



Optimización y Simulación
Ingeniero Industrial
6 de Julio de 1999

Prof: Dr. Silvestre Paredes Hernández

1. (2.0 puntos) En una fábrica en la que se trabaja las 24 horas del día, hay 6 turnos de trabajo que comienzan cada 4 horas, iniciándose el primero a las 6h de la mañana con una duración de 8 horas cada uno. Por los productos que se elaboran y el tipo de maquinaria que se utiliza, se necesita para cada turno un número diferente de trabajadores, que viene recogido en la siguiente tabla

Periodo	Turnos	Número de trabajadores necesarios
1	06-10	90
2	10-14	210
3	14-18	220
4	18-22	160
5	22-02	110
6	02-06	50

Para las 24 horas del día. El gerente desea planificar la distribución de trabajadores de manera que su número sea mínimo. Plantea el problema lineal correspondiente.

Solución: Llamamos x_j al número de obreros que entra en el periodo j . Entonces si suponemos que la producción es continua las restricciones son

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 & +x_6 & \geq 90 \\
 x_1 +x_2 & & \geq 210 \\
 +x_2 +x_3 & & \geq 220 \\
 +x_3 +x_4 & & \geq 160 \\
 +x_4 +x_5 & & \geq 110 \\
 +x_5 +x_6 & & \geq 50
 \end{array}$$

junto con las restricciones de no negatividad $x_j \geq 0$.

La función objetivo será

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

Si suponemos que la producción es solamente para un día

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 & & \geq 90 \\
 x_1 +x_2 & & \geq 210 \\
 +x_2 +x_3 & & \geq 220 \\
 +x_3 +x_4 & & \geq 160 \\
 +x_4 +x_5 & & \geq 110 \\
 +x_5 +x_6 & & \geq 50
 \end{array}$$

2. (2.0 puntos) Buscar, si existen, cuales son los extremos locales y globales, de la función $f(x, y) = \sin x \sin y$.

¿Es la función unimodal?

Solución: Buscamos los extremos locales

$$\nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow (\cos x \sin y, \sin x \cos y) = (0, 0)$$

$$\cos x \sin y = 0$$

$$\sin x \cos y = 0$$

De la primera ecuación puede ocurrir

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{(2k_1 + 1)\pi}{2} \quad k_1 \in \mathbb{Z}$$

o también

$$\sin y = 0 \Rightarrow y = k_2\pi \quad k_2 \in \mathbb{Z}$$

Substituyendo el valor de x en la segunda ecuación

$$\sin \frac{(2k_1 + 1)\pi}{2} \cos y = 0 \Rightarrow (-1)^{k_1} \cos y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{(2k_3 + 1)\pi}{2} \quad k_3 \in \mathbb{Z}$$

y utilizando ahora el valor de y

$$\sin x \cos k_2\pi = 0 \Rightarrow (-1)^{k_2} \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k_4\pi \quad k_4 \in \mathbb{Z}$$

Los puntos estacionarios son pues de la forma

$$P_1(m, n) = \left(\frac{(2m + 1)\pi}{2}, \frac{(2n + 1)\pi}{2} \right)$$

$$P_2(m, n) = (m\pi, n\pi)$$

Podemos comprobar ahora las condiciones de segundo orden en cada uno de esos puntos

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} -\sin x \sin y & \cos x \cos y \\ \cos x \cos y & -\sin x \sin y \end{pmatrix}$$

particularizando en cada punto

$$Hf[P_1(m, n)] = \begin{pmatrix} -(-1)^m (-1)^n & 0 \\ 0 & -(-1)^m (-1)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{m+n+1} & 0 \\ 0 & (-1)^{m+n+1} \end{pmatrix}$$

$$Hf[P_2(m, n)] = \begin{pmatrix} 0 & -(-1)^m (-1)^n \\ -(-1)^m (-1)^n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{m+n+1} \\ (-1)^{m+n+1} & 0 \end{pmatrix}$$

Para los puntos P_1 si $m + n + 1$ es par entonces

$$Hf[P_1(m, n)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y el punto es mínimo relativo estricto.

