

Capítulo 3

Programación Lineal

3.1 Introducción y Ejemplos

Un problema de programación lineal tiene como objetivo la optimización (maximización o minimización) de una función lineal bajo restricciones de igualdad y/o desigualdad lineales en las incógnitas, donde tanto el número de variables como el número de restricciones es finito.

La **Programación Lineal** es un caso especial de programación matemática con restricciones en el que todas las funciones que aparecen en el modelo son lineales. A pesar de su planteamiento restrictivo, ya que el modelo se limita a la utilización de cierto tipo de funciones que no son frecuentes en el mundo real, las técnicas de programación lineal son utilizadas en multitud de problemas al intentar optimizar algún aspecto del comportamiento de un sistema, como puede ser la asignación de recursos, la planificación de producción, problemas de dietas, el tiempo de evolución de un proceso, control de contaminación, etc.

La programación lineal ha demostrado desde hace tiempo su utilidad como modelo significativo de numerosos problemas de distribución y de fenómenos económicos. Se exponen a continuación algunos ejemplos clásicos de situaciones que tienen una formulación natural dentro del ámbito de la programación lineal.

Ejemplo 3.1 (Problema de la dieta) *Con este problema tratamos de determinar la dieta más económica que satisfaga las necesidades nutritivas mínimas básicas para una buena salud. Dicho problema lo tendría, por ejemplo, el médico encargado de la dieta de un colegio o el dueño de una granja.*

Supongamos que podemos adquirir n alimentos diferentes, y que c_i es el precio del i -ésimo alimento. Para realizar una dieta necesitamos una serie de nutrientes básicos como proteínas, vitaminas, hierro, etc. Supongamos por tanto que hay m nutrientes básicos. Para conseguir la dieta equilibrada, cada individuo debe recibir al menos b_j unidades del nutriente j -ésimo cada día. Cada alimento i va a contener una determinada cantidad del nutriente j por unidad. Sea a_{ji} la cantidad de nutriente j que tiene cada unidad del alimento i .

Si hacemos x_i = número de unidades del alimento i en la dieta, el problema consiste en seleccionar los valores de $\{x_i\}$ de forma que minimicen el coste total:

$$c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

Sujeto a las restricciones nutritivas:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & \geq & b_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & \geq & b_m \end{array}$$

junto con $x_j \geq 0, \forall j = 1, \dots, n$.

Ejemplo 3.2 *El departamento de Nutrición del Hospital Virgen de la Arrixaca, prepara 30 menús de cena, uno por cada día del mes. Una comida consiste en espagueti, pavo, patatas, espinacas y pastel de manzana. El director del departamento de Nutrición, determina que esta comida debe proporcionar 63000 mg de proteínas,*

10 mg de hierro, 15 mg de niacina, 1 mg de tiamina y 50 mg. de vitamina C. Cada 100 gramos de esta comida proporciona la cantidad de nutrientes y grasas indicadas en la tabla

	Prot.	Hierro	Niacina	Tiamina	C	Grasas
Espagueti	5000	1.1	1.4	0.18	0	5000
Pavo	29300	1.8	5.4	0.06	0	5000
Patatas	5300	0.5	0.9	0.06	10	7900
Espinacas	3000	2.2	0.5	0.07	28	300
Pastel	4000	1.2	0.6	0.15	3	14300

Para evitar demasiada cantidad de un tipo de comida, no debe incluirse en ella más de 300 gramos de espagueti, 300 g de pavo, 200 g de patatas, 100 g de espinacas y 100 g de pastel de manzana. Se desea determinar la composición de una comida que satisfice los requerimientos nutricionales y proporciona la mínima cantidad de grasas.

Solución: La solución del problema sería la siguiente.

Variables de decisión (Raciones de comida)

- x_1 : Número de raciones de 100g de espaguetis a incluir
- x_2 : idem pavo
- x_3 : idem patatas
- x_4 : idem espinacas
- x_5 : idem pastel de manzana

Función objetivo (Minimizar Grasas)

$$\text{Minimizar } 5000x_1 + 5000x_2 + 7900x_3 + 300x_4 + 14300x_5$$

Restricciones

$$\begin{array}{rrrrr} 5000x_1 & +29300x_2 & +5300x_3 & +3000x_4 & +4000x_5 \geq 6300 \\ 1.1x_1 & +1.8x_2 & +0.5x_3 & +2.2x_4 & +1.2x_5 \geq 10 \\ 1.4x_1 & +5.4x_2 & +0.9x_3 & +0.5x_4 & +0.6x_5 \geq 15 \\ 0.18x_1 & +0.06x_2 & +0.06x_3 & +0.07x_4 & +0.15x_5 \geq 1 \\ & & +10x_3 & +28x_4 & +3x_5 \geq 50 \end{array}$$

$$0 \leq x_1 \leq 3$$

$$0 \leq x_2 \leq 3$$

$$0 \leq x_3 \leq 2$$

$$0 \leq x_4 \leq 1$$

$$0 \leq x_5 \leq 1$$

Ejemplo 3.3 (Problema del transporte) Las cantidades a_1, \dots, a_m de cierto producto se tienen que enviar desde m lugares y recibirse en cantidades b_1, \dots, b_n en n destinos.

Si c_{ij} es el coste de envío por unidad de producto desde el origen i hacia el destino j , deseamos determinar las cantidades x_{ij} a enviar desde el origen i al destino j para que se minimice el coste total del transporte, satisfaciendo las necesidades de demanda de cada destino.

Para formular el problema como un problema de programación lineal se dispone la siguiente matriz:

$$\begin{array}{ccc|c} x_{11} & \dots & x_{1n} & a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & \dots & x_{mn} & a_m \\ \hline b_1 & \dots & b_n & \end{array}$$

La i -ésima fila define las variables asociadas al origen i -ésimo, mientras que la columna j -ésima determina las variables asociadas al j -ésimo destino. El problema consiste en situar variables no negativas, x_{ij} , en la matriz, de modo que la suma de la i -ésima fila sea a_i , la suma de la j -ésima columna sea b_j y la suma:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ij} x_{ij}$$

que representa el costo total del transporte sea mínima. Resulta por tanto el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \sum_{ij} c_{ij} x_{ij} \\ \text{Sujeto a} & \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j = 1, \dots, n \\ & x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \end{array}$$

Obviamente para que las restricciones:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j$$

sean consistentes, se debe dar la relación:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

es decir la cantidad recibida es igual a la cantidad enviada.

Ejemplo 3.4 (Problema de almacenamiento) Queremos dirigir un almacén comprando y vendiendo la existencia de cierta mercancía con el fin de maximizar el beneficio en un periodo de tiempo determinado. El almacén tiene una capacidad fija C y hay un coste r por cada unidad almacenada durante un periodo de tiempo. Sabemos que el precio de la mercancía varía en determinados periodos de tiempo (meses). En un periodo cualquiera se mantiene al mismo precio tanto de compra como de venta. Inicialmente el almacén está vacío y al final del periodo también tiene que estar vacío.

Para la formulación de este problema introducimos variables para cada periodo de tiempo. Sea x_i el nivel de existencias en almacén al principio del periodo i . Sea u_i la cantidad comprada durante i y s_i la cantidad vendida en ese mismo periodo. Si queremos controlar la dirección del almacén durante n periodos de tiempo, tenemos que plantear el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \sum_{i=1}^n p_i s_i - r x_i \\ \text{Sujeto a} & x_{i+1} = x_i + u_i - s_i \quad i = 1, \dots, n \\ & 0 = x_n + u_n - s_n \\ & x_i + z_i = C \\ & x_1 = 0 \\ & x_i, u_i, s_i, z_i \geq 0 \end{array}$$

Donde p_i es la ganancia de cada objeto vendido, es decir, el precio de venta menos el precio de compra y z_i representa al espacio libre en el almacén en el periodo i .

Si por ejemplo $n = 3$ tenemos:

$-u_1$	$+s_1$				0
		$-x_2$	$-u_2$	$+s_2$	0
		x_2		$+z_2$	C
			$-x_3$	$-u_3$	0
			x_3	$+z_3$	C

Se puede observar que la matriz de coeficientes puede separarse en bloques correspondientes a las variables en los distintos periodos de tiempo. Los únicos bloques con valores distintos de 0 son los diagonales y los situados inmediatamente encima de la diagonal. Esta estructura es la usual en los problemas que implican tiempo.

Ejemplo 3.5 (Problema de producción) Sea una instalación que puede dedicarse a n actividades productivas diferentes, y supongamos que cada actividad produce diferentes cantidades de m productos. Cada actividad puede realizarse a cualquier nivel $x_i \geq 0$, pero a nivel unitario, la actividad i -ésima cuesta c_i y produce a_{ji} unidades del j -ésimo producto, podemos plantear el problema de minimizar costes como un problema de programación lineal.

Si suponemos linealidad en la capacidad de producción, y se da un conjunto de m números, b_1, \dots, b_m , que describen las necesidades de producción de los m bienes. Podemos pensar en producir estos a un costo mínimo, en este caso estamos planteando un problema de programación lineal similar al primer problema expuesto (problema de la dieta).

Ejemplo 3.6 (Un problema práctico de asignación de recursos) Supongamos que una fábrica de cervezas produce tres tipos distintos: negra (N), rubia (R) y sin alcohol (S). Para su obtención son necesarios, además de agua y lúpulo, para los cuales no hay límite, malta y levadura, que limitan la capacidad diaria de producción. La siguiente tabla nos da la cantidad necesaria de cada sustancia para producir un litro de cada una de las respectivas cervezas, los kilos disponibles de cada recurso y el beneficio por litro de cada cerveza producida. El problema del fabricante consiste en decidir cuánto debe de fabricar de cada cerveza para que el beneficio diario total sea el máximo.

	N	R	S	Disponibilidad
Malta	2	1	2	30
Levadura	1	2	2	45
Beneficio	4	7	3	

Siguiendo el esquema inicial, tomamos como variables de decisión:

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{producción en litros de } N \text{ por día} \\ x_2 &= \text{producción en litros de } R \text{ por día} \\ x_3 &= \text{producción en litros de } S \text{ por día} \end{aligned}$$

Un plan para producir, x_1 litros de N , x_2 litros de R y x_3 de S se denomina plan o programa de producción que representamos por el vector (x_1, x_2, x_3) .

Está claro que no es posible utilizar más recursos de los disponibles, de forma que si observamos la tabla de los datos, vemos que:

$$\begin{aligned} x_1 \text{ litros de } N &\text{ necesitan } 2 \cdot x_1 \text{ kilos de malta} \\ x_2 \text{ litros de } R &\text{ necesitan } 1 \cdot x_2 \text{ kilos de malta} \\ x_3 \text{ litros de } S &\text{ necesitan } 2 \cdot x_3 \text{ kilos de malta} \end{aligned}$$

y que la disponibilidad diaria de malta es de 30 kilos. Por tanto, las tres variables de decisión deben satisfacer la desigualdad:

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 30$$

que representan

$$(\text{recursos utilizados}) \leq (\text{recursos disponibles})$$

Esta imposición sobre las variables x_j es una de las restricciones al problema. Análogamente, si observamos la siguiente fila de la tabla de recursos, y teniendo en cuenta la disponibilidad diaria de levadura, tendremos la restricción

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 45$$

Habría que añadir también las condiciones de no negatividad de las variables de decisión, es decir:

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3)$$

pues no tiene sentido un plan de fabricación con cantidades negativas para las variables x_j .

Finalmente el último apartado sería la construcción de la función objetivo. En este caso pretendemos que el beneficio total sea máximo, por tanto la función objetivo será el beneficio diario que obtenemos por los x_1 litros diarios de N , los x_2 litros de R y los x_3 litros de S , es decir, será la función:

$$z = 4x_1 + 7x_2 + 3x_3$$

que hay que maximizar.

En resumen podemos formular el problema de asignación de recursos o de planificación de producción, como el de determinar los valores para x_1, x_2, x_3 que resuelven el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & z = 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 \\ \text{Sujeto a} & \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 30 \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 45 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

3.2 Solución Gráfica de Problemas Lineales

En problemas de programación lineal de 2 o 3 variables podemos utilizar un procedimiento gráfico para resolverlos. Aunque en realidad rara vez surgen problemas de este tipo, esta técnica es muy útil para ayudar visualmente a comprender muchos conceptos y términos utilizados posteriormente.

Las fases del proceso de solución gráfico son:

1. Dibujar un sistema de coordenadas cartesianas, donde las variables de decisión estén representadas por los ejes.
2. Dibujar en el sistema coordenado las restricciones del problema, incluyendo las de no negatividad. Notar que una restricción de desigualdad define una región limitada por una línea recta (2D) o un plano (3D) al considerar esa restricción como una igualdad. La intersección de todas las regiones es el *conjunto factible* o *espacio de soluciones*, que es un conjunto convexo. Si esta región no es vacía seguimos en el punto siguiente, en caso contrario, no existe ninguna solución que satisfaga simultáneamente todas las restricciones y el problema es *infactible*.
3. Determinar los puntos extremos (aquellos que son intersección de dos o más restricciones) del espacio de soluciones. Evaluar la función objetivo en esos puntos, y aquel o aquellos que maximicen (o minimicen) el objetivo, corresponden a las soluciones óptimas del problema.

Notar el hecho de que al ser todas las restricciones lineales, la región factible es un conjunto convexo y al ser la función objetivo lineal (cóncava y convexa a la vez), si el problema tuviera solución, la podríamos encontrar entre los puntos extremos del conjunto factible.

Ilustramos el método mediante un ejemplo:

Ejemplo 3.7 Resuelve gráficamente el problema siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & z = 2x_1 + x_2 \\ \text{Sujeto a} & \\ & 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

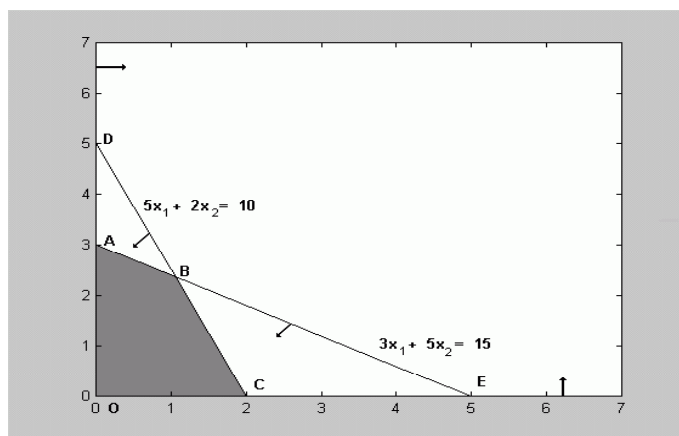


Figura 3.1: Solución gráfica de un problema lineal

Los extremos son $\{A = (0, 3); B = (20/19, 45/19); C = (2, 0), O = (0, 0)\}$ con valores para la función objetivo $\{3, 85/19, 4, 0\}$ respectivamente. Por tanto el valor óptimo se encuentra en $(20/19, 45/19)$. (figura 3.1)

Un método gráfico alternativo se tiene a partir de las *líneas de isobeneficio* (en caso de maximización) o de *isocoste* (en el de minimización). Las *isolíneas de valor* k , en el caso general están descritas mediante la ecuación

$$c_1x_1 + \dots c_nx_n = k$$

que constituye una haz de hiperplanos paralelos. Cada isolínea contiene el conjunto de puntos en los que la función objetivo toma el mismo valor. En los casos $n = 2$ o $n = 3$, estas isolíneas representan un haz de rectas paralelas o planos paralelos respectivamente. Estudiando el comportamiento de ese haz cuando k disminuye o aumenta para minimizar o maximizar respectivamente, podremos resolver el problema de forma gráfica.

