



Optimización y Simulación
Ingeniería Industrial
20 de febrero de 2003 - Examen Resuelto

1. Un importador de whisky dispone de un mercado ilimitado, pero por la reglamentación de las importaciones en cuanto a las cantidades mensuales máximas sólo puede importar las cantidades indicadas en la siguiente tabla:

Tipo de Whisky	Máxima Importación	Precio euros/litro
Vectorial drink	2000	4
Integral whisky	2500	3
Stochastic taste	1200	2

Efectúa 3 mezclas, A , B y C , que vende a los precios de 18, 15 y 12 euros la botella (1 litro), respectivamente. Estas mezclas se componen de

- A no menos de 60% de V.D y no más del 20% de S.T
 B no menos de 15% de V.D. y no más del 60% de S.T.
 C no menos del 50% de S.T.

- (a) (1.25 puntos) Plantea el problema lineal que proporciona el mayor beneficio posible, cumpliendo los requisitos necesarios de composición.

Solución: Podemos considerar este problema como de transporte con ligeras modificaciones, ya que cada tipo de mezcla (destino) está formado por los diferentes tipos de whisky (origen) que compra el importador. Las variables de decisión se definen entonces como

x_{ij} : Cantidad de whisky de tipo i utilizado en la mezcla j

donde por claridad vamos a utilizar

$$\begin{aligned}
 i &\in \{V, I, S\} \\
 j &\in \{A, B, C\}
 \end{aligned}$$

De esta forma las mezclas A , B y C pueden ponerse como:

$$\begin{aligned}
 A &= x_{VA} + x_{IA} + x_{SA} \\
 B &= x_{VB} + x_{IB} + x_{SB} \\
 C &= x_{VC} + x_{IC} + x_{SC}
 \end{aligned}$$

Las restricciones del problema son:

- (a) *Restricciones de Importación:* El whisky de cada clase utilizado en cada una de las mezclas no puede superar su importación máxima.

$$x_{VA} + x_{VB} + x_{VC} \leq 2000 \quad \text{Vectorial}$$

$$x_{IA} + x_{IB} + x_{IC} \leq 2000 \quad \text{Integral}$$

$$x_{SA} + x_{SB} + x_{SC} \leq 2000 \quad \text{Stochastic}$$

(b) *Restricciones en las mezclas:* Se tienen que cumplir los requisitos establecidos para las mezclas

$$\text{Mezcla } A \Rightarrow \begin{cases} x_{SA} \leq 0.2A & \text{Menos del 20\% de Stochastic} \\ x_{VA} \geq 0.6A & \text{Más del 60\% de Vectorial} \end{cases}$$

$$\text{Mezcla } B \Rightarrow \begin{cases} x_{SB} \leq 0.6B & \text{Menos del 60\% de Stochastic} \\ x_{VB} \geq 0.15B & \text{Más del 15\% de Vectorial} \end{cases}$$

$$\text{Mezcla } C \Rightarrow \begin{cases} x_{SC} \geq 0.5C & \text{Más del 50\% de Stochastic} \end{cases}$$

(c) *No negatividad:* Las cantidades empleadas son no negativas

$$x_{ij}, A, B, C \geq 0$$

Por último la *función objetivo* es maximizar el beneficio obtenido por las mezclas. Este beneficio se obtiene restando a los ingresos por las mezclas el gasto de la materia prima importada. Por

$$\text{Maximizar } 18A + 15B + 12C - 4(x_{VA} + x_{VB} + x_{VC}) - 3(x_{IA} + x_{IB} + x_{IC}) - 2(x_{SA} + x_{SB} + x_{SC})$$

2. Dado el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & 10x_1 + 5x_2 + 2x_3 \\ \text{sujeto a} & \begin{array}{lll} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & \leq & 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 & \geq & 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 & \geq & 3 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array} \end{array}$$

tras escribirlo en forma estándar y resolverlo mediante el método SIMPLEX se ha obtenido la siguiente tabla óptima:

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^e	x_6^e	b
x_3^e	0	0	-2	-1	1	-4	4
x_2	0	1	2	1	0	1	1
x_1	1	0	-1	-1	0	-2	2
	0	0	2	5	0	15	-25

Se pide contestar a las siguientes preguntas: (TODOS LOS APARTADOS SON INDEPENDIENTES ENTRE SÍ.).

- (a) (0.50 puntos) Calcula, si existe, la nueva solución cuando se realiza el cambio $c_1 = 10$ por $c'_1 = 4$.