Si $m + n + 1$ es impar, entonces

$$\text{Hf} [P_1(m, n)] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y el punto es máximo relativo estricto.

Para los puntos de la forma P_2 , la forma cuadrática es

$$\varphi(d) = 2(-1)^{m+n+1} d_1 d_2$$

que puede tomar cualquier signo independientemente del valor de m y n , por tanto los puntos de este tipo son puntos de silla. En los extremos la función vale

$$f(P_1(m, n)) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } m + n + 1 \text{ es impar} \\ -1 & \text{si } m + n + 1 \text{ es par} \end{cases}$$

Para los máximos globales, notar que la función es un producto de dos funciones acotadas superior e inferiormente por 1 y -1 respectivamente por tanto

$$-1 \leq f(x, y) = \sin x \sin y \leq 1$$

y los máximo locales son entonces globales. No es unimodal puesto que hay más de un extremo, realmente hay infinitos.

3. (2.0 puntos) Dado el siguiente problema lineal

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\ &\text{Sujeto a} && \\ &&& x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 5 \\ &&& 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6 \\ &&& x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- Resuelve el problema anterior utilizando el método Simplex Dual
- Deduce utilizando las condiciones de Khun-Tucker (¡¡Si no te has dado cuenta, es un problema con restricciones!!) que la solución óptima del problema anterior, si existe, tiene que ser básica (resultado que ya conocemos por el Teorema Fundamental de la programación lineal, pero eso es otra historia)

Solución:

	x_1	x_2	x_3	x_4^e	x_5^e	b
x_4^e	1	2	3	-1	0	5
x_5^e	2	2	1	0	-1	6
	3	4	5	0	0	

Cambiamos el signo a las dos ecuaciones

	x_1	x_2	x_3	x_4^e	x_5^e	b
x_4^e	-1	-2	-3	1	0	-5
x_5^e	-2	-2	-1	0	1	-6
	3	4	5	0	0	

Aplicamos el simplex dual, utilizando el criterio adecuado el pivote será el elemento recuadrado, para obtener la tabla

	x_1	x_2	x_3	x_4^e	x_5^e	b
x_4^e	1/3	2/3	1	-1/3	0	5/3
x_5^e	-2	-2	-1	0	1	-6
	3	4	5	0	0	

	x_1	x_2	x_3	x_4^e	x_5^e	b
x_3	1/3	2/3	1	-1/3	0	5/3
x_5^e	-5/3	-4/3	0	-1/3	1	-13/3
	3	4	5	0	0	

	x_1	x_2	x_3	x_4^e	x_5^e	b
x_3	1/3	2/3	1	-1/3	0	5/3
x_5^e	-5/3	-4/3	0	-1/3	1	-13/3
	4/3	2/3	0	5/3	0	-25/3

Seguimos aplicando el Simplex Dual

	x_1	x_2	x_3	x_4^e	x_5^e	b
x_3	1/3	2/3	1	-1/3	0	5/3
x_5^e	5/4	1	0	1/4	-3/4	13/4
	4/3	2/3	0	5/3	0	-25/3

	x_1	x_2	x_3	x_4^e	x_5^e	b
x_3	-1/2	0	1	-1/2	1/2	-1/2
x_2	5/4	1	0	1/4	-3/4	13/4
	1/2	0	0	3/2	1/2	-21/2