Comprobaremos mediante este método que junto a los problemas con *solución única*, como en el ejemplo anterior, pueden darse otros tipos de resultados:

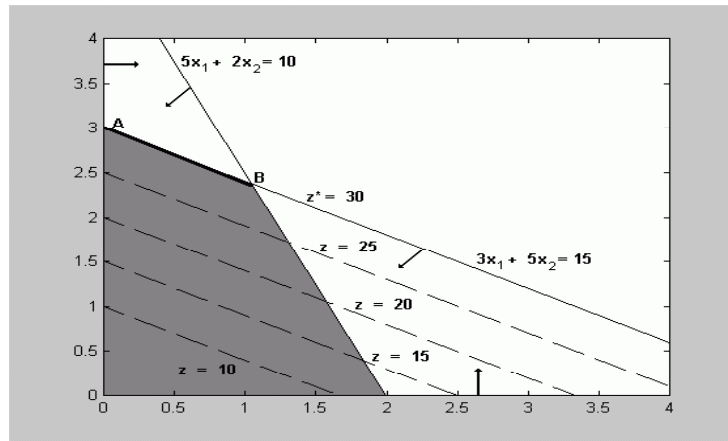
1. Cuando dos puntos extremos del conjunto están unidos y son soluciones óptimas del problema, entonces el problema posee *soluciones óptimas alternativas* y podemos afirmar que todos los puntos que existen en el segmento que une a los dos puntos extremos óptimos son solución del problema. En este caso el problema posee un número infinito de soluciones óptimas.
2. Cuando la región factible del problema es vacía, entonces no hay ningún vector \mathbf{x} que satisfaga todas las restricciones simultáneamente y el problema se denomina *infactible*.
3. Si alguna de las restricciones no influye en la determinación de la región factible se dice que es una restricción *redundante*.
4. El problema es un *modelo no acotado* o con *solución no acotada* cuando la solución óptima del problema es ∞ , es decir para cualquier punto de la región factible, siempre se puede encontrar otro punto factible que nos dé un menor (mayor en el caso de maximización) valor para la función objetivo (*valor infinito*).
5. El problema también es no acotado cuando siendo el valor óptimo de la función objetivo finito, es solución un punto cuyas componentes tienden a infinito (*solución infinita*).

3.2.1 Ejemplos

Damos a continuación varios ejemplos en 2 dimensiones de los posibles tipos de soluciones que podemos encontrar al resolver un problema de programación lineal.

Ejemplo 3.8 (Soluciones alternativas)

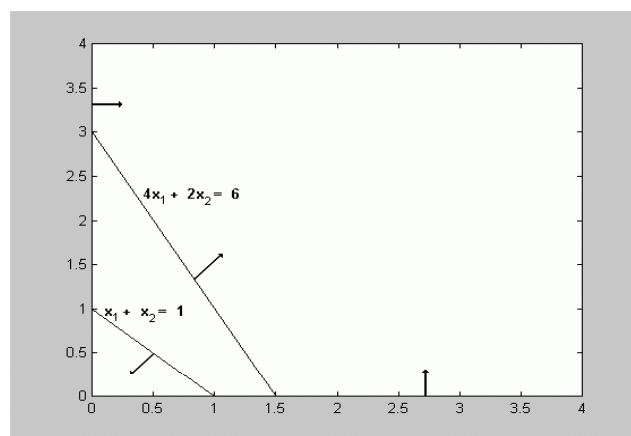
$$\begin{aligned}
 &\text{Maximizar} && z = 6x_1 + 10x_2 \\
 &\text{Sujeto a} && \\
 &&& 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\
 &&& 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\
 &&& x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

**Figura 3.2: Problema lineal con soluciones alternativas**

Observamos en la figura 3.2 que cualquier punto sobre el segmento A–B es una solución óptima del problema.

Ejemplo 3.9 (Problema infactible)

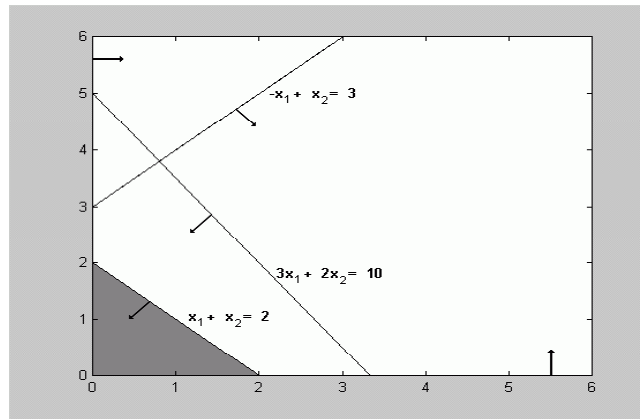
$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar} && z = x_1 + x_2 \\
 &\text{Sujeto a} && \\
 &&& x_1 + x_2 \leq 1 \\
 &&& 4x_1 + 2x_2 \geq 6 \\
 &&& x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

**Figura 3.3: Problema lineal infactible**

No hay intersección \implies La región factible es vacía (figura 3.3). En estos casos es conveniente examinar las restricciones lineales.

Ejemplo 3.10 (Restricciones redundantes)

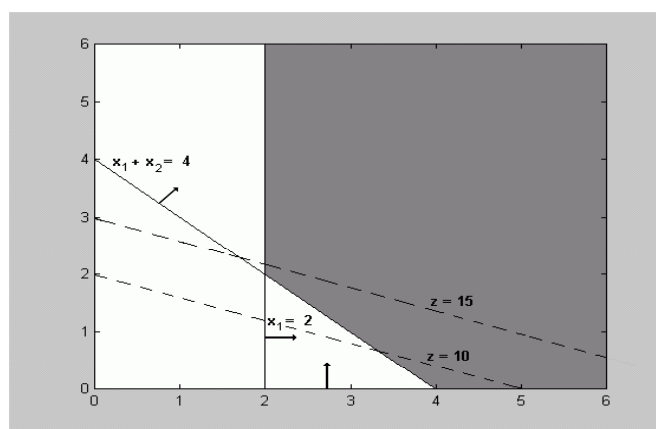
$$\begin{array}{ll}
 \text{Maximizar} & z = 2x_1 + x_2 \\
 \text{Sujeto a} & \\
 & x_1 + x_2 \leq 2 \\
 & -x_1 + x_2 \leq 3 \\
 & 3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{array}$$

**Figura 3.4:** Problema lineal con restricciones redundantes.

Como se puede apreciar en la figura 3.4, las dos últimas restricciones son redundantes, y podemos prescindir de ellas.

Ejemplo 3.11 (Problema no acotado. Valor infinito)

$$\begin{array}{ll}
 \text{Maximizar} & z = 2x_1 + 5x_2 \\
 \text{Sujeto a} & \\
 & x_1 + x_2 \geq 4 \\
 & x_1 \geq 2 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{array}$$

**Figura 3.5:** Problema lineal no acotado (valor infinito)

Está claro a partir de la figura 3.5 que al maximizar $z = 2x_1 + 5x_2$, la solución sería (∞, ∞) , y por tanto el problema es no acotado. El valor de la función objetivo z se puede hacer tan grande como queramos.

Ejemplo 3.12 (Problema no acotado. Solución infinita)

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } z &= -10x_1 + 4x_2 \\ \text{Sujeto a } & \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & 5x_1 - 2x_2 \leq 16 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

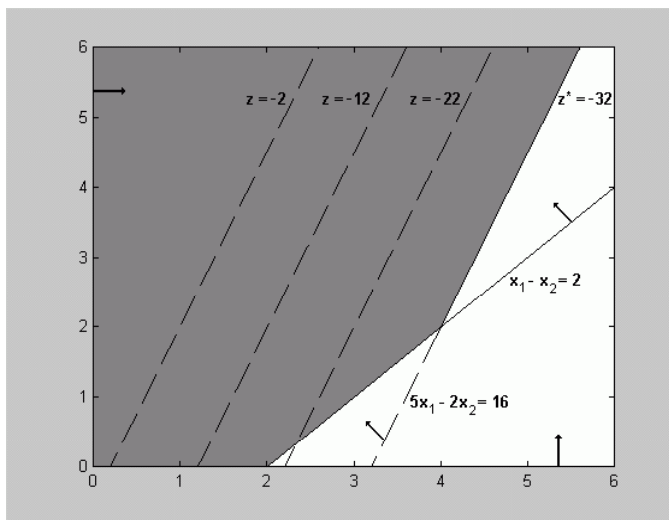


Figura 3.6: Problema lineal no acotado (solución infinita)

El mínimo se alcanza para $z = -32$, que es finito; pero, como se aprecia en la figura 3.6 a lo largo de toda la semirecta con origen $(4, 2)$, hay infinitos puntos, y también puntos solución cuyas coordenadas tienden a ∞ .

3.3 Formulación Algebraica General.

En general tratamos de determinar una solución para un sistema de ecuaciones lineales simultáneas que optimice una determinada función objetivo. Resolveremos tales sistemas por el método de eliminación de Gauss. Previamente se estudian algunos conceptos como los de base y solución básica, fundamentales para el desarrollo y comprensión de la programación lineal.

Podemos establecer la forma general de un problema de programación lineal como sigue:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar o Minimizar } z &= c_1x_1 + \dots + c_nx_n \\ \text{Sujeto a } & \\ & a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \quad (\leq, \geq, =) : b_1 \\ & \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ & a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \quad (\leq, \geq, =) : b_m \\ & x_j \geq 0; \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

donde c_j, a_{ij}, b_i son constantes conocidas.

3.3.1 Forma estándar

Para deducir y utilizar el llamado método simplex de resolución de problemas de programación lineal, este tiene que presentarse en la llamada *forma estándar*. Veremos en primer lugar que aspecto tiene un problema

lineal formulado según la forma estándar y posteriormente comprobaremos que cualquier problema lineal puede transformarse en uno equivalente (con la misma solución) pero presentado en la forma estándar.

La *forma estándar* de un problema de programación lineal viene dada por el siguiente sistema

$$\begin{array}{ll}
 \text{Minimizar}^2 & z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\
 \text{Sujeto a} & \\
 & a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
 & \vdots \\
 & a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
 & x_j \geq 0
 \end{array} \tag{3.1}$$

donde $a_{ij}, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ son constantes fijas, y x_i son las variables de decisión, que toman valores reales. Supondremos también que $b_i \geq 0, \forall i$ (en caso contrario, multiplicamos por -1 la restricción correspondiente). El sistema expresado en forma matricial sería

$$\begin{array}{ll}
 \text{Minimizar} & z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\
 \text{Sujeto a} & \\
 & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
 & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
 \end{array} \tag{3.2}$$

donde \mathbf{A} es una matriz $m \times n$ sobre \mathbb{R} , llamada *matriz de coeficientes tecnológicos o matriz tecnológica*; $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es un vector columna que contiene las *variables de decisión*; $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ es un vector llamado de *recursos* y $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ es el *vector de costes o beneficios* para el problema de minimización o maximización respectivamente.

Como se ha dicho al principio de la sección la forma estándar de un problema lineal es la necesaria para la aplicación y desarrollo del método de resolución SIMPLEX; sin embargo la mayoría de los problemas no se presentan en esta forma, sino que están planteados utilizando desigualdades en lugar de igualdades, por ejemplo, la forma *canónica* de un programa lineal sería

$$\begin{array}{ll}
 \text{Maximizar} & z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\
 \text{Sujeto a} & \\
 & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\
 & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
 \end{array} \tag{3.3}$$

donde ahora los términos independientes \mathbf{b} pueden ser negativos.

Transformación a la forma estándar

Podemos pasar un problema lineal de cualquier tipo a la forma estándar utilizando las siguientes transformaciones:

1. **Cambio en el sentido de la optimización.** Un problema lineal de maximización puede transformarse en uno de minimización cambiándole el signo a la función objetivo.

$$\text{Maximizar } z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad \text{es equivalente a} \quad \text{Minimizar } z' = - \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

2. **Conversión de restricciones.** Todas las desigualdades de un problema lineal se pueden poner en el mismo sentido de desigualdad, solamente es necesario multiplicar las restricciones por -1

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad \text{se puede poner como} \quad - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq -b_i$$

Cualquier desigualdad se puede transformar en una igualdad introduciendo una variable no negativa como suma, si la desigualdad es \leq , o resta, si la desigualdad es \geq . Para una desigualdad del tipo \leq

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad \text{se puede poner} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_i^h = b_i$$

⁴ Algunos autores consideran la forma estándar con objetivo de maximizar.

La variable $x_i^h \geq 0$ se denomina *variable de holgura* y representa la cantidad del recurso b_i que no se ha utilizado.

Para una desigualdad del tipo \geq

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i \quad \text{se puede poner} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - x_i^e = b_i$$

La variable $x_i^e \geq 0$ se denomina *variable de exceso* y se interpreta como el exceso de recurso que se utiliza.

3. **Conversión de igualdades en desigualdades.** Una igualdad lineal se puede sustituir por dos desigualdades. La expresión

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$$

es equivalente a considerar conjuntamente las desigualdades

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i$$

Si multiplicamos la segunda por -1 expresaremos la restricción de igualdad mediante las restricciones de desigualdad siguientes:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \quad \text{y} \quad -\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq -b_i$$

Sin embargo, con este método aumentamos drásticamente el número de las restricciones. Para evitar este inconveniente realizamos la siguiente modificación: Si tenemos m restricciones de igualdad

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad i = 1, \dots, m$$

estas pueden ser sustituidas por el conjunto equivalente siguiente:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j &\leq b_i \quad i = 1, \dots, m \\ -\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right) &\leq -\sum_{i=1}^m b_i \end{aligned}$$

de manera que sólo se ha añadido una restricción.

4. **Conversión de variables no restringidas.** Si x_j es una variable no restringida en signo (puede tomar valores negativos o positivos), se sustituye por una diferencia de dos variables no negativas utilizando el cambio:

$$x_j = x'_j - x''_j$$

con $x'_j, x''_j \geq 0$. Con este cambio aumentamos el número de variables del problema. También podemos eliminar la variable no restringida despejándola de una de las restricciones y sustituyéndola en las demás.

