



1. (1.5 puntos) Una firma comercial produce 2 tipos de crema de cacao: Mozilla con avellanas (M_a) y Mozilla con cacahuets (M_c). Para la crema de avellanas se utilizan como elementos base: cacao (10%), avellanas (20%), leche (40%) y azúcar (20%). Mientras que para la crema de cacahuete se emplean: cacao (8%), cacahuets (24%), leche (42%) y azúcar (16%). Los restantes 10% en cada caso está constituido por los diferentes edulcorantes y conservantes para producir la crema. Se dispone de 1000kg de avellanas, de 1500kg de cacahuets, 3000kg de azúcar y 500kg de cacao, siendo las existencias de leche ilimitadas. La crema se elabora en una caldera y posteriormente se envasa. Se dispone para ello de 2 calderas y 2 envasadoras. Las horas necesarias para fabricar un kilo de crema de cada clase, así como las horas disponibles para cada máquina y el coste por hora vienen dados en la tabla siguiente:

		$S_a(\text{h/kg})$	$S_c(\text{h/kg})$	Horas Totales	Coste (euros/h)
Caldera	C_1	0.6	0.9	1000	1
	C_2	0.4	0.7	1200	2
Envasadora	E_1	0.01	0.03	60	5
	E_2	0.02	0.04	50	4

Si el precio de venta es de 6 euros/kg. para la crema de avellana y de 7 euros/kg la de cacahuete, plantea el problema lineal que habría que resolver para maximizar el beneficio de la empresa.

Se hace notar que el empleo de la maquinaria no tiene porqué ser secuencial.

Solución: Si definimos las variables de decisión como:

- A_{11} Kg de Mozilla con Avellanas elaborados en la Caldera 1 y envasados en la Envasadora 1
- A_{12} Kg de Mozilla con Avellanas elaborados en la Caldera 1 y envasados en la Envasadora 2
- A_{21} Kg de Mozilla con Avellanas elaborados en la Caldera 2 y envasados en la Envasadora 1
- A_{22} Kg de Mozilla con Avellanas elaborados en la Caldera 2 y envasados en la Envasadora 2
- C_{22} Kg de Mozilla con Cacahuets elaborados en la Caldera 1 y envasados en la Envasadora 1
- C_{22} Kg de Mozilla con Cacahuets elaborados en la Caldera 2 y envasados en la Envasadora 1
- C_{22} Kg de Mozilla con Cacahuets elaborados en la Caldera 1 y envasados en la Envasadora 2
- C_{22} Kg de Mozilla con Cacahuets elaborados en la Caldera 2 y envasados en la Envasadora 2

el problema se puede plantear fácilmente en términos de estas variables. Con estas variables la cantidad total de Mozilla de Avellanas y Mozilla de Cacahuets son

$$A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22}$$

y

$$C_{11} + C_{12} + C_{21} + C_{22}$$

respectivamente.

Tendremos restricciones de existencia de materia prima y restricciones de tiempo en la maquinaria empleada.

(a) Materia Prima

$$\begin{aligned} 0.1(A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22}) + 0.08(C_{11} + C_{12} + C_{21} + C_{22}) &\leq 500 && \text{Cacao} \\ 0.2(A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22}) + 0.16(C_{11} + C_{12} + C_{21} + C_{22}) &\leq 3000 && \text{Azucar} \\ 0.2(A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22}) &\leq 1000 && \text{Avellanas} \\ 0.24(C_{11} + C_{12} + C_{21} + C_{22}) &\leq 1500 && \text{Cacahuets} \end{aligned}$$

(b) Limitación de tiempo en la Maquinaria

$$\begin{aligned} 0.6A_{11} + 0.6A_{12} + 0.9C_{11} + 0.9C_{12} &\leq 1000 && \text{Caldera 1} \\ 0.4A_{21} + 0.4A_{22} + 0.7C_{21} + 0.7C_{22} &\leq 1200 && \text{Caldera 2} \\ 0.01A_{11} + 0.01A_{21} + 0.03C_{11} + 0.03C_{21} &\leq 60 && \text{Envasadora 1} \\ 0.02A_{12} + 0.02A_{22} + 0.04C_{12} + 0.04C_{22} &\leq 50 && \text{Envasadora 2} \end{aligned}$$