Solución: Al tratarse de un coeficiente básico, hay que calcular TODOS los coeficientes de coste relativo del resto de las variables no básicas. Todos los datos utilizados pueden extraerse de la tabla óptima y teniendo en cuenta el cambio en el coeficiente básico tendremos

$$c_B^T = (c_5^e, c_2, c_1) = (0, 5, 4)$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

donde se ha tenido en cuenta que las variables x_5 y x_6 son de exceso y por tanto para encontrar la inversa de la base óptima hay que cambiar el signo a las columnas correspondientes.

$$r_3 = c_3 - c_B^T B^{-1} A_3 = 2 - (0, 5, 4) \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -4 < 0$$

$$r_4^e = c_4^e - c_B^T B^{-1} A_4^e = 0 - (0, 5, 4) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 < 0$$

$$r_6^e = c_6^e - c_B^T B^{-1} A_6^e = 0 - (0, 5, 4) \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 3 > 0$$

Como hay coeficientes negativos habrá cambios en la base.

Para encontrar la nueva solución óptima introducimos los cambios en la tabla óptima, para encontrar

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^e	x_6^e	b
x_5^e	0	0	-2	-1	1	-4	4
x_2	0	1	2	1	0	1	1
x_1	1	0	-1	-1	0	-2	2
	0	0	-4	-1	0	3	13

Utilizando los criterios de entrada y salida se elige el correspondiente pivote. Al realizar el cambio de base pivotando sobre ese elemento obtenemos la siguiente tabla

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^e	x_6^e	b
x_5^e	0	1	0	0	1	-3	5
x_3	0	1/2	1	1/2	0	1/2	1/2
x_1	1	1/2	0	-1/2	0	-3/2	5/2
	0	2	0	1	0	5	-11

que es óptima. La nueva solución es

$$x^* = (5/2, 0, 1/2)$$

$$z^* = 11$$

- (b) (0.50 puntos) Calcula, si existe, la nueva solución cuando se realiza el cambio $b^T = (4, 4, 3)$, por $b'^T = (1, 2, 2)$.

Solución: Al cambiar el coeficiente independiente hay que comprobar calcular la nueva solución

$$b = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow b' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow x_B^* = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (x_B^*)' = B^{-1}b' = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

que ya no es factible; hay que aplicar el método simplex dual, para ello introducimos los cambios correspondientes en la tabla óptima

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^e	x_6^e	b
x_5^e	0	0	-2	-1	1	-4	5
x_2	0	1	2	1	0	1	-1
x_1	1	0	-1	-1	0	-2	3
	0	0	2	5	0	15	-25

como la columna pivote, la columna con el elemento negativo, no tiene elementos negativos sobre los que pivotar, el dual es acotado y el problema primal es infactible.

- (c) (0.50 puntos) Calcula, si existe, la nueva solución cuando se introduce la nueva restricción:
 $2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 6$

Solución: Incorporamos la nueva restricción a la tabla óptima incluyendo una nueva variable de holgura x_7^h

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^e	x_6^e	x_7^h	b
x_5^e	0	0	-2	-1	1	-4	0	4
x_2	0	1	2	1	0	1	0	1
x_1	1	0	-1	-1	0	-2	0	2
x_7^h	2	3	1	0	0	0	1	6
	0	0	2	5	0	15	0	-25

y actualizamos la tabla para que incluya a la nueva variable de holgura como básica:

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^e	x_6^e	x_7^h	b
x_5^e	0	0	-2	-1	1	-4	0	4
x_2	0	1	2	1	0	1	0	1
x_1	1	0	-1	-1	0	-2	0	2
x_7^h	0	0	-3	-1	0	1	1	1
	0	0	2	5	0	15	0	-25

luego la solución óptima original es infactible para esta nueva restricción y hay que cambiar de base. Utilizando las reglas de entrada y salida del método simplex dual, pivotamos sobre el elemento recuadrado para obtener la tabla:

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^e	x_6^e	x_7^h	b
x_5^e	0	0	0	-1/3	1	-14/3	-2/3	14/3
x_2	0	1	0	1/3	0	5/3	2/3	1/3
x_1	1	0	0	-2/3	0	-7/3	-1/3	7/3
x_3	0	0	1	1/3	0	-1/3	-1/3	1/3
	0	0	0	13/3	0	47/3	2/3	-77/3

que es óptima. La solución óptima es ahora

$$x^* = (7/3, 1/3, 1/3)$$

$$z^* = 77/3$$

3. Resuelve el siguiente problema de optimización sin restricciones

$$\text{Optimizar } x^4 + y^4 - (x - y)^2$$

- (a) (1.0 puntos) Utilizando métodos analíticos.

