones cuadráticas puesto que se construye a partir de la búsqueda del mínimo de la aproximación de Taylor de segundo orden de una función, que para las funciones cuadráticas coincide con ella misma.
- (d) (0.4 ptos.) Sean $f(x), g_1(x), g_2(x) \in \mathcal{C}^2(A)$, con $A \subseteq \mathbb{R}^2$, abierto. Sea $x^* \in \Omega$:
¿Es posible que x^* sea un mínimo local condicionado de $f(x)$ sujeto a $g_1(x) \leq 0$ y $g_2(x) \leq 0$ y sin embargo no existan $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, que cumplan la primera condición de Karush-Kuhn-Tucker?
Si, es posible, los puntos irregulares para las restricciones pueden ser extremos (locales y/o globales) y no cumplir ninguna de las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker.

5. Dado el siguiente problema

$$\begin{aligned} &\text{Optimizar} && x + y + z \\ &\text{Sujeto a} && \frac{x^2}{k_1^2} + \frac{y^2}{k_2^2} + \frac{z^2}{k_3^2} \leq D^2 \\ &&& x, y, z \geq 0 \end{aligned}$$

- (a) (0.4 ptos.) Razona adecuadamente si el conjunto factible de este problema es o no un conjunto convexo.
El conjunto factible para este problema es la intersección de 4 conjuntos

$$\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3 \cap \Omega_4$$

siendo

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{k_1^2} + \frac{y^2}{k_2^2} + \frac{z^2}{k_3^2} \leq D^2 \right\} \\ \Omega_2 &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0 \right\} \\ \Omega_3 &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \geq 0 \right\} \\ \Omega_4 &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0 \right\} \end{aligned}$$

Los conjuntos Ω_2, Ω_3 y Ω_4 son conjuntos convexos puesto que son las ecuaciones de semiespacios en \mathbb{R}^3 . El conjunto Ω_1 es de la forma

$$\Gamma_k = \{g(x) \leq k\}$$

por tanto, si $g(x)$ es convexa, podríamos asegurar que Ω_1 es convexo. Pero este hecho es muy fácil de demostrar, puesto que

$$g(x, y, z) = \frac{x^2}{k_1^2} + \frac{y^2}{k_2^2} + \frac{z^2}{k_3^2}$$

tiene como hessiano

$$Hg(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{2}{k_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{k_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{k_3^2} \end{pmatrix}$$

que es definido positivo para todo (x, y, z) , luego $g(x, y, z)$ es una función convexa y cualquier conjunto de la forma $\Gamma_k = \{g(x) \leq k\}$, lo será, en particular si $k = D^2$.

Luego al final Ω será intersección de conjuntos convexos y será por ello un conjunto convexo.

- (b) (0.4 ptos.) Sin cálculos previos ¿qué se puede decir de los máximos y mínimos locales y globales del problema?

En primer lugar vemos que el conjunto factible es cerrado y acotado (compacto) y que la función es continua por ser una función polinomial, luego por el teorema de Weierstrass la función tendrá un máximo y un mínimo sobre el conjunto factible.

En segundo lugar vemos que la función objetivo es lineal y por tanto es cóncava y convexa.

Como la función es convexa y el conjunto factible es convexo, cerrado y acotado, si la función tiene máximo global (que lo tiene por el teorema de Weierstrass) entonces este máximo se encuentra en la frontera del conjunto.

Como la función es cóncava y el conjunto factible es convexo, cerrado y acotado, si la función tiene mínimo global (que lo tiene por el teorema de Weierstrass) entonces este mínimo se encuentra en la frontera del conjunto.

Como la función es convexa todos los mínimos locales del problema serán globales, y como es cóncava todos los máximos locales serán globales.

Como la función es convexa y el conjunto factible es convexo, entonces un punto que cumpla las condiciones KKT de primer orden para ser mínimo lo será automáticamente, mientras que al ser también cóncava cualquier punto que cumpla las condiciones de KKT de primer orden para ser máximo lo será automáticamente.