5. **Variables negativas.** Si $x_j \leq 0$ hacemos el cambio $x'_j = -x_j$.
6. **Variables acotadas.** Si $m_j \leq x_j \leq M_j$, con m_j, M_j constantes, se efectúa el cambio

$$x'_j = x_j - M_j$$

la restricción original sobre la variable se transforma en

$$\begin{aligned} x'_j &\geq 0 \\ x'_j &\leq M_j - m_j \end{aligned}$$

Un caso particular sucede cuando $|x_j| \leq M_j$, en este caso

$$-M_j \leq x_j \leq M_j$$

en este caso el cambio es

$$\begin{aligned} x'_j &= x_j + M_j \\ x'_j &\leq 2M_j \\ x'_j &\geq 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 3.13 Encuentra la forma estándar para el siguiente problema:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && 10x_1 - 4x_2 + 3x_3 \\ &\text{Sujeto a} && \\ &&& 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 \geq 15 \\ &&& 3x_1 + x_2 \leq 2 \\ &&& x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; |x_3| \leq 4 \end{aligned}$$

Solución: Hacemos en primer lugar el cambio $x'_3 = x_3 + 4$

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && 10x_1 - 4x_2 + 3x'_3 - 12 \\ &\text{Sujeto a} && \\ &&& 3x_1 + 4x_2 - 3x'_3 \geq 3 \\ &&& 3x_1 + x_2 \leq 2 \\ &&& x'_3 \leq 8 \\ &&& x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x'_3 \geq 0 \end{aligned}$$

A continuación introducimos x_4^e como una variable de exceso en la primera restricción y x_5^h , x_6^h variables de holgura en las restricciones segunda y tercera

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && 10x_1 - 4x_2 + 3x'_3 - 12 \\ &\text{Sujeto a} && \\ &&& 3x_1 + 4x_2 - 3x'_3 - x_4^e = 3 \\ &&& 3x_1 + x_2 + x_5^h = 2 \\ &&& x'_3 + x_6^h = 8 \\ &&& x_1, x_2, x'_3, x_4^e, x_5^h, x_6^h \geq 0 \end{aligned}$$

3.3.2 Soluciones básicas

Sea un problema lineal en forma estándar:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ &\text{Sujeto a} && \\ &&& \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ &&& \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

con $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ y $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, con $m \leq n$ y $\text{rango}(\mathbf{A}) = m$.

Como el rango de \mathbf{A} es m , existirán al menos m columnas linealmente independientes. Sea \mathbf{B} la matriz formada por esas m columnas linealmente independientes. \mathbf{B} es entonces una matriz cuadrada no singular y por tanto, la matriz \mathbf{B} tiene inversa y el sistema

$$\mathbf{Bx}_B = \mathbf{b} \tag{3.4}$$

donde \mathbf{x}_B es un vector formado por las variables de decisión del problema asociadas a las columnas de \mathbf{B} , tiene como solución

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \tag{3.5}$$

Utilizando este vector podemos construir una solución del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ haciendo 0 las variables que no estén asociadas a las columnas de \mathbf{B} . Suponiendo, sin pérdida de generalidad, que las columnas linealmente independientes de \mathbf{A} son las m primeras entonces

$$\mathbf{B} = [\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m]$$

$$\mathbf{x}_B = (x_1, \dots, x_m)$$

y por tanto el vector $\bar{\mathbf{x}}$ definido como

$$\bar{\mathbf{x}} = \left(x_1, \dots, x_m, \overbrace{0, \dots, 0}^{n-m} \right) = (\mathbf{x}_B, \mathbf{0})$$

es solución del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Si \mathbf{D} es la matriz formada por el resto de las columnas de \mathbf{A} que no pertenecen a \mathbf{B} , es decir

$$\mathbf{D} = [\mathbf{A}_{m+1}, \dots, \mathbf{A}_n]$$

tendremos

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = [\mathbf{B}, \mathbf{D}](\mathbf{x}_B, \mathbf{0}) = \mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{D}\mathbf{0} = \mathbf{B}\mathbf{x}_B = \mathbf{B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{b}$$

Modificando la base, es decir, eligiendo otro conjunto formado por otras m columnas de \mathbf{A} linealmente independientes, obtendremos otra solución de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Se observa pues que a cualquier submatriz \mathbf{B} de \mathbf{A} , formada por m columnas linealmente independientes, se le puede asociar una solución de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, dada por:

$$\bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}_B, \mathbf{0}) = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0})$$

lo que nos lleva a dar la siguiente definición

Definición 3.14 (Solución básica) Si el rango de la matriz \mathbf{A} es m , al tomar cualquier submatriz \mathbf{B} regular ($\det(\mathbf{B}) \neq 0$) de orden m ($\mathbf{B} \in M_{m \times m}$) y hacer 0 las restantes $n - m$ variables asociadas a los vectores columna de \mathbf{A} que no están en \mathbf{B} obtenemos un sistema de m ecuaciones con m incógnitas

$$\mathbf{B}\mathbf{x}_B = \mathbf{b}$$

cuya solución, junto con el resto de coordenadas que no están en \mathbf{x}_B iguales a cero, se denomina solución básica, y se representa mediante $\bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}_B, \mathbf{0})$. Si alguna de sus componentes es nula, entonces $\bar{\mathbf{x}}$ es una solución básica degenerada.

Se denomina *base* o *matriz básica* a cualquier matriz cuadrada \mathbf{B} no singular y de orden m . Formada por un conjunto de m vectores columna, \mathbf{A}_i , de \mathbf{A} linealmente independientes.

Las *variables básicas* son las variables del vector \mathbf{x}_B formado por las m variables asociadas a la solución básica, es decir, las variables asociadas a las columnas de \mathbf{B} .

Las *variables no básicas* son las variables asociadas a las columnas que no están en \mathbf{B} y que hemos llamado matriz \mathbf{D} .

Ejemplo 3.15 Estudia las soluciones básicas del sistema de ecuaciones lineales siguiente

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 12 \end{aligned}$$

Solución: Por su definición una solución básica está compuesta por al menos $n - m$ componentes nulas. Para este sistema $m = 2$ y $n = 3$, por tanto, en cada solución básica, al menos una de las componentes tiene que ser 0.

Si hacemos $x_1 = 0$ el sistema nos queda como

$$\begin{aligned} 2x_2 + x_3 &= 8 \\ 3x_2 - x_3 &= 12 \end{aligned}$$

y la matriz \mathbf{B}_1 asociada es

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

que es regular y por tanto resolviendo según la ecuación 3.5

$$\mathbf{x}_{\mathbf{B}_1} = (x_2, x_3) = \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} = (4, 0)$$

que es degenerada. La solución básica asociada a \mathbf{B}_1 para el sistema completo es

$$\mathbf{x}^1 = (0, 4, 0)$$

Si ahora hacemos $x_2 = 0$; la submatriz de orden $m = 2$ que obtenemos es:

$$\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

que también es regular y utilizando de nuevo la ecuación 3.5 obtenemos

$$\mathbf{x}_{\mathbf{B}_2} = (x_1, x_3) = (10, -2)$$

y como solución básica asociada a \mathbf{B}_2 para el sistema completo se obtiene

$$\mathbf{x}^2 = (10, 0, -2)$$

Por último si ahora $x_3 = 0$, la matriz básica es

$$\mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a la que corresponde la solución

$$\mathbf{x}_{\mathbf{B}_3} = (x_1, x_2) = (0, 4)$$

y como solución básica asociada a \mathbf{B}_3 para el sistema original tenemos

$$\mathbf{x}_3 = (0, 4, 0)$$

que es de nuevo un solución básica degenerada.

Se observa en el ejemplo anterior que no todas las soluciones básicas van a ser factibles, ya que algunas de ellas no cumplen la condición $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. Estamos interesados en aquellas soluciones básicas que cumplan todas las restricciones del problema.

Definición 3.16 (Solución factible básica) Una solución básica $\mathbf{x}_{\mathbf{B}}$, que sea factible se denomina solución factible básica (s.f.b) o solución fundamental. En este caso \mathbf{B} es una base factible. Si $\mathbf{x}_{\mathbf{B}}$ es degenerada se denomina solución factible básica degenerada.

Se observa que hay $\binom{n}{m}$ posibles soluciones básicas para el sistema de ecuaciones $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, correspondientes al número de formas de seleccionar m de las n columnas, suponiendo que no sea redundante ninguna de las ecuaciones del sistema. Este número es el máximo, ya que alguna de estas combinaciones puede producir una matriz no regular.

Si denotamos por $c_{\mathbf{B}_i}$ el coeficiente de la variable básica $x_{\mathbf{B}_i}$ en la función objetivo, el vector $\mathbf{c}_{\mathbf{B}} = (c_{\mathbf{B}_1}, \dots, c_{\mathbf{B}_m})$ está formado por los coeficientes de la función objetivo de las variables básicas. Dada una solución factible básica $(\mathbf{x}_{\mathbf{B}}, 0)$, el valor de la función objetivo z , en esta solución es:

$$z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^T \mathbf{x}_{\mathbf{B}}$$

El siguiente resultado nos indica que la solución de un problema lineal se puede conseguir consultando solamente las soluciones básicas.

Teorema 3.17 (Teorema Fundamental) Dado un problema de programación lineal en forma estándar:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ &\text{Sujeto a} \\ &\quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ &\quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

con $\mathbf{A} \in M_{m \times n}$, $\text{rango}(\mathbf{A}) = m \leq n$, $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ con $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, entonces sucede:

1. Si hay una solución factible $\bar{\mathbf{x}} \implies$ Hay una solución factible básica.
2. Si hay una solución factible óptima $\mathbf{x}^* \implies$ Hay una solución factible básica óptima.

Este resultado es muy interesante porque permite reducir el problema de búsqueda del óptimo dentro de un conjunto infinito de puntos, al cálculo de los valores que toma la función objetivo en las soluciones factibles básicas, que como se ha comprobado forman un conjunto finito.

Aunque esta reducción es importante, puede resultar ineficaz en la práctica, ya que el número de soluciones básicas es

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

que puede ser un número demasiado grande, por ejemplo para $n = 25$ y $m = 20$ obtenemos un valor de 53130 posibles soluciones básicas.

También es necesario observar que si bien sobre el conjunto de las soluciones fundamentales, al ser un conjunto finito, la función siempre alcanza un mínimo (siempre que el problema no sea infactible), esto no implica que la función tenga mínimo sobre todo el conjunto de las soluciones factibles.

Ejemplo 3.18 Si las restricciones son

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

El teorema anterior permite reducir el conjunto de puntos donde hay que buscar la solución al conjunto formado por los puntos $(1, 0, 0)$; $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ que son las soluciones básicas.

Ejemplo 3.19 Mientras que si las restricciones son:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

El teorema nos permitirá reducir la búsqueda del óptimo al conjunto de las soluciones básicas $(1, 1, 0)$ y $(0, 1, 2)$.

3.4 Método Simplex

La idea del método Simplex consiste en pasar de una solución factible básica del conjunto de restricciones de un problema en forma estándar a otra, de modo que el valor de la función objetivo decrezca continuamente hasta alcanzar un mínimo o descartar que este exista. El teorema fundamental garantiza que para buscar una solución factible óptima, basta considerar sólo las soluciones factibles básicas. Veremos ahora como se puede construir un método eficiente para encontrar un mínimo de un problema lineal.

El método Simplex consiste en intentar llegar a una solución óptima a través de una secuencia de soluciones factibles básicas, en las que se va disminuyendo el valor de la función objetivo con cada paso de la secuencia. El método se basa en las tres operaciones siguientes:

1. Partiendo de una solución factible básica, se elige una variable no básica, cuya introducción en la base produzca otra solución factible básica que reduzca el valor de la función objetivo.
2. Dado que en el apartado anterior pretendemos introducir una nueva variable habrá que elegir otra variable que salga de la base. Este cambio hay que hacerlo de modo que la nueva solución básica obtenida sea factible.
3. Pasar de una solución a otra mediante un sistema de ecuaciones equivalente.

Veamos en la siguiente sección el desarrollo de este conjunto de pasos y que constituyen la base del método Simplex.

3.4.1 Desarrollo del método

Para el desarrollo del método del simplex debemos comenzar con el sistema de ecuaciones que forman las restricciones de un problema lineal en forma estándar

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \quad (3.6)$$

con $m \leq n$ y rango de la matriz de coeficientes \mathbf{A} igual a m .

Como antes, si el rango de \mathbf{A} es m , existen al menos m columnas linealmente independientes, y supongamos sin pérdida de generalidad que esas columnas son las m primeras: $\{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m\}$. Estos vectores constituirán una base de \mathbb{R}^m y cualquier vector de este espacio podrá expresarse en términos de ella. Por tanto, el resto de las columnas $\mathbf{A}_{m+1}, \dots, \mathbf{A}_n$ podrá ponerse como combinación lineal de los elementos de esta base y podremos expresar el sistema 3.6 en términos de esta base

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & & & y_{1,m+1}x_{m+1} & + & \dots & + & y_{1,q}x_q & + & \dots & + & y_{1n}x_n & = & x_1^0 \\ & \ddots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & x_m & y_{m,m+1}x_{m+1} & + & \dots & + & y_{m,q}x_q & + & \dots & + & y_{mn}x_n & = & x_m^0 \end{array} \quad (3.7)$$

Esta expresión se llama forma *triangular o canónica* de un sistema de ecuaciones y puede obtenerse a partir de 3.6 mediante el método de reducción de Gauss. Además en la sección anterior se vió que si definíamos $\mathbf{B}_0 = [\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m]$, entonces el vector construido como $\mathbf{x}^0 = (\mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0})$ es una solución básica del sistema 3.6.

El sistema descrito en 3.7 se obtienen a partir de 3.6 premultiplicando por \mathbf{B}_0^{-1} , de forma que en este caso

$$\begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_m^0 \end{pmatrix} = \mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{b}$$

y si definimos $\mathbf{y}_k^T = (y_{1k}, \dots, y_{mk})$ entonces

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{A}_k \quad (3.8)$$

Supongamos ahora que la solución básica \mathbf{x}^0 es también factible y por tanto se verifican las restricciones

$$\mathbf{A}\mathbf{x}^0 = \mathbf{b} \iff x_1^0\mathbf{A}_1 + \dots + x_n^0\mathbf{A}_n = \mathbf{b} \\ \mathbf{x}^0 \geq \mathbf{0}$$

y como \mathbf{x}^0 es una solución básica, sus componentes no básicas son cero y el sistema queda

$$\begin{array}{l} x_1^0\mathbf{A}_1 + \dots + x_m^0\mathbf{A}_m = \mathbf{b} \\ \mathbf{x}^0 \geq \mathbf{0} \end{array} \quad (3.9)$$

Siguiendo con la idea inicial del método Simplex, a partir de esta primera solución factible básica tenemos que encontrar otra solución factible básica. Como cada solución básica está asociada a una base, realizar un cambio de solución básica implica un cambio de base, no obstante habrá que realizar este cambio de base de manera que la nueva solución básica siga siendo factible.