Solución: Como se trata de una función suficientemente derivable y el conjunto donde está definida, todo el espacio, es abierto, los extremos del problema deben ser puntos críticos de la función.

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 2(x - y) \\ 4y^3 + 2(x - y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sumando las dos ecuaciones resultantes obtenemos

$$4x^3 + 4y^3 = 0 \Rightarrow x^3 = -y^3 \Rightarrow x = -y$$

y sustituyendo en cualquiera de las dos

$$4x^3 - 2(x + x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

y los puntos críticos son

$$\begin{aligned} P_1 &= (0, 0) \\ P_2 &= (1, -1) \\ P_3 &= (-1, 1) \end{aligned}$$

Comprobaremos ahora la naturaleza de tales puntos, para ello calculamos la matriz hessiana en cada punto

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & 2 \\ 2 & 12y^2 - 2 \end{pmatrix}$$

y particularizamos en cada uno de los puntos críticos.

$$Hf(P_1) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = -2 < 0 \\ \Delta_2 = 0 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Podría ser un máximo}$$

$$Hf(P_2) = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = 10 > 0 \\ \Delta_2 = 96 > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Mínimo local estricto}$$

$$Hf(P_3) = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = 10 > 0 \\ \Delta_2 = 96 > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Mínimo local estricto}$$

En el caso de P_1 no se puede garantizar su naturaleza de máximo mediante la matriz hessiana puesto que es semidefinida negativa (y no definida negativa). Haremos en este caso un estudio local en el punto $(0, 0)$.

Si vamos al punto $(0, 0)$ sobre la recta $y = -x$ obtenemos

$$f(x, -x) = 2x^4 - 4x^2 = 2x^2(x^2 - 1) - 2x^2$$

y cerca del 0 (cuando $x < 1 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow x^2 - 1 < 0$) el valor de la función es negativo

$$f(0, 0) > f(x, -x)$$

Si ahora vamos hacia el punto $(0, 0)$ sobre la recta $y = x$, tendremos

$$f(x, x) = x^4 + x^4 = 2x^4 \geq 0$$

y por tanto

$$f(0, 0) < f(x, x)$$

se demuestra así que el punto $P_1 = (0, 0)$ es un punto de silla.

- (b) **(0.75 puntos)** Utilizando el método de Newton y tomando como punto inicial $(-1/2, 1/2)$ y error $\varepsilon = 0.01$

Solución: El método de Newton consiste en utilizar de forma recursiva la ecuación

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - [Hf(\mathbf{x}^k)]^{-1} \nabla f(\mathbf{x}^k)$$

a partir de un punto inicial, que en este caso es

$$\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que no estamos en la solución calculando el gradiente de $f(x, y)$ en este punto.

$$\nabla f(-1/2, 1/2) = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\nabla f(-1/2, 1/2)\| = 3/\sqrt{2} > \varepsilon$$

Por tanto, es necesario iterar. Utilizamos los cálculos del gradiente y hessiano del apartado anterior para encontrar una expresión analítica del método

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12x_k^2 - 2 & 2 \\ 2 & 12y_k^2 - 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4x_k^3 - 2(x_k - y_k) \\ 4y_k^3 + 2(x_k - y_k) \end{pmatrix}$$

para el punto \mathbf{x}^0

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

y al sustituir en el gradiente para comprobar de nuevo el criterio de parada obtenemos

$$\nabla f(1, -1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\nabla f(1, -1)\| = 0 \leq \varepsilon$$

y el algoritmo termina. Notar que el punto obtenido es uno de los puntos de mínimo que hemos encontrado en el apartado anterior.

4. Dado el siguiente problema de programación no lineal

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & 2 \ln(x+1) + 3 \ln(y+2) \\ \text{Sujeto a} & x + y \leq 4 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

- (a) **(1.75 puntos) Resuelve el problema mediante los multiplicadores de Karush-Kuhn-Tucker.**

Solución: Puesto que las restricciones son todas lineales el conjunto factible Ω es convexo y además las restricciones cumplen las hipótesis de cualificación de Karlin (también las de Slater, puesto que el interior es no vacío, tomemos por ejemplo el punto $(1, 1)$), por tanto, si existe el máximo del problema debe cumplir las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker.