Y un paso más

	x_1	x_2	x_3	x_4^e	x_5^e	b
x_3	1	0	-2	1	-1	1
x_2	5/4	1	0	1/4	-3/4	13/4
	1/2	0	0	3/2	1/2	-21/2

	x_1	x_2	x_3	x_4^e	x_5^e	b
x_1	1	0	-2	1	-1	1
x_2	0	1	5/2	-1	1/2	2
	0	0	1	1	1	-11

Tabla óptima con solución

$$x^* = (1, 2, 0, 0, 0)$$

Si elegimos la otra fila de salida:

	x_1	x_2	x_3	x_4^e	x_5^e	b
x_4^e	-1	-2	-3	1	0	-5
x_5^e	-2	-2	-1	0	1	-6
	3	4	5	0	0	

Aplicamos el simplex dual, utilizando el criterio adecuado el pivote será el elemento recuadrado, para obtener la tabla

	x_1	x_2	x_3	x_4^e	x_5^e	b
x_4^e	-1	-2	-3	1	0	-5
x_5^e	1	1	1/2	0	-1/2	3
	3	4	5	0	0	

	x_1	x_2	x_3	x_4^e	x_5^e	b
x_4^e	0	-1	-5/2	1	-1/2	-2
x_1	1	1	1/2	0	-1/2	3
	3	4	5	0	0	

	x_1	x_2	x_3	x_4^e	x_5^e	b
x_4^e	0	-1	-5/2	1	-1/2	-2
x_1	1	1	1/2	0	-1/2	3
	0	1	7/2	0	3/2	-9

Seguimos aplicando el Simplex Dual

	x_1	x_2	x_3	x_4^e	x_5^e	b
x_4^e	0	1	5/2	-1	1/2	2
x_1	1	1	1/2	0	-1/2	3
	0	1	7/2	0	3/2	-9

	x_1	x_2	x_3	x_4^e	x_5^e	b
x_2	0	1	5/2	-1	1/2	2
x_1	1	0	-2	1	-1	1
	0	1	7/2	0	3/2	-9

	x_1	x_2	x_3	x_4^e	x_5^e	b
x_2	0	1	5/2	-1	1/2	2
x_1	1	0	-2	1	-1	1
	0	0	1	1	1	-11

Las condiciones de Khun-Tucker para este problema son

$$L = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + \mu_1(5 - x_1 - 2x_2 - 3x_3) + \mu_2(6 - 2x_1 - 2x_2 - x_3) - \mu_3x_1 - \mu_4x_2 - \mu_5x_3$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 3 - \mu_1 - 2\mu_2 - \mu_3 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 4 - 2\mu_1 - 2\mu_2 - \mu_4 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 5 - 3\mu_1 - \mu_2 - \mu_5 = 0$$

$$\mu_1(5 - x_1 - 2x_2 - 3x_3) = 0$$

$$\mu_2(6 - 2x_1 - 2x_2 - x_3) = 0$$

$$\mu_3x_1 = 0$$

$$\mu_4x_2 = 0$$

$$\mu_5 x_3 = 0$$

Supongamos ahora que la solución es no básica, es decir, ninguna de las variables x_1 , x_2 o x_3 es cero (recordemos que una solución básica de este problema con $n = 3$ incógnitas y $m = 2$ ecuaciones debe tener al menos $n - m = 3 - 2 = 1$ cero). Ahora bien como $x_j \neq 0$ $j = 1, 2, 3$, debe ocurrir teniendo en cuenta las últimas 3 ecuaciones

$$\mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = 0$$

Substituyendo en las tres primeras estos valores obtenemos

$$3 - \mu_1 - 2\mu_2 = 0$$

$$4 - 2\mu_1 - 2\mu_2 = 0$$

$$5 - 3\mu_1 - \mu_2 = 0$$

que es un sistema de 3 ecuaciones con dos incógnitas, resolviendo para las dos primeras obtenemos

$$\mu_1 = 1 \quad \mu_2 = 1$$

que no es solución de la tercera ecuación, y por tanto el sistema no tiene solución. Es decir, si el sistema tiene solución, debe ser básica.

4. (1.75 puntos) Dado el siguiente problema de programación lineal

Maximizar $4x_1 + 2x_2 + x_3$

Sujeto a

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 12$$

$$4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 18$$

$$x_j \geq 0; j = 1, 2, 3$$

Se sabe que en su solución óptima tiene $x_1^* = 2$. Mientras que la solución de su programa lineal dual tiene $\lambda_1^* = \frac{4}{3}$. ¿Calcula sin resolver el problema los restantes valores de las variables en la solución óptima?