Si se quiere introducir en la base el vector \mathbf{A}_q , asociado a la variable no básica x_q , hay que suponer en primer lugar que $\mathbf{A}_q \neq \mathbf{0}$, es decir, que no es el vector nulo. A través del sistema 3.7 es posible obtener su representación en términos de la base actual \mathbf{B}_0 :

$$\mathbf{A}_q = \mathbf{A}_1y_{1q} + \dots + \mathbf{A}_my_{mq}$$

Como $\mathbf{A}_q \neq \mathbf{0}$, debe existir algún $y_{jq} \neq 0$; supongamos, sin pérdida de generalidad, que esto ocurre para y_{1q} . En este caso se puede despejar el vector \mathbf{A}_1 dividiendo por y_{1q}

$$\mathbf{A}_1 = \frac{1}{y_{1q}} (\mathbf{A}_q - \mathbf{A}_2y_{2q} + \dots + \mathbf{A}_my_{mq}) \quad (3.10)$$

Con este cambio el conjunto de vectores $\mathbf{B}_1 = \{\mathbf{A}_q, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_m\}$ formará una base y todos los elementos de \mathbb{R}^m se podrán expresar como combinación lineal de sus elementos. En particular el resto de columnas de \mathbf{A} . También es posible obtener la expresión del sistema 3.7 en términos de esta base.

Si sustituimos ahora la expresión de \mathbf{A}_1 (ecuación 3.10) en la ecuación 3.9 obtendremos la solución básica respecto a la nueva base $\mathbf{B}_1 = \{\mathbf{A}_q, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_m\}$

$$x_1^0 \left\{ \frac{1}{y_{1q}} (\mathbf{A}_q - \mathbf{A}_2 y_{2q} + \dots + \mathbf{A}_m y_{mq}) \right\} + x_2^0 \mathbf{A}_2 + \dots + x_m^0 \mathbf{A}_m = \mathbf{b}$$

Reagrupando términos

$$\frac{x_1^0}{y_{1q}} \mathbf{A}_q + \left(x_2^0 - \frac{x_1^0}{y_{1q}} y_{2q} \right) \mathbf{A}_2 + \dots + \left(x_m^0 - \frac{x_1^0}{y_{1q}} y_{mq} \right) \mathbf{A}_m = \mathbf{b}$$

de donde obtenemos la expresión para la nueva solución básica

$$\mathbf{x}^1 = \left(0, x_2^0 - \frac{x_1^0}{y_{1q}} y_{2q}, \dots, x_m^0 - \frac{x_1^0}{y_{1q}} y_{mq}, 0, \dots, 0, \overbrace{\frac{x_1^0}{y_{1q}}}^q, 0, \dots, 0 \right) \quad (3.11)$$

El proceso anterior equivale a dividir la fila de la variable básica que queremos sustituir por el elemento (llamado *elemento pivote*) de la columna asociada a la variable que queremos que entre en la base, con el fin de obtener un 1 en ese elemento. A continuación y utilizando operaciones elementales entre filas se hacen 0 los restantes elementos de esa columna. En las siguientes tablas podemos observar el proceso. En primer lugar dividimos el sistema 3.7 por el valor del elemento pivote para obtener un 1 en ese elemento, por eso es necesario que dicho elemento sea distinto de cero ($y_{1q} \neq 0$)

$$\begin{array}{cccccccccc} \frac{1}{y_{1q}} x_1 & & \frac{y_{1,m+1}}{y_{1q}} x_{m+1} & + & \dots & + & x_q & + & \dots & + & \frac{y_{1n}}{y_{1q}} x_n & = & \frac{x_1^0}{y_{1q}} \\ & x_2 & & y_{2,m+1} x_{m+1} & + & \dots & + & y_{2,q} x_q & + & \dots & + & y_{2,n} x_n & = & x_2^0 \\ & \ddots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & x_m & y_{m,m+1} x_{m+1} & + & \dots & + & y_{m,q} x_q & + & \dots & + & y_{mn} x_n & = & x_m^0 \end{array}$$

A continuación y utilizando operaciones elementales entre filas, restamos a las restantes filas ($k = 2 \dots m$) la primera multiplicada por el coeficiente adecuado ($y_{k,q}$ $k = 2 \dots m$)

$$\begin{array}{cccccccccc} \frac{x_1}{y_{1q}} & & + \frac{y_{1,m+1}}{y_{1q}} x_{m+1} & \dots & + x_q & \dots & + \frac{y_{1n}}{y_{1q}} x_n & = & \frac{x_1^0}{y_{1q}} \\ - \frac{y_{2,q} x_1}{y_{1q}} & + x_2 & & + y'_{2,m+1} x_{m+1} & \dots & 0 & \dots & + y'_{2,n} x_n & = & x_2^0 - \frac{y_{2,q} x_1^0}{y_{1q}} \\ & \ddots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ - \frac{y_{m,q} x_1}{y_{1q}} & & + x_m & + y'_{m,m+1} x_{m+1} & \dots & 0 & \dots & + y'_{m,n} x_n & = & x_m^0 - \frac{y_{m,q} x_1^0}{y_{1q}} \end{array}$$

que es el sistema triangular para la nueva base $\mathbf{B}_1 = \{\mathbf{A}_q, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_m\}$, donde $\left(y'_{j,k} = y_{j,k} - \frac{y_{j,q} y_{1,k}}{y_{1q}} \right)$ con $j = 2, \dots, m$ y $k = m+1, \dots, n$.

Para que la nueva solución básica obtenida sea factible, tiene que ocurrir $\mathbf{x}^1 \geq 0$; teniendo en cuenta la expresión de la nueva solución básica en términos de la antigua dada en la ecuación 3.11

$$\frac{x_1^0}{y_{1q}} \geq 0 \quad (3.12)$$

$$x_k^0 - y_{kq} \frac{x_1^0}{y_{1q}} \geq 0 \text{ para } k = 2, \dots, m \quad (3.13)$$

De 3.12 y teniendo en cuenta que $\mathbf{x}^0 \geq 0$ (ya que suponemos \mathbf{x}^0 es una solución factible básica) debe ocurrir

$$y_{1q} > 0 \quad (3.14)$$

lo que nos da una de las condiciones para que la nueva solución básica sea factible: el elemento pivote tiene que ser estrictamente positivo.

Teniendo en cuenta ahora $\frac{x_1^0}{y_{1q}} \geq 0$ (ecuación 3.12) y que \mathbf{x}^0 es factible ($x_j^0 \geq 0, j = 1, \dots, m$), el signo de 3.13 dependerá del signo de y_{kq} . Se distinguen tres casos

$$\begin{aligned} y_{kq} < 0 &\Rightarrow -\frac{x_1^0}{y_{1q}} y_{kq} \geq 0 \Rightarrow x_k^0 - \frac{x_1^0}{y_{1q}} y_{kq} \geq 0 \\ y_{kq} = 0 &\Rightarrow -\frac{x_1^0}{y_{1q}} y_{kq} = 0 \Rightarrow x_k^0 - \frac{x_1^0}{y_{1q}} y_{kq} \geq 0 \\ y_{kq} > 0 &\Rightarrow x_k^0 - \frac{x_1^0}{y_{1q}} y_{kq} \text{ no tiene signo definido} \end{aligned}$$

El tercer caso, $y_{kq} > 0$, implica una diferencia entre dos números positivos y por tanto el resultado puede tener cualquier signo. Para garantizar la no negatividad tendrá que cumplirse

$$\frac{x_k^0}{y_{kq}} > \frac{x_1^0}{y_{1q}} \text{ si } y_{kq} > 0$$

así pues, la elección de y_{1q} no es arbitraria, y solamente podremos cambiar el vector \mathbf{A}_1 por el vector \mathbf{A}_q manteniendo la factibilidad si se cumple

$$\frac{x_1^0}{y_{1q}} = \min \left\{ \frac{x_k^0}{y_{kq}} \mid y_{kq} > 0 \right\} \quad (3.15)$$

Esta condición se conoce con el nombre de *criterio de salida*, ya que determina que vector dejará la base, es decir, qué variable deja de ser básica en la nueva solución. Para el caso general, para poder hacer el cambio de \mathbf{A}_p vector de la base, por \mathbf{A}_q vector no básico, manteniendo la factibilidad de la nueva solución, se tendrá que cumplir

$$\frac{x_p^0}{y_{pq}} = \min \left\{ \frac{x_k^0}{y_{kq}} \mid y_{kq} > 0 \right\}$$

Junto a este criterio de salida, que determina la variable que deja la base, debemos incorporar un criterio de entrada, es decir, un criterio que nos permita elegir de entre el conjunto de las variables no básicas aquella que sustituya a la variable que sale. Este criterio de entrada se construye de forma que la nueva solución factible básica mejore el valor de la función objetivo. Para ello compararemos el valor de la función objetivo en la solución factible básica inicial \mathbf{x}^0

$$z^0 = c_1 x_1^0 + \dots + c_m x_m^0 \quad (3.16)$$

con el valor en la nueva solución factible básica \mathbf{x}^1

$$z^1 = c_2 x_2^1 + \dots + c_m x_m^1 + c_q x_q^1 \quad (3.17)$$

Utilizando las expresiones para $\{x_2^1, \dots, x_m^1, x_q^1\}$ de la ecuación 3.11

$$z^1 = c_2 \left(x_2^0 - \frac{x_1^0}{y_{1q}} y_{2q} \right) + \dots + c_m \left(x_m^0 - \frac{x_1^0}{y_{1q}} y_{mq} \right) + c_q \frac{x_1^0}{y_{1q}}$$

Si se agrupan términos y se saca factor común $\frac{x_1^0}{y_{1q}}$ obtenemos la expresión

$$z^1 = (c_2 x_2^0 + \dots + c_m x_m^0) + \frac{x_1^0}{y_{1q}} (c_q - (c_2 y_{2q} + \dots + c_m y_{mq})) \quad (3.18)$$

Si ahora se restan 3.18 y 3.16

$$z^1 - z^0 = \frac{x_1^0}{y_{1q}} (c_q - (c_2 y_{2q} + \dots + c_m y_{mq})) - c_1 x_1^0 \quad (3.19)$$

Multiplicando y dividiendo el último sumando de 3.19 por y_{1q}

$$\begin{aligned} z^1 - z^0 &= \frac{x_1^0}{y_{1q}} (c_q - (c_2 y_{2q} + \dots + c_m y_{mq})) - c_1 \frac{x_1^0}{y_{1q}} y_{1q} \\ z^1 - z^0 &= \frac{x_1^0}{y_{1q}} [c_q - (c_1 y_{1q} + c_2 y_{2q} + \dots + c_m y_{mq})] \end{aligned} \quad (3.20)$$

La expresión entre paréntesis del segundo miembro se puede expresar como

$$c_1 y_{1q} + c_2 y_{2q} + \dots + c_m y_{mq} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{y}_q = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_q = z_q$$

y z_q es la influencia del vector \mathbf{A}_q en la función objetivo y la expresión anterior queda como

$$z^1 - z^0 = \frac{x_1^0}{y_{1q}} [c_q - z_q] \quad (3.21)$$

Al término $(c_q - z_q)$ se le denomina *coeficiente de coste relativo* de la variable no básica x_q y se denota por r_q . Este nombre es debido a que proporciona la diferencia entre el coste directo c_q y el indirecto z_q que proporciona la variable x_q .

Por tanto el valor de la función objetivo queda expresado en la nueva solución factible básica en términos del valor que toma para la solución factible básica inicial y un término que depende del vector que se incorpore a la base. Obviamente la mejora en la función objetivo se consigue cuando el nuevo valor es menor que el primero

$$z^1 < z^0 \iff r_q = c_q - z_q = c_q - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_q < 0$$

donde se ha tenido en cuenta que por factibilidad $\frac{x_1^0}{y_{1q}} \geq 0$. Por tanto el *criterio de entrada* será la elección de una variable cuyo coeficiente de coste relativo sea negativo. En general se suele elegir como variable de entrada aquella que tenga un coeficiente de coste relativo más negativo

$$r_q = \min \{ r_k \mid r_k < 0 \} \quad (3.22)$$

Si $r_q = 0$ entonces la variable x_q podrá entrar en la base pero sin modificar el valor de la función objetivo.

Por otra parte, una vez elegida la variable de entrada x_q , el criterio de salida indica que la variable x_p que deja la base cumpla

$$\frac{x_p^0}{y_{pq}} = \min \left\{ \frac{x_i^0}{y_{iq}} \mid y_{iq} > 0 \right\}$$

3.4.2 Método del Simplex en forma matricial

Las operaciones anteriores se pueden expresar de forma muy sencilla utilizando operaciones matriciales. La forma matricial para el problema lineal en forma estándar es

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{Sujeto a} & \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \right\}$$

donde $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ y $\mathbf{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ con rango $m \leq n$. Si \mathbf{B} es una matriz formada por m columnas linealmente independientes de \mathbf{A} , siendo \mathbf{D} la matriz formada por las restantes $n - m$ columnas, entonces el problema anterior se puede expresar como

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_D^T \mathbf{x}_D \\ \text{Sujeto a} & [\mathbf{B}, \mathbf{D}] \mathbf{x} = \mathbf{B} \mathbf{x}_B + \mathbf{D} \mathbf{x}_D = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}_B, \mathbf{x}_D \geq \mathbf{0} \end{array} \right\}$$

Donde los subíndices \mathbf{B} y \mathbf{D} indican las componentes de cada vector asociadas a las columnas de \mathbf{B} y \mathbf{D} respectivamente.

Entonces si

$$\mathbf{x}_D = 0 \implies \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \text{ es una solución básica}$$

$$\mathbf{x}_D \neq 0 \implies \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{x}_D$$

Utilizando estas expresiones podemos calcular el valor de la función objetivo como:

$$\begin{aligned} z &= \mathbf{c}_B^T (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{x}_D) + \mathbf{c}_D^T \mathbf{x}_D \\ &= \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{x}_D + \mathbf{c}_D^T \mathbf{x}_D \\ &= \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + (\mathbf{c}_D^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}) \mathbf{x}_D \end{aligned}$$

Siendo

$$\mathbf{r}_D^T = \mathbf{c}_D^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D} \quad (3.23)$$

el vector de coeficientes de coste relativo de las variables no básicas.

3.4.3 Teoremas de optimización

A partir del desarrollo anterior podemos dar los siguiente resultados sobre optimización en programación lineal.

Teorema 3.20 (Mejora de la solución factible básica) *Dada una solución factible básica no degenerada \mathbf{x}^0 con valor objetivo z^0 y vector de costes relativos \mathbf{r}_D^T entonces*

Si $\exists q$ con x_q no básico, tal que $r_q = c_q - z_q < 0 \implies$ Existe solución factible con valor objetivo $z^1 < z^0$.

- *Si la columna \mathbf{A}_q puede sustituir a un vector de la base original y generar una nueva solución factible básica, esta nueva solución tendrá un valor objetivo $z^1 < z^0$.*
- *Si \mathbf{A}_q no puede sustituir a ningún vector de la base para generar una nueva solución factible básica entonces el conjunto factible no está acotado y la función objetivo puede hacerse arbitrariamente pequeña.*

De hecho si $\exists x_q$ variable no básica con $r_q < 0$ y $y_{iq} \leq 0 \forall i = 1, \dots, m \implies$ La función objetivo z no está acotada inferiormente y por ello no existe el mínimo.

Teorema 3.21 (Condición de optimización) *Si para \mathbf{x}^0 es una solución factible básica con $r_j \geq 0, \forall j$ asociado a x_j no básica \implies Dicha solución factible es óptima. Además si $r_j > 0$, entonces la solución es única.*

Notar que el coeficiente de coste relativo de una variable básica siempre es 0, puesto que ya está en la base. La introducción de una nueva variable básica x_q con coeficiente de coste relativo $r_q = 0$, no modifica el valor de la función objetivo.