La función es continua dentro del conjunto Ω que es además compacto, por tanto, el teorema de Weierstrass garantiza la solución del problema y el apartado anterior indica que podemos encontrar la solución planteando las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker. Estas condiciones son, teniendo en cuenta que no existen restricciones de igualdad:

i. *Condición estacionaria*

$$\nabla f(x) + \sum_{j=1}^p \mu_j \nabla g_j(x) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{x+1} \\ \frac{3}{y+2} \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde se ha considerado por claridad

$$g_1(x, y) = -x \leq 0$$

$$g_2(x, y) = -y \leq 0$$

$$g_3(x, y) = (x + y - 4) \leq 0$$

ii. *Condición de factibilidad*

$$\begin{array}{rcl} -x & \leq & 0 \\ -y & \leq & 0 \\ x + y - 4 & \leq & 0 \end{array}$$

iii. *Condición de negatividad:* Como el problema planteado es el de maximización, los multiplicadores deben cumplir

$$\mu_j \leq 0$$

iv. *Condición de holgura*

$$\mu_j g_j(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1(-x) = 0 \\ \mu_2(-y) = 0 \\ \mu_3(x + y - 4) = 0 \end{cases}$$

El sistema que debemos resolver es

$$\frac{2}{x+1} - \mu_1 + \mu_3 = 0$$

$$\frac{3}{y+2} - \mu_2 + \mu_3 = 0$$

$$\mu_1(-x) = 0$$

$$\mu_2(-y) = 0$$

$$\mu_3(x + y - 4) = 0$$

En este caso atacaremos el problema de forma distinta a la usual. De la última ecuación tenemos

$$\begin{aligned} \mu_3 &= 0 \\ \text{ó} \\ x + y - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Pero si $\mu_3 = 0$ y nos utilizamos las primeras ecuaciones, teniendo en cuenta que x y y deben ser positivos obtenemos

$$\mu_1 = \frac{2}{x+1} > 0$$

$$\mu_2 = \frac{3}{y+2} > 0$$

y por tanto no se cumple la condición de negatividad. De aquí obtenemos que para encontrar el máximo μ_3 debe ser distinto de 0, de ahí que se tenga que cumplir la otra condición

$$x + y - 4 = 0$$

y el sistema se reduce a

$$\frac{2}{x+1} - \mu_1 + \mu_3 = 0$$

$$\frac{3}{y+2} - \mu_2 + \mu_3 = 0$$

$$\mu_1(-x) = 0$$

$$\mu_2(-y) = 0$$

$$x + y - 4 = 0$$

y se resuelve respecto a las condiciones de holgura que quedan

$$\begin{aligned}\mu_1 = 0 &\Rightarrow \begin{cases} \mu_2 = 0 & \text{CASO I} \\ -y = 0 & \text{CASO II} \end{cases} \\ -x = 0 &\Rightarrow \begin{cases} \mu_2 = 0 & \text{CASO III} \\ -y = 0 & \text{CASO IV} \end{cases}\end{aligned}$$

y resolvemos en cada caso.

i. CASO I: $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0$

$$\frac{2}{x+1} + \mu_3 = 0$$

$$\frac{3}{y+2} + \mu_3 = 0$$

$$x + y - 4 = 0$$

De las 2 primeras ecuaciones

$$-\mu_3 = \frac{2}{x+1} = \frac{3}{y+2}$$

y obtenemos una relación entre x e y

$$2y + 4 = 3x + 3 \Rightarrow 3x - 2y = 1$$

La solución es

$$x = \frac{9}{5}$$

$$y = \frac{11}{5}$$

y el valor de μ_3

$$\mu_3 = -\frac{5}{7}$$

ii. CASO II: $\mu_1 = 0, y = 0$

$$\frac{2}{x+1} + \mu_3 = 0$$

$$\frac{3}{2} - \mu_2 + \mu_3 = 0$$

$$x - 4 = 0$$

cuya solución es

$$x = 4$$

$$\mu_3 = -\frac{2}{5} < 0$$

$$\mu_2 = \frac{3}{2} + \mu_3 = \frac{3}{2} - \frac{2}{5} = \frac{11}{10} > 0$$

que no es un punto válido puesto que los multiplicadores no son todos negativos.

iii. CASO III: $x = 0, \mu_2 = 0$

$$\frac{2}{1} - \mu_1 + \mu_3 = 0$$

$$\frac{3}{y+2} + \mu_3 = 0$$

$$y - 4 = 0$$

cuya solución es

$$y = 4$$

$$\mu_3 = -\frac{1}{2} < 0$$

$$\mu_1 = 2 + \mu_3 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > 0$$

que no es un punto válido puesto que los multiplicadores no son todos negativos.

iv. CASO IV: $x = 0, y = 0$

$$\frac{2}{1} - \mu_1 + \mu_3 = 0$$

$$\frac{3}{2} - \mu_2 + \mu_3 = 0$$

$$x + y - 4 = 0$$

que no tiene solución.