(c) Restricciones de no negatividad

$$A_{ij} \geq 0$$

$$C_{ij} \geq 0$$

La función objetivo se obtiene al sumar los beneficios obtenidos por una parte y restar el coste por la utilización de maquinaria por otra

$$\text{Beneficio} \quad 6(A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22}) + 7(C_{11} + C_{12} + C_{21} + C_{22})$$

$$\text{Coste} \quad 1 * (0.6A_{11} + 0.6A_{12} + 0.9C_{11} + 0.9C_{12}) + 2 * (0.4A_{21} + 0.4A_{22} + 0.7C_{21} + 0.7C_{22}) + 5 * (0.01A_{11} + 0.01A_{21} + 0.03C_{11} + 0.03C_{21}) + 4 * (0.02A_{12} + 0.02A_{22} + 0.04C_{12} + 0.04C_{22})$$

2. Al resolver el problema de programación lineal

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && 3x_1 - 2x_2 - x_3 \\ &\text{Sujeto a} && x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ & && 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 6 \\ & && x_j \geq 0 \end{aligned}$$

se ha obtenido la siguiente tabla óptima:

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^h	b
x_2	$5/7$	1	0	$-1/7$	$3/7$	$13/7$
x_3	$-1/7$	0	1	$3/7$	$-2/7$	$3/7$
	$30/7$	0	0	$1/7$	$4/7$	$29/7$

Resuelve los siguientes apartados de forma INDEPENDIENTE y utilizando análisis post-óptimo.

(a) (0.5 puntos) Calcula la nueva solución si $c_2 = -2$ se cambia por $c'_2 = 2$.

Como c_2 es un coeficiente básico habrá cambios en todos los coeficientes de coste relativo no básicos. Los nuevos coeficientes se calculan fácilmente puesto que al ser un problema con restricciones del tipo \leq , la posición de las variables de holgura contienen la inversa de la matriz básica.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/7 & 3/7 \\ 3/7 & -2/7 \end{pmatrix}$$

o bien podemos observar la tabla para deducir que la base B está formada por las columnas A_2 y A_3

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

y calcular su inversa que es la anterior.

También son necesarios los coeficientes de coste básicos de la función objetivo

$$c_B = (-2, -1)$$

que en este caso cambian a

$$c'_B = (2, -1)$$

Los nuevos coeficientes de coste relativo se calculan mediante la fórmula general

$$\begin{aligned} r'_D &= c_D - c'_B B^{-1} D = (3, 0, 0) - (2, -1) \begin{pmatrix} -1/7 & 3/7 \\ 3/7 & -2/7 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= (3, 0, 0) - (2, -1) \begin{pmatrix} 5/7 & -1/7 & 3/7 \\ -1/7 & 3/7 & -2/7 \end{pmatrix} = \\ &= (3, 0, 0) - (10/7 + 1/7, -2/7 - 3/7, 6/7 + 2/7) = \\ &= (3, 0, 0) - (11/7, -5/7, 8/7) = \\ &= (10/7, 5/7, -8/7) \end{aligned}$$

como uno de estos coeficientes, r_5^h , es negativo, podrá entrar la variable x_5^h . La tabla queda como

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^h	b
x_2	5/7	1	0	-1/7	3/7	13/7
x_3	-1/7	0	1	3/7	-2/7	3/7
	10/7	0	0	5/7	-8/7	-23/7

Aplicando los criterios de entrada y salida del método simplex, vemos que puede entrar la variable x_5^h , como se ha comentado antes y en ese caso saldrá de la base la variable x_2 , que es la única con pivote positivo. Pivotando sobre el elemento encuadrado