3.4.4 Desarrollo computacional del método simplex

Consideremos un sistema en forma canónica (ecuación 3.7) con solución factible básica inicial $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0, 0, \dots, 0)$ asociada a las m primeras columnas de \mathbf{A} y sea $z^0 = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^0$ el valor correspondiente de la función objetivo. Por comodidad escribiremos los coeficientes en formato tabla sin que aparezcan las variables explícitamente.

Para desarrollar el método simplex se utiliza el valor de la función objetivo $z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ como una variable adicional mientras que la ecuación

$$c_1 x_1 + \dots + c_n x_n - z = 0$$

se considera parte del sistema. La tabla de coeficientes queda de la siguiente forma

$$\begin{array}{c|cccccc|c|c}
 & x_1 & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_n & z & \mathbf{b} \\
 \hline
 x_1 & 1 & \cdots & 0 & y_{1,m+1} & \cdots & y_{1,n} & 0 & x_1^0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 x_m & 0 & \cdots & 1 & y_{m,m+1} & \cdots & y_{m,n} & 0 & x_m^0 \\
 \hline
 & c_1 & \cdots & c_m & c_{m+1} & \cdots & c_n & -1 & 0
 \end{array} \quad (3.24)$$

La columna correspondiente a la variable z no va a cambiar durante todo el método, por tanto, no será necesario añadir su columna correspondiente a z .

Al introducir una nueva ecuación, las dimensión aumenta en una unidad $m \rightarrow m+1$ y para expresar la tabla en forma diagonal habría que hacer 0 en los coeficientes de esta fila correspondientes a las variables básicas. Para ello restamos a esta fila la combinación lineal adecuada que consiste en multiplicar cada fila j anterior, por el correspondiente coeficiente c_j de la función objetivo. Obtenemos así la siguiente tabla (de la que ya hemos eliminado la columna asociada a z , ya que no va a cambiar durante todo el proceso)

$$\begin{array}{c|cccccc|c}
 & x_1 & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_n & \mathbf{b} \\
 \hline
 x_1 & 1 & \cdots & 0 & y_{1,m+1} & \cdots & y_{1,n} & x_1^0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 x_m & 0 & \cdots & 1 & y_{m,m+1} & \cdots & y_{m,n} & x_m^0 \\
 \hline
 & 0 & \cdots & 0 & \left(c_{m+1} - \sum_{j=1}^m c_j y_{j,m+1}\right) & \cdots & \left(c_n - \sum_{k=1}^m c_j y_{j,n}\right) & -\sum_{j=1}^m c_j x_j^0
 \end{array}$$

Se observa que en la última fila, en las columnas no básicas, aparecen los coeficientes de coste relativo de las variables no básicas correspondientes, mientras que en la columna de términos independientes aparece el valor de la función objetivo para la solución básica actual pero cambiada de signo. Es decir la última ecuación se ha cambiado por

$$r_{m+1}x_{m+1} + \cdots + r_n x_n - z = -z^0$$

y la tabla puede expresarse como

$$\begin{array}{c|cccccc|c}
 & x_1 & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_n & \mathbf{b} \\
 \hline
 x_1 & 1 & \cdots & 0 & y_{1,m+1} & \cdots & y_{1,n} & x_1^0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 x_m & 0 & \cdots & 1 & y_{m,m+1} & \cdots & y_{m,n} & x_m^0 \\
 \hline
 & 0 & \cdots & 0 & r_{m+1} & \cdots & r_n & -z^0
 \end{array} \quad (3.25)$$

Así pues la última fila se trata como las demás comenzando por las c_j y reduciendo a 0 los términos correspondientes a las variables básicas con operaciones entre filas.

A partir de esta tabla se aplican los criterios de optimización:

1. Si $r_k \geq 0$ para $k = (m+1), \dots, n \implies$ La solución es óptima.
2. Si $\exists r_k < 0$ se puede mejorar la solución (suponiendo no degeneración), incorporando la variable no básica correspondiente a la solución. Si hay más de un coeficiente negativo, se puede seleccionar cualquiera de ellos, aunque en general se selecciona el más negativo.
3. Después de seleccionar una columna q sobre la que pivotar, la elección final del elemento pivote se hace calculando la razón x_i^0/y_{iq} con $y_{iq} > 0$ de la q -ésima columna y seleccionando el elemento p que genere la razón mínima. Al pivotar sobre este elemento se mantiene la factibilidad y suponiendo no degeneración, i.e. $x_i^0 \neq 0$, disminuirá el valor de la función objetivo en la nueva solución obtenida. Si en la columna q no hay elementos no negativos, el problema es no acotado. Si se ha podido hacer el cambio entre las columnas p y q , tendremos la expresión del sistema respecto a otra base, incluyendo la fila de los coeficientes de coste relativo y se repite el proceso con esta nueva tabla.

El algoritmo del método puede expresarse como sigue

Algoritmo del Método SIMPLEX

- **Paso 0.** Contrucción de la tabla 3.24 correspondiente a una solución factible básica inicial y mediante el cálculo de los coeficientes de coste relativo de las variables no básicas, se transforma de la tabla inicial en la tabla 3.25.
- **Paso 1.** Si $r_k \geq 0 \quad \forall k \implies$ La solución factible básica es óptima y hemos resuelto el problema.
- **Paso 2.** Se elige una variable no básica x_q con $r_q < 0$, para entrar en la base. Cualquier variable no básica x_q con coste relativo $r_q < 0$ producirá una mejora en la función objetivo, aunque en general se toma la variable cuyo coeficiente de coste relativo sea más negativo.
- **Paso 3.** Se calculan las razones x_j^0/y_{jq} con $y_{jq} > 0, j = 1, \dots, m$. Si $\nexists y_{jq} > 0$ el problema es no acotado. Si por el contrario existe algún $y_{jq} > 0$, se selecciona la variable x_p de forma que la razón x_p^0/y_{pq} sea la menor.
- **Paso 4.** Pivotamos sobre el elemento y_{pq} , actualizando todas las filas incluida la última. Volvemos al paso 1.

Ejemplo 3.22 Maximizar la función $3x_1 + x_2 + 3x_3$ sujeta a las restricciones

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 6 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solución: Para convertir el problema a la forma estándar de modo que pueda aplicarse el procedimiento simplex, se transforma el objetivo de maximización en minimización multiplicando la función objetivo por menos uno y se introducen tres variables de holgura no negativas x_4^h, x_5^h y x_6^h , con lo que la forma estándar del problema queda

$$\begin{array}{llll} \text{Minimizar} & -3x_1 & -x_2 & -3x_3 \\ \text{Sujeto a} & & & \\ & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4^h & & = 2 \\ & x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & +x_5^h & = 5 \\ & 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & & & +x_6^h & = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4^h, x_5^h, x_6^h & \geq 0 \end{array}$$

Construimos la tabla inicial

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^h	x_6^h	b
x_4^h	2	1	1	1	0	0	2
x_5^h	1	2	3	0	1	0	5
x_6^h	2	2	1	0	0	1	6
	-3	-1	-3	0	0	0	0

Observamos que el problema ya está en forma triangular si consideramos a las tres variables de holgura como las variables básicas. Además y puesto en la última fila sus coeficientes asociados son 0, el resto de valores asociados a las variables no básicas serán sus coeficientes de coste relativo correspondientes: $r_1 = -3, r_2 = -1$ y $r_3 = -3$.

La solución básica para este sistema es

$$\mathbf{x}^0 = (0, 0, 0, 2, 5, 6)$$

con valor objetivo

$$z^0 = 0$$

Como existen coeficientes de coste relativo negativos podemos mejorar el valor objetivo, introduciendo en la base cualquiera de las no básicas x_1 , x_2 o x_3 . Los posibles pivotes de cada columna se encuentran encuadrados y han sido calculados según la regla del menor cociente x_j^0/y_{jq} .

$$\begin{aligned}\text{Para } x_1 &\Rightarrow 1 = \min \left\{ \boxed{\frac{2}{2}}, \frac{5}{1}, \frac{6}{2} \right\} = \min \{1, 5, 3\} \\ \text{Para } x_2 &\Rightarrow 2 = \min \left\{ \boxed{\frac{2}{1}}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2} \right\} = \min \left\{ 2, \frac{5}{2}, 3 \right\} \\ \text{Para } x_3 &\Rightarrow \frac{5}{3} = \min \left\{ \frac{2}{1}, \boxed{\frac{5}{3}}, \frac{6}{1} \right\} = \min \left\{ 2, \frac{5}{3}, 6 \right\}\end{aligned}$$

Cualquiera de las variables x_1 , x_2 ó x_3 podría entrar en la base para producir una mejora en la función objetivo. Si utilizamos el criterio de tomar como variable de entrada aquella cuyo coeficiente de coste relativo sea el más negativo, habría dos variables cumpliendo estos requisitos, por tanto elegimos una de esas dos variables al azar, en nuestro caso la variable x_3 y utilizando como pivote $\boxed{3}$ obtenemos la siguiente tabla

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^h	x_6^h	b
x_4^h	$\boxed{5/3}$	1/3	0	1	-1/3	0	1/3
x_3	1/3	2/3	1	0	1/3	0	5/3
x_6^h	5/3	4/3	0	0	-1/3	1	13/3
	-2	1	0	0	1	0	5

Al cambiar la variable x_5^h por x_3 vemos como el vector unitario correspondiente que estaba en la columna 5, pasa a estar en la columna 3. La nueva solución básica es

$$\mathbf{x}^1 = (0, 0, 5/3, 1/3, 0, 13/3)$$

con función objetivo

$$z^1 = -5 < z^0$$

y comprobamos que es factible y que el valor objetivo (recordemos el cambio de signo) ha disminuido.

Vemos ahora que el único coeficiente de coste relativo asociado a una variable no básica que es negativo nos lo proporciona la columna 1, es decir, introducir la variable x_1 en la solución básica nos proporcionará un valor más pequeño para la función objetivo. Si aplicamos a continuación el criterio de salida para encontrar el elemento pivote

$$\frac{1}{5} = \min \left\{ \boxed{\frac{(1/3)}{(5/3)}}, \frac{(5/3)}{(1/3)}, \frac{(13/3)}{(5/3)} \right\} = \min \left\{ \frac{1}{5}, 5, \frac{13}{5} \right\}$$

obtenemos que la variable x_4^h es la que debe salir de la base. Actualizamos la tabla para obtener

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^h	x_6^h	b
x_1	1	1/5	0	3/5	-1/5	0	1/5
x_3	0	3/5	1	-1/5	2/5	0	8/5
x_6^h	0	1	0	-1	0	1	4
	0	7/5	0	6/5	3/5	0	27/5

La nueva solución factible básica está formada por las variables x_1 , x_3 y x_6^h

$$\mathbf{x}^2 = (1/5, 0, 8/5, 0, 4)$$

con valor objetivo

$$z^2 = -27/5 < -5 = z^1$$

Los coeficientes de coste relativo de las variables no básicas se obtienen como antes de la última fila

$$r_2 = \frac{7}{5}$$

$$r_4^h = \frac{6}{5}$$

$$r_5^h = \frac{4}{5}$$

Como son todos no negativos, se deduce que la solución factible básica correspondiente a esta tabla es óptima. Además como ninguno de ellos es cero la solución es única.

La solución óptima para el problema de maximización sería la misma pero con valor óptimo 27/5.

3.4.5 Degeneración

Es posible que durante el desarrollo del procedimiento simplex se presenten soluciones factibles básicas degeneradas, es decir, variables básicas con valor 0. A menudo éstas se pueden tratar como una solución factible básica no degenerada cualquiera, sin embargo, es posible que después de seleccionar una columna q para incorporar a la base, el mínimo de las razones x_j^0/y_{jq} sea 0, lo que implica que la variable básica con valor 0 es la que debe salir. Esto significa que la nueva variable x_q entraría con valor 0, el objetivo no disminuiría y la nueva solución factible básica también sería degenerada. Este proceso podría continuar durante una serie de pasos hasta obtener de nuevo la solución básica degenerada original y entrar por tanto en un ciclo que podría repetirse indefinidamente.

Se ilustrará este problema con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.23 Resuelve el problema de programación lineal

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & -\frac{3}{4}x_4 + 20x_5 - \frac{1}{2}x_6 + 6x_7 \\ \text{Sujeto a} & \\ & x_1 \quad \quad \quad \frac{1}{4}x_4 - 8x_5 - x_6 + 9x_7 = 0 \\ & \quad x_2 \quad \quad \quad \frac{1}{2}x_4 - 12x_5 - \frac{1}{2}x_6 + 3x_7 = 0 \\ & \quad \quad x_3 \quad \quad \quad \quad \quad \quad + x_6 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{array}$$

Solución: Utilizamos para ello el método simplex partiendo de la tabla inicial. En cada tabla el elemento pivote es el que está dentro del recuadro.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_1	1	0	0	$\frac{1}{4}$	-8	-1	9	0
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	-12	$-\frac{1}{2}$	3	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
r	0	0	0	$-\frac{3}{4}$	20	$-\frac{1}{2}$	6	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_4	4	0	0	1	-32	-4	36	0
x_2	-2	1	0	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-15	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
r	3	0	0	0	-4	$-\frac{7}{2}$	33	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_4	-12	8	0	1	0	$\frac{3}{8}$	-84	0
x_5	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	1	$\frac{3}{8}$	$-\frac{15}{4}$	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
r	1	1	0	0	0	-2	18	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_6	$-\frac{3}{2}$	1	0	1	0	1	$-\frac{21}{2}$	0
x_5	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{8}$	0	$-\frac{3}{64}$	1	0	$\frac{3}{16}$	0
x_3	$\frac{3}{2}$	-1	1	$-\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{21}{2}$	1
r	-2	3	0	$\frac{1}{4}$	0	0	-3	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_6	2	-6	0	$-\frac{5}{2}$	56	1	0	0
x_7	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{16}{3}$	0	1	0
x_3	-2	6	1	$\frac{5}{2}$	-56	0	0	1
r	-1	1	0	$-\frac{1}{2}$	16	0	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_1	1	-3	0	$-\frac{5}{4}$	28	$\frac{1}{2}$	0	0
x_7	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{6}$	-4	$-\frac{1}{6}$	1	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
r	0	-2	0	$\frac{7}{4}$	44	$\frac{1}{2}$	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_1	1	0	0	$\frac{1}{4}$	-8	-1	9	0
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	-12	$-\frac{1}{2}$	3	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
r	0	0	0	$-\frac{3}{4}$	20	$-\frac{1}{2}$	6	0

y comprobamos que llegamos a la tabla inicial del problema.

Hay diversos procedimientos para evitar este ciclado, uno de ellos es la *regla de Bland* que presentamos en forma de teorema (aunque realmente no es tal, sino una regla de cálculo).