El único punto que cumple los requisitos para ser un máximo es

$$p_1 = \left(\frac{9}{5}, \frac{11}{5}\right) \quad \mu = \left(0, 0, \frac{-5}{7}\right)$$

como al principio se ha deducido que el máximo debe cumplir las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker y este es el único que las cumple, es el máximo buscado.

Notar también que la función es cóncava, puesto que

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{(x+1)^2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{(y+2)^2} \end{pmatrix}$$

es definida negativa en todo punto. Esta propiedad implica que las condiciones necesarias de Karush-Kuhn-Tucker para máximo son también suficientes.

- (b) **(0.25 puntos) ¿Qué se puede decir del valor máximo que toma la función objetivo si la primera restricción se transforma en $x + y \leq 4.05$?**

Solución: El valor óptimo para el problema actual es el valor de $f(x, y)$ en el óptimo encontrado

$$\begin{aligned} f\left(\frac{9}{5}, \frac{11}{5}\right) &= 2 \ln\left(\frac{9}{5} + 1\right) + 3 \ln\left(\frac{11}{5} + 2\right) = \ln\left(\frac{14}{5}\right)^2 + \ln\left(\frac{21}{5}\right)^3 = \\ &= \ln\left[\left(\frac{14}{5}\right)^2 \left(\frac{21}{5}\right)^3\right] = \ln \frac{1815156}{3125} = 6.3645 \end{aligned}$$

La pregunta hace referencia a una modificación en una de las restricciones y en cómo afecta ésta al valor óptimo anterior. Para ello, es necesario comprobar que por una parte el punto cumple alguna de las condiciones suficientes y por otro comprobar que no existan restricciones activas degeneradas. La única solución activa en el punto de máximo es $g_3(x, y)$ que no es degenerada puesto que $\mu_3 = -\frac{5}{7} \neq 0$. Como se cumplen ambas condiciones, el valor de $f(x, y)$ en el nuevo máximo tendrá un aumento aproximado proporcional al valor del multiplicador.

$$\Delta f(x^*) = -\mu_3 \Delta c_3 = -\left(-\frac{5}{7}\right) 0.05 = 0.0357$$

y el valor de la función en el nuevo óptimo será aproximadamente

$$f(x^*) = 6.3645 + 0.0357 = 6.4002$$

5. (1.25 puntos) Da 2 pasos completos del método de la sección áurea aplicado al siguiente problema:

$$\text{Minimizar } x^2 + \frac{4}{x} - 1$$

en el intervalo $[0.5, 2]$, trabajando con 4 cifras decimales. Indica cuál será la solución al parar ahí y el error absoluto máximo cometido. ¿Cuántos pasos del algoritmo habrías de dar para que ese error máximo no fuera mayor que una milésima?

Solución: Como piden 4 cifras decimales, tomaremos $\tau = 0.6180$ y $1 - \tau = 0.3820$.

(a) 1ª Iteración

$$\begin{aligned} I_0 &= [0.5, 2] \Rightarrow L_0 = 2 - 0.5 = 1.5 \\ \lambda_0 &= 0.5 + 0.382 * 1.5 = 1.0730 \Rightarrow f(\lambda_0) = 3.8792 \\ \mu_0 &= 0.5 + 0.618 * 1.5 = 1.4270 \Rightarrow f(\mu_0) = 3.8394 \end{aligned}$$

Como

$$f(\lambda_0) > f(\mu_0)$$

el siguiente intervalo será

$$I_1 = [a_1, b_1] = [\lambda_0, b_0] = [1.0730, 2]$$

(b) 2ª Iteración

$$\begin{aligned} L_1 &= [1.0730, 2] \Rightarrow L_1 = 2 - 1.073 = 0.927 \\ \lambda_1 &= \mu_0 = 1.4270 \Rightarrow f(\lambda_1) = 3.8394 \\ \mu_1 &= 1.0730 + 0.619 * 0.927 = 1.6459 \Rightarrow f(\mu_1) = 4.1392 \end{aligned}$$

y el intervalo siguiente es

$$I_2 = [a_2, b_2] = [a_1, \mu_1] = [1.0730, 1.6459]$$

Tomaremos como solución el punto medio que es el que tiene la cota de error más pequeña.