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^h	b
x_5^h	5/3	7/3	0	-1/3	1	13/3
x_3	1/3	2/3	1	1/3	0	5/3
	10/3	8/3	0	1/3	0	5/3

que como podemos comprobar es óptima

- (b) (0.5 puntos) Calcula la nueva solución si introducimos la restricción $3x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$. Si incorporamos la nueva restricción, junto con su variable de holgura correspondiente:

$$3x_1 + x_2 + x_3 + x_6^h = 2$$

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^h	x_6^h	b
x_2	5/7	1	0	-1/7	3/7	0	13/7
x_3	-1/7	0	1	3/7	-2/7	0	3/7
x_6^h	3	1	1	0	0	1	2
	30/7	0	0	1/7	4/7	0	29/7

y actualizando la tabla para conseguir un 0 es las variables básicas actuales, tendremos la primera tabla simplex:

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^h	x_6^h	b
x_2	5/7	1	0	-1/7	3/7	0	13/7
x_3	-1/7	0	1	3/7	-2/7	0	3/7
x_6^h	17/7	0	0	-2/7	-1/7	1	-2/7
	30/7	0	0	1/7	4/7	0	29/7

que proporciona una solución básica que no es factible, pero si factible dual, por tanto habrá que aplicar el método simplex dual. La variable de salida será x_6^h , mientras que la variable de entrada es x_4^h , que es la que proporciona el menor cociente

$$\min \left\{ \frac{-r_k}{y_{jk}} \mid y_{jk} < 0 \right\} = \min \left\{ \frac{-1/7}{-2/7}, \frac{-4/7}{-1/7} \right\} = \frac{1}{2}$$

pivotando sobre el elemento correspondiente:

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^h	x_6^h	b
x_2	$-1/2$	1	0	0	$1/2$	$-1/2$	2
x_3	$7/2$	0	1	0	$-1/2$	$3/2$	0
x_4^h	$-17/2$	0	0	1	$1/2$	$-7/2$	1
	$11/2$	0	0	0	$1/2$	$1/2$	4

se obtiene la tabla óptima, con solución degenerada.

- (c) (0.5 puntos) Plantea el problema dual y calcula su solución óptima a partir de la solución óptima del primal.

El problema dual es

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & 3x_1 - 2x_2 - x_3 \\ \text{Sujeto a} & \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 6 \\ x_j \geq 0 \end{array} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{Maximizar} & 5\lambda_1 + 6\lambda_2 \\ \text{Sujeto a} & \begin{array}{l} \lambda_1 + 2\lambda_2 \leq 3 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 \leq -2 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 \leq -1 \\ \lambda_j \leq 0 \end{array} \end{array}$$

Podemos calcular su solución de 2 formas:

i. Multiplicadores Simplex:

$$(\lambda^*)^T = c_B B^{-1} = (-2, -1) * \begin{pmatrix} -1/7 & 3/7 \\ 3/7 & -2/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/7 \\ -4/7 \end{pmatrix}$$

ii. Holgura Complementaria

$$x_1^* = 0 \Rightarrow \text{No proporciona información}$$

$$x_2^* = 13/7 \Rightarrow 2\lambda_1^* + 3\lambda_2^* = -2$$

$$x_3^* = 3/7 \Rightarrow 3\lambda_1^* + \lambda_2^* = -1$$

$$x_1^* + 2x_2^* + 3x_3^* = 0 + 2 * 13/7 + 3 * 3/7 = 5 \Rightarrow \text{No proporciona información}$$

$$2x_1^* + 3x_2^* + x_3^* = 2 * 0 + 3 * 13/7 + 3/7 = 6 \Rightarrow \text{No proporciona información}$$

del sistema de ecuaciones que resulta obtenemos

$$\left. \begin{array}{l} 2\lambda_1^* + 3\lambda_2^* = -2 \\ 3\lambda_1^* + \lambda_2^* = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda_1^* = -1/7, \lambda_2^* = -4/7$$

3. (1 punto) Dada la función

$$f(x) = e^{-x} + (x-1)^2$$

utiliza el método de Swann con $x_0 = 0$ y $|\Delta| = 1$, para encontrar un intervalo que contenga al mínimo de esta función.