Teorema 3.24 (Regla de Bland)

- La variable de entrada es x_p donde p está definido como el índice siguiente

$$p = \min\{k \mid r_k < 0\}$$

- En caso de igualdad respecto a la columna que dejará la base se elige aquella x_q que cumple

$$q = \min\{j \mid \frac{x_j^0}{y_{jp}} = cte\}$$

Ejercicio 3.4.1 Utiliza la regla de Bland para resolver el ejemplo 3.23.

Solución: El desarrollo del método utilizando la regla de Bland coincide hasta llegar a la cuarta tabla que reproducimos a continuación

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_6	$-\frac{3}{2}$	1	0	1	0	1	$-\frac{21}{2}$	0
x_5	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{8}$	0	$-\frac{3}{64}$	1	0	$\frac{3}{16}$	0
x_3	$\frac{3}{2}$	-1	1	$-\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{21}{2}$	1
r	-2	3	0	$\frac{1}{4}$	0	0	-3	0

Ahora según la regla de Bland tendrá que entrar en la base la variable x_1 en lugar de la variable con el coeficiente de coste relativo más negativo x_7 , que sería la que entraría según la regla usual, ya que aquella tiene un subíndice menor que ésta. Pivotando sobre el elemento adecuado en esa columna obtenemos la siguiente tabla:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_6	0	-2	0	-1	24	1	-6	0
x_1	1	-2	0	$-\frac{3}{4}$	16	0	3	0
x_3	0	2	1	1	-24	0	6	1
r	0	-1	0	$-\frac{5}{4}$	32	0	9	0

Si continuamos con la aplicación del método Simplex pero modificado mediante la regla de Bland, la variable x_2 entrará en la base en lugar de x_4 , que es la que tiene el coeficiente de coste más negativo

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_6	0	0	1	0	0	1	0	1
x_1	1	0	1	$\frac{1}{4}$	-8	0	9	1
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-12	0	3	$\frac{1}{2}$
r	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	20	0	12	$\frac{1}{2}$

La variable que entra es x_4 que sustituye a x_2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_6	0	0	1	0	0	1	0	1
x_1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	0	-2	0	$\frac{15}{2}$	$\frac{3}{4}$
x_4	0	2	1	1	-24	0	6	1
r	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{4}$	0	2	0	$\frac{33}{2}$	$\frac{5}{4}$

Esta tabla es la óptima con solución

$$\mathbf{x}^* = \left(\frac{3}{4}, 0, 0, 1, 0, 1 \right)$$

3.5 Variables Artificiales

Al analizar el mecanismo del método Simplex se ha supuesto en primer lugar que contábamos con una solución factible básica de partida. A veces esta solución está disponible de forma inmediata, por ejemplo en problemas con restricciones de la forma \leq

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

con $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$. Al utilizar variables de holgura en cada restricción se obtiene una primera solución factible básica formada precisamente por estas variables. Pero en general, no siempre resulta tan evidente la presencia de esta primera solución fundamental. Es necesario contar con métodos para determinar esa primera solución factible básica. Veremos en esta sección cómo conseguir este objetivo mediante la utilización de variables auxiliares.

Supondremos que el problema lineal ya se encuentra en la forma estándar,

$$\left. \begin{array}{l} \text{Minimizar } z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{Sujeto a} \\ \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad (P1)$$

con $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$. A partir de esta formulación se pueden utilizar dos métodos para encontrar la primera solución factible básica, necesaria para iniciar el método Simplex: el *método de las dos fases* y el *método de la M grande* o *de penalizaciones*.

3.5.1 Método de las 2 fases

A partir del problema lineal ($P1$) se construye el siguiente problema

$$\left. \begin{array}{l} \text{Minimizar} \quad z = \sum_{i=1}^m x_i^a \\ \text{Sujeto a} \quad \mathbf{Ax} + \mathbf{x}^a = \mathbf{b} \\ \quad \mathbf{x}, \mathbf{x}^a \geq \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad (P2)$$

donde $\mathbf{x}^a = (x_1^a, \dots, x_m^a)$ es un vector de *variables artificiales*.

La ventaja del problema ($P2$) es la obtención de una solución factible básica inicial de forma directa: $(\mathbf{x}, \mathbf{x}^a) = (\mathbf{0}, \mathbf{b})$; por tanto el problema ($P2$) no es infactible. Más aún, ($P2$) siempre tiene solución puesto que su función objetivo es una suma de variables positivas y por tanto está acotada por 0.

Está claro que si hay una solución factible del problema $P1$, entonces el problema $P2$ tendría que tener un valor óptimo de cero con $\mathbf{x}^a = \mathbf{0}$, ya que en caso contrario sería necesaria una variable artificial para resolver el sistema dado en ($P1$). Si $P1$ no tiene soluciones factibles entonces el problema $P2$ tendrá un valor óptimo mayor que 0.

El valor óptimo de $P2$ será 0 bien porque no haya variables artificiales en la solución óptima o bien porque haya variables artificiales en la base pero con valor 0. Si no hay variables artificiales en la base, entonces tendremos una solución factible básica del problema $P1$ eliminando de la solución y la tabla óptimas de $P2$ toda la información relacionada con las variables artificiales.

Si el valor óptimo de $P2$ es 0, pero hay variables artificiales en la base, estas deben tener valor cero y la solución óptima de $P2$ es degenerada. Las variables artificiales que son básicas pueden intercambiarse por variables no básicas del problema $P1$.

Si la solución del problema $P2$ tiene soluciones artificiales en la base con valor positivo, es decir, el valor óptimo de $P2$ es distinto de cero, entonces el problema inicial $P1$ es infactible.

El método consta de dos fases:

1. **FASE I.** Plantear el problema $P2$ introduciendo variables artificiales. Hallar una solución factible básica de $P1$ o determinar que no hay.
2. **FASE II.** Utilizando la solución factible básica originada en la **FASE I**, resolver el problema original.

El algoritmo completo del método se describe a continuación

Algoritmo del método de las 2 fases

FASE I

- **Paso 1.** A partir del problema en forma estándar se construye el problema artificial $P2$, los coeficientes de coste de las variables no artificiales son 0.
- **Paso 2.** Aplicar el método simplex al problema artificial $P2$. El proceso termina cuando se llega a la solución óptima o el valor de la función objetivo artificial es 0. Si no hay variables artificiales en la base con valor > 0 ir al **Paso 3**. Si hay alguna variable artificial en la base con valor > 0 el problema $P1$ es infactible.

FASE II

- **Paso 3.** Se considera la función objetivo del problema inicial, poniendo coeficiente 0 a las variables artificiales que aparezcan en la base al final de la **FASE I**, y prescindiendo de aquellas que no sean básicas, así como de sus columnas asociadas.
- **Paso 4.** Las columnas de la **FASE II** son las de la **FASE I**, salvo las columnas de las variables artificiales que no figuran en la función objetivo del **Paso 3**. Se calculan los valores de r_k para las variables no básicas haciendo 0 en los coeficientes de coste relativo asociados a las variables básicas.

- **Paso 5.** Si la función objetivo del **Paso 3** no tiene variables artificiales aplicar el método simplex, en otro caso ir al **Paso 6**
- **Paso 6.** Aplicar simplex con la siguiente modificación en la variable de salida: Si x_k es la columna pivote, se consideran los valores y_{jk} de las filas asociadas a las variables artificiales que sean básicas, si alguno es negativo, se toma como variable de salida alguna de esas variables artificiales con $y_{jk} < 0$. En otro caso utilizar la regla de la variable de salida del método simplex.

Vemos a continuación un ejemplo de aplicación de este método:

Ejemplo 3.25 *Resuelve el problema*

$$\begin{array}{llll} \text{Minimizar} & 4x_1 & +x_2 & +x_3 \\ \text{Sujeto a} & & & \\ & 2x_1 & +x_2 & +2x_3 = 4 \\ & 3x_1 & +3x_2 & +x_3 = 3 \\ & & & x_1, x_2, x_3 \geq 0, \end{array}$$

Solución:

1. **FASE I:** Planteamos el problema artificial introduciendo x_4^a y x_5^a como variables artificiales y utilizando como función objetivo $x_4^a + x_5^a$

$$\begin{array}{llllll} \text{Minimizar} & & x_4^a & & +x_5^a & \\ \text{Sujeto a} & & & & & \\ & 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & +x_4^a & = 4 \\ & 3x_1 & +3x_2 & +x_3 & & +x_5^a = 3 \\ & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4^a, x_5^a \geq 0, \end{array}$$

cuya tabla inicial es

	x_1	x_2	x_3	x_4^a	x_5^a	b
x_4^a	2	1	2	1	0	4
x_5^a	3	3	1	0	1	3
	0	0	0	1	1	0

con solución factible básica inicial

$$\mathbf{x} = (0, 0, 0, 4, 3)$$

Para comenzar el método simplex debemos actualizar la última fila de manera que las variables básicas tengan componentes 0. Restando la primera y segunda filas a esta fila obtenemos

	x_1	x_2	x_3	x_4^a	x_5^a	b
x_4^a	2	1	2	1	0	4
x_5^a	3	3	1	0	1	3
	-5	-4	-3	0	0	-7

y ya estamos en condiciones de comenzar con el método Simplex.

La tabla que se obtiene después de dos pasos del método es la siguiente

	x_1	x_2	x_3	x_4^a	x_5^a	b
x_3	0	-3/4	1	3/4	-1/2	3/2
x_1	1	5/4	0	-1/4	1/2	1/2
	0	0	0	1	1	0

Esta tabla es óptima y la solución óptima⁵ que se obtiene de ella es

$$\mathbf{x}_a^* = (1/2, 0, 3/2, 0, 0)$$

⁵Notar que como $r_2 = 0$, siendo x_2 una variable no básica, habrá soluciones alternativas.

Esta solución óptima no contiene variables artificiales y por tanto eliminando esas variables obtenemos una solución factible básica del problema original

$$\mathbf{x} = (1/2, 0, 3/2)$$

Con este último paso se acaba la **FASE I**.

2. **FASE II:** Esta fase comienza con la tabla siguiente

	x_1	x_2	x_3	b
x_3	0	$-3/4$	1	$3/2$
x_1	1	$5/4$	0	$1/2$
	4	1	1	0

Donde se han eliminado todas las variables artificiales, ya que ninguna estaba en la base de la última tabla de la fase I. Además se han introducido los coeficientes correspondientes a la función objetivo del problema original en la última fila.

Aplicamos ahora el método simplex a esta tabla, haciendo en primer lugar 0 las componentes de la última fila asociadas a variables básicas. La tabla obtenida con estos cambios es

	x_1	x_2	x_3	b
x_3	0	$-3/4$	1	$3/2$
x_1	1	$5/4$	0	$1/2$
	0	$-13/4$	0	$-7/2$

Según el criterio de entrada podemos incorporar la variable x_2 a la base. El elemento pivote está encuadrado y actualizando la tabla obtenemos

	x_1	x_2	x_3	b
x_3	$3/5$	0	1	$9/5$
x_2	$4/5$	1	0	$2/5$
	$13/5$	0	0	$-11/5$

que es la tabla óptima. La solución óptima es

$$\mathbf{x}^* = (0, 2/5, 9/5)$$

y además es única.

Aunque en el algoritmo del método de las dos fases se introduce una variable artificial por cada restricción del problema, en la práctica solamente hay que incluir aquellas variables artificiales que sean necesarias para completar la base inicial. Por ejemplo, si tuviéramos que resolver mediante el método de las dos fases el problema

$$\begin{array}{llll} \text{Minimizar} & 4x_1 & +x_2 & +x_3 \\ \text{Sujeto a} & & & \\ & 2x_1 & +x_2 & +2x_3 \leq 4 \\ & 3x_1 & +3x_2 & +x_3 = 3 \\ & & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Una vez puesto en forma estándar

$$\begin{array}{llllll} \text{Minimizar} & 4x_1 & +x_2 & +x_3 & & \\ \text{Sujeto a} & & & & & \\ & 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & +x_4^h & = 4 \\ & 3x_1 & +3x_2 & +x_3 & & = 3 \\ & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4^h \geq 0 \end{array}$$

se observa que solamente es necesario incluir una variable artificial, ya que el vector columna asociado a la variable de holgura x_4^h puede formar parte de la base inicial. El problema $P2$ de la fase I sería

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & x_5^a \\ \text{Sujeto a} & \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4^h = 4 \\ & 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5^a = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4^h, x_5^a \geq 0 \end{array}$$

cuya tabla inicial sería

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^a	b
x_4^h	2	1	2	1	0	4
x_5^a	3	3	1	0	1	3
	0	0	0	0	1	0

que hay que actualizar para poder emplear el método simplex haciendo 0 en el coeficiente de coste relativo de la variable básica x_5^a . Después de restar la segunda fila a la última obtenemos

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^a	b
x_4^h	2	1	2	1	0	4
x_5^a	3	3	1	0	1	3
	-3	-3	-1	0	0	-3

Se observa en la tabla anterior que cualquiera de las variables x_1 , x_2 o x_3 podría entrar en la base y podríamos elegir cualquiera de ellas como variable de entrada. Sin embargo, sería conveniente elegir la variable que entra de tal forma que la variable que sale sea alguna variable artificial, en nuestro caso y observando los pivotes para cada elección de la variable de entrada podemos optar entre x_1 y x_2 , ya que cualquiera de ellas sustituiría a la variable artificial x_5^a en la base. Si por ejemplo, elegimos x_2 y pivotamos sobre el elemento correspondiente obtendremos la siguiente tabla

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^a	b
x_4^h	1	0	5/3	1	-1/3	3
x_2	1	1	1/3	0	1/3	1
	0	0	0	0	1	0

que es óptima y por tanto hemos resuelto el problema artificial, que como no tiene variables artificiales en la base nos proporciona una solución factible básica para el problema inicial.

La tabla del principio de la fase II sería

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	b
x_4^h	1	0	5/3	1	3
x_2	1	1	1/3	0	1
	4	1	1	0	0

donde la última fila se ha sustituido por la función objetivo del problema original y se ha eliminado la variable artificial puesto que no formaba parte de la base.

Si ahora hacemos 0 las componentes de la última fila asociadas a las soluciones básicas obtenemos

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	b
x_4^h	1	0	5/3	1	3
x_2	1	1	1/3	0	1
	3	0	2/3	0	-1

que es una tabla óptima. La solución óptima es

$$\mathbf{x}^* = (0, 1, 0, 3)$$

con valor óptimo

$$z^* = 1$$

3.5.2 Método de la M grande o de las penalizaciones

Se pueden combinar las dos fases del método anterior en un sólo procedimiento utilizando el llamado método de la M grande. A partir del problema en forma estándar $P1$, se construye el problema

$$\left. \begin{array}{l} \text{Minimizar} \quad z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + M \sum_{i=1}^m x_i^a \\ \text{Sujeto a} \quad \mathbf{Ax} + \mathbf{x}^a = \mathbf{b} \\ \mathbf{x}, \mathbf{x}^a \geq \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad (P3)$$

donde de nuevo $\mathbf{x} = (x_1^a, \dots, x_m^a)$ es el vector de variables artificiales y $M \in \mathbb{R}$ con $M \gg 0$. El término $M \sum x_k^a$ se utiliza como penalización para las $x_j^a \neq 0$.