$$x^* = \frac{1.0730 + 1.6459}{2} = 1.3595$$

con una cota de error

$$|\varepsilon_x| \leq \frac{1.6459 - 1.0730}{2} = 0.28645$$

Por último para obtener el número de iteraciones necesarias para que esta cota de error sea menor que una milésima (10^{-3}), tendremos que garantizar que el error cometido al tomar el punto medio del intervalo obtenido después del proceso de iteración sea menor que 10^{-3} . Si I_n es el intervalo obtenido después de n iteraciones, la cota del error cometido es

$$|\varepsilon_x| \leq \frac{L_n}{2}$$

siendo L_n la longitud de I_n . Con estas definiciones se pide

$$\frac{L_n}{2} \leq 10^{-3}$$

como

$$L_n = (0.618)^n L_0$$

tendremos

$$\frac{(0.618)^n L_0}{2} \leq 0.001 \Rightarrow (0.618)^n \leq \frac{0.002}{L_0}$$

sustituyendo y tomando logaritmos

$$n \ln(0.618) \leq \ln\left(\frac{0.002}{1.5}\right)$$

dividiendo por $\ln(0.618)$, teniendo en cuenta que es negativo

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{0.002}{1.5}\right)}{\ln(0.618)} = 14.353$$

luego obtenemos el error pedido con $n = 15$.

6. Simulación

- (a) (1 punto) Se sabe que el tiempo transcurrido entre el momento en que un cliente llega a la barra del bar Optim y el momento en que el camarero toma su pedido sigue una distribución exponencial de media 10 minutos. También se sabe que el tiempo que tarda el camarero en servir el pedido sigue una distribución normal de media 6 min. y desviación típica 2 min. Simula, para 4 clientes, el tiempo transcurrido desde que se acodan en la barra hasta que pueden tomar su café. Utiliza para ello los siguientes números distribuidos uniformemente en el intervalo $[0,1]$: {0.6641, 0.2816, 0.7085, 0.4733, 0.3093, 0.7241, 0.2618, 0.7839}. Si ese tiempo es superior a 15 min., el camarero recibe una amonestación por parte del encargado; ¿se dará el caso?

Solución: Podemos generar la distribución exponencial de media 10 y la distribución Normal, $N(6, 2)$, a partir de los datos de la distribución uniforme que proporciona el ejercicio.

Para la distribución exponencial utilizaremos la expresión

$$X = -\frac{\ln U}{\lambda} = -\mu \ln U$$

donde $\mu = 10$, es la media de la distribución pedida.

Para la generación de la distribución normal $N(6, 2)$ se utilizarán las fórmulas de Box-Muller

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{-2 \ln U_1} \cos(2\pi U_2) \\ Y &= \sqrt{-2 \ln U_1} \sin(2\pi U_2) \end{aligned}$$

para generar una distribución $N(0, 1)$ y utilizando destipificación ($x = \mu + \sigma z$) obtenemos la distribución buscada.

El tiempo que tarda el camarero en servir a un cliente es la suma del tiempo que tarda en tomar nota y el tiempo que tarda en proporcionarle su petición. Utilizamos las 4 primeras muestras para generar la distribución exponencial

Cliente	$U(0, 1)$	$E(10)$
1	0.6641	4.0932
2	0.2816	12.6727
3	0.7085	3.4461
4	0.4733	7.4803

y las 4 restantes para generar la distribución normal.

Cliente	$U(0, 1)$	$N(0, 1)$	$N(2, 6)$
1	0.3093	-0.2482	5.5036
2	0.7241	-1.5117	2.9766
3	0.2618	0.3461	6.6922
4	0.7839	-1.6002	2.7996

La simulación completa queda

Cliente	Tiempo hasta pedido	Tiempo hasta servicio	Tiempo Total
1	4.0932	5.5036	9.5968
2	12.6727	2.9766	15.6493
3	3.4461	6.6922	10.1383
4	7.4803	2.7996	10.2799

Vemos que el camarero será amonestado al menos una vez.

- (b) **(0.25 puntos)** Explica brevemente en qué consiste el método hit or miss (acierto o fallo).