Calculamos el valor de la función $f(x)$ en los puntos $x_0 - |\Delta|$, x_0 y $x_0 + |\Delta|$, para obtener el sentido de la búsqueda en la sucesión de Swann

$$x_0 - |\Delta| = 0 - 1 = -1 \Rightarrow f(x_0 - |\Delta|) = f(-1) = 6.71828182845905$$

$$x_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = f(0) = 2$$

$$x_0 + |\Delta| = 0 + 1 = 1 \Rightarrow f(x_0 + |\Delta|) = f(1) = 0.36787944117144$$

por tanto el mínimo se obtiene tomando

$$\Delta = |\Delta|$$

y construimos la sucesión de Swann

$$x_{k+1} = x_k + 2^k \Delta \quad k = 0, \dots$$

para $k = 0$, y $k = 1$ ya tenemos los resultados

$$x_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = f(0) = 2$$

$$x_1 = x_0 + \Delta = 0 + 1 = 1 \Rightarrow f(x_1) = f(1) = 0.36787944117144$$

$$x_2 = x_1 + 2\Delta = 1 + 2 = 3 \Rightarrow f(x_2) = f(3) = 4.04978706836786$$

y hemos conseguido el intervalo que contiene al mínimo

$$x^* \in [x_0, x_2] = [0, 3]$$

4. Dada la función

$$f(x, y) = (x - y^2)(x - 2y^2)$$

y el punto $x_0 = (0, 0)$.

- (a) (0.5 puntos) ¿Cumple x_0 las condiciones necesarias de primer orden para ser extremo local?. ¿Y las condiciones necesarias de segundo orden?.

Como $f(x, y)$ es de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ y \mathbb{R}^2 es un conjunto abierto, las condiciones necesarias de primer orden para que x_0 sea un extremo local son

$$\nabla f(x_0) = 0$$

calculamos por tanto el gradiente de f

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} (x - 2y^2) + (x - y^2) \\ -2y(x - 2y^2) - 4y(x - y^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3y^2 \\ 8y^3 - 6xy \end{pmatrix}$$

y evaluando en $x_0 = (0, 0)$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

luego es un punto crítico.

Las condiciones necesarias de segundo orden para que un punto sea extremo local de una función dos veces derivable sobre un abierto es que la matriz Hf sea semidefinida (negativa o positiva).

Calculamos Hf

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -6y \\ -6y & 24y^2 - 6x \end{pmatrix}$$

y evaluado en $x_0 = (0, 0)$

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que es una matriz semidefinida positiva, ya que es diagonal y sus valores propios son 2 y 0. El punto x_0 también cumple las condiciones necesarias de segundo orden.

- (b) (0.5 puntos) ¿Se puede decir que x_0 es un extremo local?. En caso afirmativo indica su naturaleza y en caso negativo indica cómo se podría comprobar que x_0 no es un extremo local.

Con los resultados obtenidos en el apartado anterior no es posible confirmar la naturaleza del punto x_0 , puesto que aunque cumple las condiciones necesarias de primer y segundo orden, no cumple las condiciones suficientes ya que la matriz $Hf(0,0)$ no es definida. No obstante la función $f(x,y)$ es un caso particular del llamado contraejemplo de Peano, discutido en clase con los valores $a = 1$ y $b = 2$. Si dibujamos las regiones de positividad de la función obtenemos