- (c) (1.5 ptos.) Encuentra mediante los multiplicadores de Karush-Kuhn-Tucker el máximo global de este problema.

Como estamos buscando el máximo global del problema, sabemos por el apartado anterior que debe encontrarse en la frontera del conjunto, pero en este caso la frontera está formada por cuatro restricciones, y tendríamos que aplicar el teorema de los multiplicadores de Lagrange para cada una de las partes de la frontera. En lugar de ello plantearemos el problema utilizando los multiplicadores de KKT, tal y como pide en el enunciado, pero solamente las de primer orden, puesto que un punto que satisfaga las de primer orden de máximo, lo será automáticamente por lo comentado en el apartado anterior. A partir de la función lagrangiana

$$L(x, y, z) = x + y + z + \mu \left(\frac{x^2}{k_1^2} + \frac{y^2}{k_2^2} + \frac{z^2}{k_3^2} - D^2 \right) - \mu_1 x - \mu_2 y - \mu_3 z$$

donde se ha cambiado el signo a las restricciones lineales, planteamos las ecuaciones de KKT

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{2\mu x}{k_1^2} - \mu_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{2\mu y}{k_2^2} - \mu_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{2\mu z}{k_3^2} - \mu_3 = 0$$

$$\mu g(x) = 0 \Leftrightarrow \mu \left(\frac{x^2}{k_1^2} + \frac{y^2}{k_2^2} + \frac{z^2}{k_3^2} - D^2 \right) = 0$$

$$\mu_1 g_1(x) = 0 \Leftrightarrow -\mu_1 x = 0$$

$$\mu_2 g_2(x) = 0 \Leftrightarrow -\mu_2 y = 0$$

$$\mu_3 g_3(x) = 0 \Leftrightarrow -\mu_3 z = 0$$

Si de las tres últimas ecuaciones consideramos la relativa a x

$$\mu_1 x = 0$$

podemos distinguir entre $\mu_1 = 0$, y $x = 0$. En este último caso tendremos substituyendo en la primera ecuación

$$1 - \mu_1 = 0 \Leftrightarrow \mu_1 = 1$$

el multiplicador μ_1 tendrá que ser positivo y entonces el punto asociado no cumplirá las condiciones de KKT de máximo, ya que para este caso deberían ser todos los multiplicadores no positivos. De este modo el multiplicador μ_1 debe ser 0

$$\mu_1 = 0$$

Esta misma deducción se puede aplicar a las 2 últimas ecuaciones asociadas a y y a z y de ellas obtendremos

$$\begin{aligned}\mu_2 &= 0 \\ \mu_3 &= 0\end{aligned}$$

quedando el sistema de ecuaciones reducido a

$$\begin{aligned}1 + \frac{2\mu x}{k_1^2} &= 0 \\ 1 + \frac{2\mu y}{k_2^2} &= 0 \\ 1 + \frac{2\mu z}{k_3^2} &= 0 \\ \mu \left(\frac{x^2}{k_1^2} + \frac{y^2}{k_2^2} + \frac{z^2}{k_3^2} - D^2 \right) &= 0\end{aligned}$$

Para este sistema no podemos suponer que μ sea igual a 0, puesto que entonces de la primera (segunda o tercera) de las ecuaciones encontramos la contradicción $1 = 0$, por tanto, μ debe ser no nulo y el sistema queda

$$\begin{aligned}1 + \frac{2\mu x}{k_1^2} &= 0 \\ 1 + \frac{2\mu y}{k_2^2} &= 0 \\ 1 + \frac{2\mu z}{k_3^2} &= 0 \\ \frac{x^2}{k_1^2} + \frac{y^2}{k_2^2} + \frac{z^2}{k_3^2} - D^2 &= 0\end{aligned}$$