A diferencia de lo que ocurría con el problema artificial del método de las dos fases (problema $P2$), el problema $P3$ no tiene porqué tener solución, ya que aunque el término de penalización está acotado inferiormente por 0, el término relacionado con la función objetivo no tiene porqué estarlo. Sin embargo, como pasaba en el método de las dos fases, el problema $P3$ no es infactible ya que podemos utilizar $(0, \dots, 0, b_1, \dots, b_m)$ como primera solución factible básica y podemos por tanto emplear el método simplex para resolverlo.

Del comportamiento de $P3$ se distinguen los siguientes casos:

1. Si $(P3)$ tiene solución óptima con $\mathbf{x}^a = 0 \implies$ Las variables \mathbf{x} correspondientes son una solución factible básica óptima del problema original.
2. Si $\forall M > 0$ se halla una solución óptima con $\mathbf{x}^a \neq 0 \implies$ El problema $P1$ es infactible.
3. Si $\forall M > 0$ el problema $(P3)$ es no acotado \implies El problema $P1$ es no acotado o no factible.

Ejemplo 3.26 Resuelve el siguiente problema utilizando el método de la M grande

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & z = x_1 + 2x_2 \\ \text{Sujeto a} & 4x_1 + x_2 \leq 12 \\ & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Solución: En primer lugar ponemos el problema en forma estándar con objetivo de minimización

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & z' = -x_1 - 2x_2 \\ \text{Sujeto a} & 4x_1 + x_2 + x_3^h = 12 \\ & x_1 + x_2 - x_4^e = 2 \\ & x_1, x_2, x_3^h, x_4^e \geq 0 \end{array}$$

Construimos el problema extendido utilizando el método de las penalizaciones (M -grande).

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & z' = -x_1 - 2x_2 + Mx_5^a \\ \text{Sujeto a} & 4x_1 + x_2 + x_3^h = 12 \\ & x_1 + x_2 - x_4^e + x_5^a = 2 \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Tal y como se comentó en el método anterior de las dos fases y puesto que en la primera ecuación hemos introducido una variable de holgura, solamente es necesario introducir la variable artificial x_5^a para completar la base.

La tabla inicial es la siguiente:

	x_1	x_2	x_3^h	x_4^e	x_5^a	\mathbf{b}
x_3^h	4	1	1	0	0	12
x_5^a	1	1	0	-1	1	2
	-1	-2	0	0	M	0

Tenemos como primera solución factible básica a $\mathbf{x}^0 = (0, 0, 12, 0, 2)$ y variables básicas x_3^h y x_5^a . Si actualizamos la tabla para que las variables básicas tengan coeficiente de coste relativo 0. Para ello se resta de la última ecuación M veces la segunda

	x_1	x_2	x_3^h	x_4^e	x_5^a	b
x_3^h	4	1	1	0	0	12
x_5^a	1	1	0	-1	1	2
	$(-1 - M)$	$(-2 - M)$	0	M	0	$-2M$

Como $M \gg 0 \Rightarrow$ es posible mejorar puesto que $(-1 - M) < 0$ y $(-2 - M) < 0$. Elegimos $(-2 - M)$ por ser el más negativo y por tanto el vector que entra en la base será x_2 . El elemento sobre el que pivotamos se encuentra encuadrado y la tabla siguiente será

	x_1	x_2	x_3^h	x_4^e	x_5^a	b
x_3^h	3	0	1	1	-1	10
x_2	1	1	0	-1	1	2
	1	0	0	-2	$(2 + M)$	4

El único coeficiente de coste negativo es r_4 y por tanto es posible mejorar el valor de la función objetivo si introducimos esta variable en la base. El pivote es el elemento encuadrado, obtenido según la regla del simplex. Al pivotar sobre ese elemento obtenemos

	x_1	x_2	x_3^h	x_4^e	x_5^a	b
x_4^e	3	0	1	1	-1	10
x_2	4	1	1	0	0	12
	7	0	2	0	M	24

Como todos los coeficientes de coste son positivos, esta es la tabla óptima, con solución factible básica óptima $\mathbf{x}^* = (0, 12, 0, 10, 0)$ y valor para la función objetivo $z^* = -24$. Como $x_3 = 0$ no hay holgura y como la variable artificial es $x_5^a = 0$, tenemos una solución factible básica óptima del problema original con $\mathbf{x}^* = (0, 12, 0, 10)$.

Se puede observar en la penúltima tabla que la variable artificial no está en la base y por tanto podríamos haberla eliminado de la tabla antes de realizar el último paso.

3.6 Dualidad

En la mayoría de las ocasiones y al intentar resolver un problema de optimización de la forma general

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(\mathbf{x}) \\ &\text{s.a.} && \\ &&& h_i(\mathbf{x}) \quad i = 1, \dots, m \\ &&& g_j(\mathbf{x}) \quad j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

se hace uso de los multiplicadores $\{\lambda_i, \mu_j\}_{i,j}$ uno por cada restricción, ya sea de igualdad o de desigualdad. Estos multiplicadores aparecían como valores necesarios para encontrar el óptimo en \mathbf{x} del problema. Podemos sin embargo contemplar el problema desde otro punto de vista; podemos contemplar la utilización de \mathbf{x} como los valores, mientras que los multiplicadores serán las variables de cierto problema de optimización. Este punto de vista da lugar al llamado *problema dual*, que para el problema descrito anteriormente y que se denomina *primal*, tiene la forma

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} && \theta(\lambda, \mu) \\ &\text{s.a.} && \mu \geq 0 \end{aligned} \tag{3.26}$$

siendo

$$\theta(\lambda, \mu) = \inf_{\mathbf{x}} \left\{ f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^p \mu_j g_j(\mathbf{x}) \right\}$$

Cuando el problema primal es un problema lineal, entonces su problema dual es también un problema lineal y existen muchas relaciones importantes entre ellos. En esta sección se definirá el problema dual de cualquier problema lineal y se estudiarán las relaciones que existen entre ellos.

3.6.1 Problemas lineales duales

Definiremos en primer lugar el problema dual de un problema lineal con una determinada estructura y a partir de esta definición veremos cómo se puede construir el dual de cualquier problema lineal.

Consideremos el siguiente problema lineal

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{Sujeto a} & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad (P1) \quad (3.27)$$

donde $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ y $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_{m \times n}$, entonces definiremos⁶ su *problema dual* como el problema lineal siguiente

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Maximizar} & \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{b} \\ \text{Sujeto a} & \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{c} \\ & \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad (D1) \quad (3.28)$$

donde ahora $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ serán las variables de decisión del problema dual. Comprobamos que la matriz de coeficientes del problema dual es la traspuesta de la matriz de coeficientes del problema primal.

Cada variable del problema primal $P1$ está relacionada con una restricción del dual $D1$ y viceversa, cada restricción del primal está relacionada con una variable del dual.

El par de problemas $(P1, D1)$ se denomina *forma simétrica* de la dualidad y se puede utilizar para definir el dual de cualquier otro problema lineal. Por ejemplo, vamos a construir el problema dual de un problema lineal puesto en la forma estándar

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{Sujeto a} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad (P2) \quad (3.29)$$

Este problema puede expresarse, mediante transformaciones adecuadas, en un problema donde todas las restricciones son del tipo \geq

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{Sujeto a} & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ & -\mathbf{Ax} \geq -\mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad \Longleftrightarrow \quad \left. \begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{Sujeto a} & \mathbf{A}_D \mathbf{x} \geq \mathbf{b}_D \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \right\}$$

donde $\mathbf{A}_D = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2m \times n}$ y $\mathbf{b}_D = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{b} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2m}$. Podemos utilizar ahora la definición del dual para un problema del tipo $P1$ anterior. Si definimos el vector (\mathbf{u}, \mathbf{v}) como el vector de variables del problema dual con $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$, entonces éste se puede expresar como

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Maximizar} & (\mathbf{u}, \mathbf{v})^T \mathbf{b}_D \\ \text{Sujeto a} & \mathbf{A}_D^T (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq \mathbf{c} \\ & \mathbf{u}, \mathbf{v} \geq \mathbf{0} \end{array} \right\}$$

y teniendo en cuenta las definiciones de \mathbf{A}_D y \mathbf{b}_D

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Maximizar} & \mathbf{u}^T \mathbf{b} - \mathbf{v}^T \mathbf{b} \\ \text{Sujeto a} & \mathbf{A}^T \mathbf{u} - \mathbf{A}^T \mathbf{v} \leq \mathbf{c} \\ & \mathbf{u}, \mathbf{v} \geq \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad \Longleftrightarrow \quad \left. \begin{array}{ll} \text{Maximizar} & (\mathbf{u} - \mathbf{v})^T \mathbf{b} \\ \text{Sujeto a} & \mathbf{A}^T (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \leq \mathbf{c} \\ & \mathbf{u}, \mathbf{v} \geq \mathbf{0} \end{array} \right\}$$

⁶Esta definición se basa en la formulación general dada en la ecuación 3.26, pero aplicada al problema lineal indicado.

Si ahora llamamos $\lambda = \mathbf{u} - \mathbf{v}$, como es la diferencia de dos números positivos podría tomar cualquier valor positivo o negativo y el problema puede plantearse como

$$\left. \begin{array}{l} \text{Maximizar} \quad \lambda^T \mathbf{b} \\ \text{Sujeto a} \quad \mathbf{A}^T \lambda \leq \mathbf{c} \\ \quad \lambda \text{ libre} \end{array} \right\} \quad (D2) \quad (3.30)$$

y se obtiene así el problema dual de un problema lineal en forma estándar. El par de problemas $(P2, D2)$ recibe el nombre de *forma asimétrica* de la dualidad.

Intentaremos a continuación explicar el significado del problema dual utilizando el problema de la dieta descrito al principio del tema.

Ejemplo 3.27 (Dual del problema de la dieta) *Este problema se le presenta al responsable de una dieta que intenta seleccionar una combinación de comidas para cubrir ciertas necesidades de nutrientes básicos a un coste mínimo. Recordemos que este problema tiene la forma*

$$\left. \begin{array}{l} \text{Minimizar} \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{Sujeto a} \quad \mathbf{A} \mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \right\}$$

que como puede observarse es el problema primal de la forma simétrica de dualidad.

Pensemos en una compañía farmacéutica que produce en forma de píldora, todos los nutrientes básicos necesarios e intenta vender estas píldoras al encargado para suministrar directamente los elementos nutritivos, en lugar de comprar los distintos alimentos. El problema del farmacéutico consistirá en determinar los precios (beneficios) λ_j , para cada nutriente b_j (píldora), de forma que maximice las ganancias, pero sin perder competitividad con los alimentos reales. Cada alimento “artificial” i , está formado por las mismas cantidades de los m nutrientes que tiene el alimento real, es decir, el alimento artificial i contiene los m nutrientes en cantidades (a_{1i}, \dots, a_{mi}) y por tanto el coste de este alimento artificial es

$$\lambda_1 a_{1i} + \dots + \lambda_m a_{mi}$$

Para asegurar la competitividad este precio tiene que ser menor o igual que lo que cuesta el alimento i y que es c_i . El planteamiento del problema es entonces el siguiente

$$\left. \begin{array}{l} \text{Maximizar} \quad \lambda^T \mathbf{b} \\ \text{Sujeto a} \quad \lambda^T \mathbf{A} \leq \mathbf{c} \\ \quad \lambda \geq \mathbf{0} \end{array} \right\}$$

que es precisamente el dual del problema inicial tal y como se ha definido en 3.28.

Como se puede comprobar a partir de las dos formas de dualidad definidas, el número de restricciones del problema primal determina el número de variables del problema dual, mientras que el número de variables del problema primal proporciona el número de restricciones del problema dual. Ambos problemas se pueden relacionar según la siguiente tabla:

	<u>Minimización</u>		<u>Maximización</u>	
<u>Variables</u>	$\left\{ \begin{array}{l} \geq 0 \\ \leq 0 \\ \text{No restringida} \end{array} \right.$	\iff	$\left\{ \begin{array}{l} \leq \\ \geq \\ = \end{array} \right.$	<u>Restricciones</u>
<u>Restricciones</u>	$\left\{ \begin{array}{l} \geq \\ \leq \\ = \end{array} \right.$	\iff	$\left\{ \begin{array}{l} \geq 0 \\ \leq 0 \\ \text{No restringidas} \end{array} \right.$	<u>Variables</u>

Ejemplo 3.28 *Calcula el dual del problema lineal siguiente*

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & 8x_1 + 3x_2 \\ \text{Sujeto a} & \\ & x_1 - 6x_2 \geq 2 \\ & 5x_1 + 7x_2 = -4 \\ & x_1 \leq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{array}$$

Solución: Utilizando la tabla anterior su dual se construye facilmente

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & 2\lambda_1 - 4\lambda_2 \\ \text{Sujeto a} & \\ & \lambda_1 + 5\lambda_2 \leq 8 \\ & -6\lambda_1 + 7\lambda_2 \geq 3 \\ & \lambda_1 \leq 0 \\ & \lambda_2 \text{ no restringida} \end{array}$$

3.6.2 Teoremas de dualidad

En primer lugar hay que notar que como el dual de un problema lineal es de nuevo un problema lineal, cabe pensar en la posibilidad de construir su dual (el dual del dual), que sería de nuevo un problema lineal y así sucesivamente, sin embargo tenemos el siguiente lema:

Lema 3.29 *El problema dual del dual de un problema lineal es el problema primal.*

Luego la dualidad en optimización lineal se reduce al estudio de una pareja de problemas lineales. A continuación estudiaremos las relaciones que existen entre este par de problemas. Utilizaremos la forma asimétrica de la dualidad (problemas $P2 - D2$).

Lema 3.30 (Lema de dualidad debil) *Si $\bar{\mathbf{x}}$ y $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ son soluciones factibles de $P2$ y $D2$ respectivamente, entonces*

$$\mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}} \geq \bar{\boldsymbol{\lambda}}^T \mathbf{b}$$

Es decir, el valor de la función objetivo en una solución factible para el problema de minimización es siempre mayor o igual que el valor de la función objetivo en una solución factible para el problema de maximización.

Demostración:

$$\bar{\mathbf{x}} \text{ factible de } P2 \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b} & (1) \\ \bar{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0} & (2) \end{cases}$$

$$\bar{\boldsymbol{\lambda}} \text{ factible de } D2 \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{A}^T \bar{\boldsymbol{\lambda}} \leq \mathbf{c} & (3) \end{cases}$$

Entonces si $z_{P2}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ y $z_{D2}(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{b}$

$$z_{D2}(\bar{\boldsymbol{\lambda}}) = \bar{\boldsymbol{\lambda}}^T \mathbf{b} \Rightarrow (1) \Rightarrow \bar{\boldsymbol{\lambda}}^T \mathbf{b} = \bar{\boldsymbol{\lambda}}^T \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \bar{\boldsymbol{\lambda}})^T \bar{\mathbf{x}} \Rightarrow (2) \text{ y } (3) \Rightarrow z_{P2}(\bar{\boldsymbol{\lambda}}) = \bar{\boldsymbol{\lambda}}^T \mathbf{b} \leq \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}} = z_{D2}(\bar{\mathbf{x}})$$

Corolario 3.31 *Si \mathbf{x}^* y $\boldsymbol{\lambda}^*$ son factibles para $P2$ y $D2$ respectivamente, entonces*

$$\text{Si } \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = (\boldsymbol{\lambda}^*)^T \mathbf{b} \implies \mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^* \text{ son óptimos para sus respectivos problemas}$$

Demostración: Supongamos que \mathbf{x}^* no es óptimo, es decir, supongamos que existe una solución factible $\bar{\mathbf{x}}$ tal que:

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* < \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}}$$

Si utilizamos el lema anterior para $\bar{\mathbf{x}}$ y $\boldsymbol{\lambda}^*$

$$\mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}} \geq (\boldsymbol{\lambda}^*)^T \mathbf{b}$$

y utilizando ahora las hipótesis del enunciado

$$\mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}} \geq (\boldsymbol{\lambda}^*)^T \mathbf{b} = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*$$

que nos conduce a una contradicción.