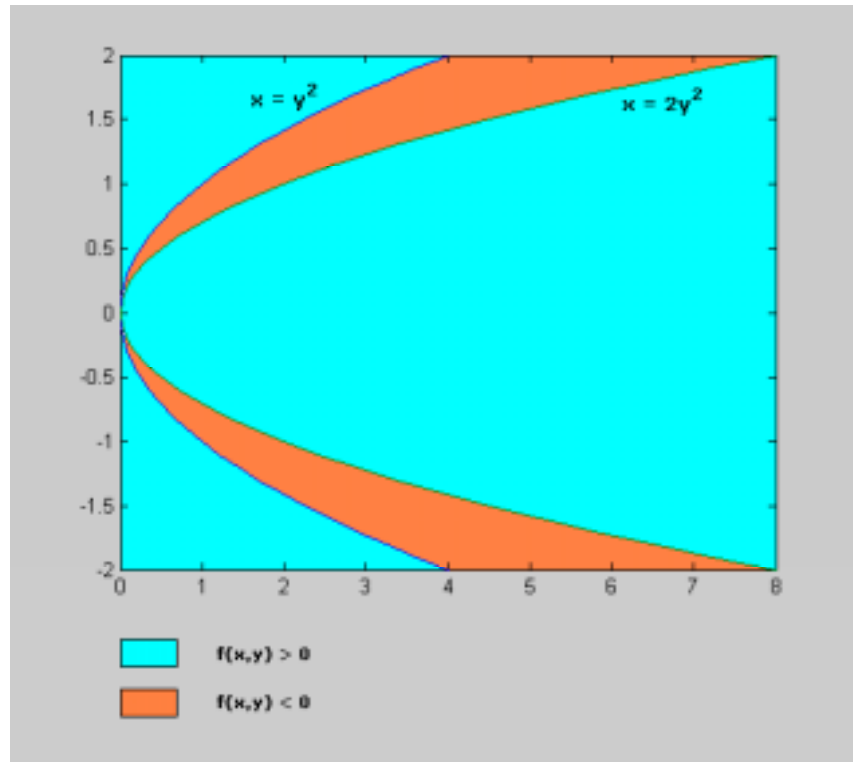


Figure 0.1: Zonas de positividad de $f(x,y)$.

Por tanto dentro de cualquier bola de centro $x_0 = (0,0)$ existirán puntos para los que la función es > 0 ($= f(0,0)$) y puntos para los que la función es < 0 ($= f(0,0)$), y por tanto el punto x_0 no puede ser ni máximo, ni mínimo.

5. Dado el siguiente problema

$$\begin{array}{ll} \text{Optimizar} & x + y + z \\ \text{Sujeto a} & x^2 + y^2 \leq 1 \\ & x^2 + y^2 + z^2 \leq 3 \end{array}$$

- (a) (0.5 puntos) Razona adecuadamente si el conjunto factible de este problema es o no un conjunto convexo.

El conjunto factible para este problema es la intersección de 2 conjuntos

$$\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$$

siendo

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \\ \Omega_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 3\} \end{aligned}$$

Los conjuntos Ω_1 y Ω_2 son de la forma

$$\Gamma_k = \{g_j(\mathbf{x}) \leq k\} \quad j = 1, 2$$

por tanto, si $g_1(\mathbf{x})$ y $g_2(\mathbf{x})$ son convexas, podríamos asegurar que Ω_1 y Ω_2 son conjuntos convexos. Pero este hecho es muy fácil de demostrar, puesto que

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2$$

tiene como matriz hessiana

$$Hg_1(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que es semidefinida positiva para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ luego $g_1(x, y, z)$ es una función convexa y cualquier conjunto de la forma $\Gamma_k = \{g_1(x) \leq k\}$ lo será, en particular si $k = 1$.

De la misma forma

$$g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

tiene como matriz hessiana

$$Hg_2(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

que es definida positiva para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ luego $g_2(x, y, z)$ es una función convexa y cualquier conjunto de la forma $\Gamma_k = \{g_2(x) \leq k\}$ lo será, en particular si $k = 3$.

Puesto que Ω_1 y Ω_2 son conjuntos convexos también será un conjunto convexo la intersección de ambos.

- (b) (0.5 puntos) Sin cálculos previos qué puedes decir de los máximos y mínimos locales y globales del problema.

En primer lugar vemos que el conjunto factible es cerrado y acotado (compacto) y que la función es continua por ser una función polinomial, luego por el teorema de Weierstrass la función tendrá un máximo y un mínimo sobre el conjunto factible.

En segundo lugar vemos que la función objetivo es lineal y por tanto es cóncava y convexa.

Como la función es convexa y el conjunto factible es convexo, cerrado y acotado, si la función tuviera un máximo global (que lo tiene por el teorema de Weierstrass) entonces este máximo se encontraría (de hecho se encuentra) en la frontera del conjunto.

Como la función es cóncava y el conjunto factible es convexo, cerrado y acotado, si la función tuviera un mínimo global (que lo tiene por el teorema de Weierstrass) entonces este mínimo se encontraría (de hecho se encuentra) en la frontera del conjunto.