Si despejamos x , y y z de las primeras ecuaciones

$$\begin{aligned}x &= -\frac{k_1^2}{2\mu} \\ y &= -\frac{k_2^2}{2\mu} \\ z &= -\frac{k_3^2}{2\mu}\end{aligned}$$

y elevando al cuadrado y substituyendo en la última de las ecuaciones:

$$\begin{aligned}x^2 &= \frac{k_1^4}{4\mu^2} \\ y^2 &= \frac{k_2^4}{4\mu^2} \\ z^2 &= \frac{k_3^4}{4\mu^2}\end{aligned}$$

$$\frac{x^2}{k_1^2} + \frac{y^2}{k_2^2} + \frac{z^2}{k_3^2} - D^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{k_1^4}{4\mu^2}\right)}{k_1^2} + \frac{\left(\frac{k_2^4}{4\mu^2}\right)}{k_2^2} + \frac{\left(\frac{k_3^4}{4\mu^2}\right)}{k_3^2} - D^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{k_1^4}{4\mu^2 k_1^2} + \frac{k_2^4}{4\mu^2 k_2^2} + \frac{k_3^4}{4\mu^2 k_3^2} - D^2 = 0$$

simplificamos y despejamos

$$\frac{k_1^2}{4\mu^2} + \frac{k_2^2}{4\mu^2} + \frac{k_3^2}{4\mu^2} - D^2 = 0 \Leftrightarrow k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 4\mu^2 D^2$$

$$\mu^2 = \frac{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}{4D^2}$$

como estamos buscando un máximo, este multiplicador debe ser negativo, así que elegimos la raíz cuadrada negativa y obtenemos

$$\mu = -\frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}}{2|D|}$$

y los valores de x , y y z serán

$$\begin{aligned} x &= -\frac{k_1^2}{2\mu} = \frac{k_1^2 |D|}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}} \\ y &= -\frac{k_2^2}{2\mu} = \frac{k_2^2 |D|}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}} \\ z &= -\frac{k_3^2}{2\mu} = \frac{k_3^2 |D|}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}} \end{aligned}$$

al ser la función cóncava y ser este un punto que cumple las condiciones de KKT de primer orden, será el máximo.

6. (1.0 ptos.) Chus Penso ha decidido aprobar las 10 asignaturas de su titulación sin abrir un libro. Los exámenes de estas asignaturas son tipo-test con 5 preguntas de 5 opciones con una sola correcta y Chus decide responder a estos test aleatoriamente. Si para aprobar hay que responder correctamente a 3 de las cuestiones del test: ¿Cuántas asignaturas aprobará Chus?

NOTA 1: Considera una distribución Binomial de parámetros $n = 5$ y $p = 1/5$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

NOTA 2: Utiliza las siguientes muestras de una distribución uniforme:

k	$\mathcal{U}(0, 1)$
0	0.95013
1	0.23114
2	0.60684
3	0.48598
4	0.89130
5	0.76210
6	0.45647
7	0.01850
8	0.82141
9	0.44470

Solución:

Se trata de simular 10 muestras de una distribución binomial, para ello necesitamos su función de densidad y su función de distribución.

k	$f(k) = P(X = k)$	$F(k) = P(X \leq k)$	$I_k = [p_k, p_{k+1}[$
0	0.32768	0.32768	$[0, 0.32768[$
1	0.40960	0.73728	$[0.32768, 0.73728[$
2	0.20480	0.94208	$[0.73728, 0.94208[$
3	0.05120	0.99328	$[0.94208, 0.99328[$
4	0.00640	0.99968	$[0.99328, 0.99968[$
5	0.00032	1.00000	$[0.99968, 1.00000[$

a continuación comprobamos en qué intervalo cae cada muestra uniforme

Examen	$U(0, 1)$	Respuestas correctas
1	0.95013	3
2	0.23114	0
3	0.60684	1
4	0.48598	1
5	0.89130	2
6	0.76210	2
7	0.45647	1
8	0.01850	0
9	0.82141	2
10	0.44470	1

Chus no debe confiar en la respuesta al azar, puesto que a aprobado 1 de las 10 asignaturas.