Solución:

Planteamos el problema dual

Minimizar $12\lambda_1 + 18\lambda_2$

Sujeto a

$$\lambda_1 + 4\lambda_2 \geq 4$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 \geq 2$$

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 \geq 1$$

$$\lambda_j \geq 0; j = 1, 2$$

Como $x_1^* > 0$, la restricción asociada en el dual es de igualdad

$$\lambda_1^* + 4\lambda_2^* = 4$$

utilizando ahora el valor de $\lambda_1^* = \frac{4}{3}$

$$\frac{4}{3} + 4\lambda_2^* = 4 \Leftrightarrow \lambda_2^* = \frac{2}{3}$$

Utilizando estos dos valores y el resto de ecuaciones del dual

$$\lambda_1^* + \lambda_2^* = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2 \equiv 2$$

$$\lambda_1^* + 2\lambda_2^* = \frac{4}{3} + 2\frac{2}{3} = \frac{8}{3} > 1$$

De la primera no obtenemos información, pero de la segunda obtenemos que la variable asociada en el primer tiene que ser $x_3^* = 0$.

Además como λ_1^*, λ_2^* son mayores que cero, las restricciones asociadas en el primal son de igualdad

$$x_1^* + x_2^* + x_3^* = 12$$

$$4x_1^* + x_2^* + 2x_3^* = 18$$

y utilizando los valores conocidos de x_1^* y x_3^*

$$2 + x_2^* + 0 = 12$$

$$8 + x_2^* + 0 = 18$$

que dan como resultado $x_2^* = 10$. Las soluciones son

$$x^* = (2, 10, 0)$$

$$\lambda^* = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

5. (1.5 puntos) Resuelve utilizando el método de NEWTON el siguiente problema

$$\text{Minimizar } (2x - y)^2 + (y - 4)^2$$

- (a) Utiliza como punto de partida $x_0 = (1, 1)$ y da un paso del algoritmo.
- (b) ¿Qué ocurre?. Si ahora partimos del punto $x_0 = (2, 2)$. ¿Necesitaremos más o menos iteraciones para llegar al mismo resultado?
- (c) ¿Qué método de penalización se puede emplear en este problema?.

Razona todas las respuestas. (Cualquier otro método puntuará el 50%)

6. (0.75 puntos) Indica que funciones de MATLAB son las más convenientes de usar en cada uno de los problemas anteriores (1,2,3,4,5)

Solución

- (a) El algoritmo de Newton es

$$x_{k+1} = x_k - Hf(x_k)^{-1} \nabla f(x_k)$$

en este caso

$$\nabla f(x) = (4(2x - y), 2(y - 4) - 2(2x - y)) = (8x - 4y, 4y - 4x - 8)$$

$$Hf(x) = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

en el punto $(1, 1)$

$$\nabla f(1, 1) = (4, -8)$$

$$Hf(x) = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

y el nuevo punto será

$$x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Este punto es precisamente el mínimo de la función $f(x, y)$, puesto que se trata de una función suma de dos cuadrados que se anula cuando ambos son cero.

- (b) Llegaremos al mismo punto, puesto que la función es cuadrática y el método Newton es exacto para estas funciones, es decir, que llegamos a la solución en un sólo paso del algoritmo.
- (c) El problema es sin restricciones, luego no se puede aplicar ninguno de los métodos de penalización vistos en clase.

7. Las funciones de MATLAB útiles para resolver los problemas son:

- (a) Problema 1: función `lp`
- (b) Problema 2: funciones `fmins` y `fminu`, aunque por la naturaleza del problema tampoco son muy útiles.
- (c) Problema 3: función `lp`
- (d) Problema 4: función `lp`
- (e) Problema 5: funciones `fmins` y `fminu`

Aunque en los problemas 1,3 y 4 podría utilizarse también la función `constr`.