Como la función es convexa todos los mínimos locales del problema serán globales, y como es cóncava todos los máximos locales serán globales.

Como la función es convexa y el conjunto factible es convexo, entonces un punto que cumpla las condiciones KKT de primer orden para ser mínimo lo será automáticamente, mientras que al ser también cóncava cualquier punto que cumpla las condiciones de KKT de primer orden para ser máximo lo será automáticamente.

- (c) (1.5 puntos) Encuentra, si existen, los mínimos y máximos locales del problema mediante los multiplicadores adecuados. ¿Cuáles son los extremos globales?.

Sabemos por el apartado anterior que los extremos del conjunto deberían encontrarse en la frontera del conjunto, pero en este caso la frontera está formada por dos restricciones y tendríamos que aplicar el teorema de los multiplicadores de Lagrange para cada una de las partes de la frontera. En lugar de ello plantearemos el problema utilizando los multiplicadores de KKT, tal y como pide en el enunciado, pero solamente las de primer orden, puesto que un punto que satisfaga las condiciones de primer orden de mínimo o máximo lo será automáticamente. A partir de la función lagrangiana

$$L(x, y, z) = x + y + z + \mu_1(x^2 + y^2 - 1) + \mu_2(x^2 + y^2 + z^2 - 3)$$

planteamos las ecuaciones de KKT

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \Leftrightarrow 1 + 2\mu_1 x + 2\mu_2 x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 0 \Leftrightarrow 1 + 2\mu_1 y + 2\mu_2 y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= 0 \Leftrightarrow 1 + 2\mu_2 z = 0 \\ \mu_1 g_1(x) &= 0 \Leftrightarrow \mu_1 (x^2 + y^2 - 1) = 0 \\ \mu_2 g_2(x) &= 0 \Leftrightarrow \mu_2 (x^2 + y^2 + z^2 - 3) = 0\end{aligned}$$

Las posibles alternativas para resolver el sistema anterior las proporcionan las dos últimas ecuaciones según el siguiente esquema

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \mu_2 = 0 & \text{Caso I} \\ x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0 & \text{Caso II} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \mu_2 = 0 & \text{Caso III} \\ x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0 & \text{Caso IV} \end{array} \right.$$

Comprobamos cada caso:

Caso I: Este caso es imposible, puesto que sustituyendo en la primera ecuación del sistema obtenemos: $1 = 0$

Caso II: Sustituyendo el valor de $\mu_1 = 0$ en el sistema obtenemos

$$\begin{aligned}1 + 2\mu_2 x &= 0 \\ 1 + 2\mu_2 y &= 0 \\ 1 + 2\mu_2 z &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 3 &= 0\end{aligned}$$

En el que si restamos la primera ecuación y la segunda ecuación obtenemos

$$(1 + 2\mu_2 x) - (1 + 2\mu_2 y) = 0 \Leftrightarrow 2\mu_2 (x - y) = 0$$

y como μ_2 no puede ser cero puesto que entonces la primera ecuación nos da $1 = 0$, se llega a la conclusión de que

$$x = y$$

Si restamos la primera y la tercera

$$(1 + 2\mu_2 x) - (1 + 2\mu_2 z) = 0 \Leftrightarrow 2\mu_2 (x - z) = 0$$

que nos proporciona

$$x = z$$

y sustituyendo en la última

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Despejando de la primera ecuación obtenemos el valor de μ_2

$$\mu_2 = -\frac{1}{2x} = \mp \frac{1}{2}$$

y en este caso obtenemos 2 puntos

$$P_1 = (1, 1, 1) \quad \mu = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$$

$$P_2 = (-1, -1, -1) \quad \mu = \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

Sin embargo estos puntos no son factibles ya que

$$x^2 + y^2 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 = 2 \neq 1$$

y no cumplen la primera de las restricciones.

Caso III: Este caso también es imposible, puesto que sustituyendo en la tercera ecuación del sistema volvemos a obtener una inconsistencia del tipo $1 = 0$.

Caso IV: El sistema que hay que resolver es

$$1 + 2\mu_1 x + 2\mu_2 x = 0$$

$$1 + 2\mu_1 y + 2\mu_2 y = 0$$

$$1 + 2\mu_2 z = 0$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0$$

Y sustituyendo la cuarta ecuación en la quinta

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow 1 + z^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow z^2 = 2 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{2}$$

Ahora de la tercera ecuación obtenemos el valor de μ_2

$$\mu_2 = -\frac{1}{2z} = -\frac{1}{2(\pm\sqrt{2})} = \mp\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Si restamos la primera ecuación y la segunda ecuación obtenemos

$$2\mu_1(x - y) + 2\mu_2(x - y) = 0 \Leftrightarrow (\mu_1 + \mu_2)(x - y) = 0$$

de donde obtenemos 2 opciones. La primera

$$\mu_1 + \mu_2 = 0$$

no nos produce ningún punto, puesto que en este caso

$$\mu_1 = -\mu_2$$

y los dos multiplicadores tienen distinto signo puesto que $\mu_2 \neq 0$ (los mínimos y máximos locales tienen multiplicadores del mismo signo), luego solamente nos queda el segundo caso

$$x = y$$

Sustituyendo en la cuarta ecuación

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Nos queda por determinar el valor de μ_1 . Despejamos para ello de la primera ecuación

$$1 + 2\mu_1 x + 2\mu_2 x = 0 \Rightarrow \mu_1 = -\mu_2 - \frac{1}{2x}$$

y teniendo en cuenta los distintos valores de μ_2 y x

$$\mu_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \mu_1 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (\text{A})$$

$$\mu_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \mu_1 = \frac{3}{2\sqrt{2}} \quad (\text{B})$$

$$\mu_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \mu_1 = -\frac{3}{2\sqrt{2}} \quad (\text{C})$$

$$\mu_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \mu_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (\text{D})$$

Los casos (B) y (C) no nos sirve puesto que los multiplicadores μ_1 y μ_2 tienen distinto signo.

Resumiendo tenemos dos puntos

$$P_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2} \right) \quad \mu = \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)$$

$$P_4 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2} \right) \quad \mu = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)$$

que son factibles y cumplen las condiciones de KKT para ser máximo local y mínimo local respectivamente, pero como se ha comprobado en el apartado anterior esto implica que son los máximo y mínimo globales del problema.

- (d) (0.5 puntos) ¿Qué método de penalización exterior adecuado se podría utilizar para resolver el problema de búsqueda de mínimos locales para este problema? (NO RESUELVAS EL PROBLEMA).

El método del corchete es el único método exterior visto para problemas con restricciones.

$$\text{Optimizar } (x + y + z) + M \left(\langle x^2 + y^2 - 1 \rangle^2 + \langle x^2 + y^2 + z^2 - 3 \rangle^2 \right)$$

6. (1 punto) Una fábrica de bombillas produce una bombilla defectuosa en el 2% de los casos. Posteriormente las bombillas se almacenan en cajas de 80 unidades para su venta. Simula una muestra de 6 de estas cajas y di cuántas unidades defectuosas contendría cada una. Utiliza para ello la siguiente secuencia de números aleatorios {0.9660, 0.6975, 0.0327, 0.4155, 0.4678, 0.1912, 0.8144, 0.6095, 0.0521, 0.2609, 0.1293, 0.6608, 0.7452, 0.4775, 0.4140} y la distribución de probabilidad de Poisson, recordando que $\lambda = np$.

Para construir la distribución de Poisson necesitamos conocer el valor de $e^{-\lambda}$

$$e^{-80 \cdot 0.02} = 0.2019$$

$\mathcal{U}(0, 1)$	$U_1 \dots U_k$	$\mathcal{P}(1.6)$
0.9660	0.9660	2
0.6975	0.6737	
0.0327	0.0220	
0.4155	0.4155	1
0.4678	0.1944	
0.1912	0.1912	0
0.8144	0.8144	2
0.6095	0.4964	
0.0521	0.0259	
0.2609	0.2609	1
0.1293	0.0337	
0.6608	0.6608	3
0.7452	0.4925	
0.4775	0.2351	
0.4140	0.0973	