Análogamente se demuestra que $\boldsymbol{\lambda}^*$ es un óptimo para $D2$ teniendo en cuenta que ahora el objetivo es de maximización.

Teorema 3.32 (Dualidad en programación lineal) *Para el caso de la forma asimétrica de dualidad se tienen los siguientes resultados:*

1. Si uno de los problemas $P2$ o $D2$ tiene solución óptima finita, también la tiene el otro y los valores óptimos correspondientes de cada problema coinciden.
2. Si uno de los problemas $P2$ o $D2$ es no acotado, entonces el otro problema es no factible.
3. Si uno de los problemas $P2$ o $D2$ es no factible, entonces el otro es no acotado o no factible.

A continuación y utilizando forma matricial del método Simplex se presentan algunos resultados que permiten obtener la solución óptima de un problema lineal si conocemos la solución óptima de su dual o viceversa.

Proposición 3.33 *Dado un problema lineal en forma estándar con solución factible básica óptima \mathbf{x}_B^* . Si \mathbf{B} es la matriz óptima asociada a \mathbf{x}_B^* , y \mathbf{c}_B los coeficientes de la función objetivo asociados a las variables básicas. Entonces si definimos $\boldsymbol{\lambda}^*$ como*

$$(\boldsymbol{\lambda}^*)^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$$

$\Rightarrow (\boldsymbol{\lambda}^*)^T$ es la solución óptima del problema dual.

Demostración: Partimos de un problema de programación lineal estándar en forma matricial

$$\left. \begin{array}{l} \text{Minimizar} \quad \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_D^T \mathbf{x}_D \\ \text{Sujeto a} \quad \begin{array}{l} [\mathbf{B}, \mathbf{D}] \mathbf{x} = \mathbf{B} \mathbf{x}_B + \mathbf{D} \mathbf{x}_D = \mathbf{b} \\ \mathbf{x}_B, \mathbf{x}_D \geq \mathbf{0} \end{array} \end{array} \right\}$$

Si \mathbf{x}_B^* es una solución básica óptima para el problema y \mathbf{B} es su matriz básica asociada, entonces

$$\mathbf{x}_B^* = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \quad (1)$$

$$\mathbf{r}_D^T \geq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{c}_D^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D} \geq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{c}_D^T \geq \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D} \quad (2) \quad (3.31)$$

Veamos que $(\boldsymbol{\lambda}^*)^T$ definido como

$$(\boldsymbol{\lambda}^*)^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \quad (3.32)$$

resuelve el problema dual de forma óptima.

Primero comprobamos su factibilidad: $(\boldsymbol{\lambda}^*)^T \mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T$

$$(\boldsymbol{\lambda}^*)^T \mathbf{A} = (\boldsymbol{\lambda}^*)^T [\mathbf{B}, \mathbf{D}] = [(\boldsymbol{\lambda}^*)^T \mathbf{B}, \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{D}] = [\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{B}, \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D}] = [\mathbf{c}_B^T, \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D}]$$

y utilizando la relación (2) de 3.31

$$(\boldsymbol{\lambda}^*)^T \mathbf{A} = [\mathbf{c}_B^T, \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D}] \leq [\mathbf{c}_B^T, \mathbf{c}_D^T] = \mathbf{c}^T$$

Para demostrar la optimalidad veremos que el valor de la función objetivo del problema dual y el primal coinciden

$$z_D = (\boldsymbol{\lambda}^*)^T \mathbf{b} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B^* = z_P$$

luego por el corolario 3.31 ambas soluciones son óptimas para sus respectivos problemas ■.

Para cualquier solución básica \mathbf{x}_B , con matriz básica asociada \mathbf{B} , sea o no factible, definimos los *multiplicadores simplex* mediante la expresión

$$\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \quad (3.33)$$

Ejemplo 3.34 Resuelve el problema lineal siguiente y da la solución de su problema dual utilizando multiplicadores simplex.

$$\begin{array}{llll} \text{Minimizar} & -x_1 & -4x_2 & -3x_3 \\ \text{Sujeto a} & & & \\ & 2x_1 & +2x_2 & +x_3 \leq 4 \\ & x_1 & +2x_2 & +2x_3 \leq 6 \\ & x_1, & x_2, & x_3 \geq 0 \end{array}$$

Solución: Utilizando variables de holgura (x_4 y x_5) y aplicando el método simplex, obtenemos las siguientes tablas hasta llegar a la tabla final óptima (en el recuadro aparecen los elementos sobre los que se pivota en cada paso)

	x_2	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_4	2	2	1	1	0	4
x_5	1	2	2	0	1	6
	-1	4	-3	0	0	0

	x_2	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_2	1	1	1/2	1/2	0	2
x_5	-1	0	1	-1	1	2
	3	0	-1	2	0	8

	x_2	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_2	3/2	1	0	1	-1/2	1
x_3	-1	0	1	-1	1	2
	2	0	0	1	1	10

En esta última tabla, que como podemos comprobar es óptima, obtenemos la solución óptima del problema $\mathbf{x}^* = (0, 1, 2, 0, 0)$. Como la matriz básica está formada por las columnas asociadas a los vectores de la solución básica, esta matriz estará formada por las columnas 2 y 3 de la matriz original

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Al premultiplicar por la inversa de esta matriz en la tabla original, obtendremos la tabla final, por tanto la inversa de esta matriz aparecerá donde en la tabla original estuviera ubicada la identidad, en este caso se corresponde con las columnas asociadas a las variables de holgura

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizando ahora el teorema anterior podremos obtener una solución del problema dual

$$\begin{array}{llll} \text{Maximizar} & 4\lambda_1 & +6\lambda_2 & \\ \text{Sujeto a} & & & \\ & 2\lambda_1 & +\lambda_2 & \leq -1 \\ & 2\lambda_1 & +2\lambda_2 & \leq -4 \\ & \lambda_1 & +2\lambda_2 & \leq -3 \\ & \lambda_1, & \lambda_2 & \leq 0 \end{array}$$

mediante el vector

$$\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$$

$$\boldsymbol{\lambda}^T = (-4, -3) \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = (-1, -1)$$

Holgura complementaria

Otra forma resolver uno de los problemas conociendo la solución del otro es mediante la llamada *holgura complementaria*. Los resultados obtenidos se dan en forma de teoremas:

Teorema 3.35 (Teorema debil de holgura complementaria) Si \mathbf{x}^* y $\boldsymbol{\lambda}^*$ son soluciones factibles de los problemas primal y dual respectivamente de $(P1, D1)$, la forma simétrica de la dualidad \implies

$$\mathbf{x}^* \text{ y } \boldsymbol{\lambda}^* \text{ son soluciones óptimas} \iff \begin{cases} (c_i - (\boldsymbol{\lambda}^*)^T \mathbf{A}_i) x_i^* = 0 & i = 1, \dots, n \\ \lambda_j^* (\mathbf{A}^j \mathbf{x}^* - b_j) = 0 & j = 1, \dots, m \end{cases}$$

Donde \mathbf{A}^j y \mathbf{A}_i indican la fila j y la columna i respectivamente de la matriz \mathbf{A} .

De las dos ecuaciones anteriores se puede decir que

$$\begin{aligned} \text{Si } x_i^* &> 0 \implies c_i = (\boldsymbol{\lambda}^*)^T \mathbf{A}_i \\ \text{Si } (\boldsymbol{\lambda}^*)^T \mathbf{A}_i &< c_i \implies x_i^* = 0 \\ \text{Si } \lambda_j^* &> 0 \implies b_j = \mathbf{A}^j \mathbf{x}^*_j \\ \text{Si } \mathbf{A}^j \mathbf{x}^* &> b_j \implies \lambda_j^* = 0 \end{aligned}$$

1. Si una variable en uno de los problemas es positiva \implies La restricción correspondiente en el otro es sin holgura, i.e., se cumple la igualdad.
2. Si una restricción en uno de los problemas es con holgura \implies La variable correspondiente en el otro problema es 0.

Demostración: Sean \mathbf{x}^* y $\boldsymbol{\lambda}^*$ soluciones óptimas de los problemas primal y dual de la forma simétrica de la dualidad

$$\left. \begin{array}{l} \text{Minimizar} \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{Sujeto a} \quad \mathbf{A} \mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \right\} (P1) \iff \left. \begin{array}{l} \text{Maximizar} \quad \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{x} \\ \text{Sujeto a} \quad \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{c}^T \\ \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0} \end{array} \right\} (D1)$$

Como \mathbf{x}^* y $\boldsymbol{\lambda}^*$ son factibles tenemos el siguiente resultado:

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* \geq (\mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda}^*)^T \mathbf{x}^* = (\boldsymbol{\lambda}^*)^T (\mathbf{A} \mathbf{x}^*) \geq (\boldsymbol{\lambda}^*)^T \mathbf{b}$$

Al ser \mathbf{x}^* y $\boldsymbol{\lambda}^*$ óptimos $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = (\boldsymbol{\lambda}^*)^T \mathbf{b}$ y por tanto se tiene que dar la igualdad para toda la expresión

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = (\boldsymbol{\lambda}^*)^T (\mathbf{A} \mathbf{x}^*) = (\boldsymbol{\lambda}^*)^T \mathbf{b}$$

de donde

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* &= ((\boldsymbol{\lambda}^*)^T \mathbf{A}) \mathbf{x}^* \Leftrightarrow (\mathbf{c}^T - (\boldsymbol{\lambda}^*)^T \mathbf{A}) \mathbf{x}^* = 0 \\ (\boldsymbol{\lambda}^*)^T (\mathbf{A} \mathbf{x}^*) &= (\boldsymbol{\lambda}^*)^T \mathbf{b} \Leftrightarrow (\boldsymbol{\lambda}^*)^T (\mathbf{A} \mathbf{x}^* - \mathbf{b}) = 0 \end{aligned}$$

Como todos los términos involucrados en las expresiones anteriores son ≥ 0 en coordenadas obtenemos

$$\begin{cases} (c_i - (\boldsymbol{\lambda}^*)^T \mathbf{A}_i) x_i^* = 0 & i = 1, \dots, n \\ \lambda_j^* (\mathbf{A}^j \mathbf{x}^* - b_j) = 0 & j = 1, \dots, m \end{cases}$$

■.

Teorema 3.36 (Holgura complementaria en la forma asimétrica) Si \mathbf{x}^* y $\boldsymbol{\lambda}^*$ son soluciones factibles de los problemas primal y dual respectivamente de $(P2, D2)$, la forma asimétrica de la dualidad \implies

$$\mathbf{x}^* \text{ y } \boldsymbol{\lambda}^* \text{ son soluciones óptimas} \iff \begin{cases} x_i > 0 \Rightarrow (\boldsymbol{\lambda}^*)^T \mathbf{A}_i = c_i \\ x_i = 0 \Leftarrow (\boldsymbol{\lambda}^*)^T \mathbf{A}_i < c_i \end{cases}$$

Ejemplo 3.37 Resuelve el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 \\ \text{Sujeto a} & \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4 \\ & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 3 \\ & x_j \geq 0 \end{array}$$

Solución: Escribimos su dual

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & 4\lambda_1 + 3\lambda_2 \\ \text{Sujeto a} & \\ & \lambda_1 + 2\lambda_2 \leq 2 \\ & \lambda_1 - 2\lambda_2 \leq 3 \\ & 2\lambda_1 + 3\lambda_2 \leq 5 \\ & \lambda_1 + \lambda_2 \leq 2 \\ & 3\lambda_1 + \lambda_2 \leq 3 \\ & \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \end{array}$$

cuya solución gráfica da como soluciones

$$\lambda_1 = \frac{4}{5}; \quad \lambda_2 = \frac{3}{5}$$

Si sustituimos esta solución óptima en las restricciones del problema

$$\begin{array}{llll} 1^a & \frac{4}{5} + 2 * \frac{3}{5} = 2 \leq 2 & \Rightarrow & \text{Sin holgura} \\ 2^a & \frac{4}{5} - 2 * \frac{3}{5} = -\frac{2}{5} < 3 & \Rightarrow & \text{Con holgura} \Rightarrow x_2^* = 0 \\ 3^a & 2\frac{4}{5} + 3 * \frac{3}{5} = 3 < 5 & \Rightarrow & \text{Con holgura} \Rightarrow x_3^* = 0 \\ 4^a & \frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{7}{5} < 2 & \Rightarrow & \text{Con holgura} \Rightarrow x_4^* = 0 \\ 5^a & 3 * \frac{4}{5} + \frac{3}{5} = 3 \leq 3 & \Rightarrow & \text{Sin holgura} \end{array}$$

Como $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ las restricciones equivalentes en el óptimo del primal son sin holgura (de igualdad) \Rightarrow

$$x_1^* + x_2^* + 2x_3^* + x_4^* + 3x_5^* = 4 \Rightarrow x_1^* + 3x_5^* = 4$$

$$2x_1^* - 2x_2^* + 3x_3^* + x_4^* + x_5^* = 3 \Rightarrow 2x_1^* + x_5^* = 3$$

Sistema que tiene solución

$$\begin{array}{rcl} x_1^* & = & 1 \\ x_5^* & = & 1 \end{array}$$

y por tanto la solución óptima del primal es

$$\mathbf{x}^* = (1, 0, 0, 0, 1)$$

3.6.3 Método Simplex dual

En esta sección se presenta un método alternativo para resolver un problema lineal utilizando una ligera variación del método Simplex: el llamado *método simplex dual*.

Puede ocurrir que un problema de programación lineal tenga una solución básica \mathbf{x}_B no factible, pero que todos los coeficientes de coste relativo sean no negativos, es decir, sus multiplicadores simplex asociados $\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$ son solución del problema dual ya que $\mathbf{r}_D^T = \mathbf{c}_D^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D} \geq \mathbf{0}$. En este caso diremos que la solución básica \mathbf{x}_B es *factible básica dual*. En esta situación se puede modificar el método Simplex para aprovechar esta situación y evitar la necesidad de buscar una solución factible inicial para utilizar el simplex.

Las condiciones que deben cumplir las variables de entrada y salida para este método, se obtienen de forma análoga a como se obtuvieron para el método Simplex; solamente hay que tener en cuenta que después de una

iteración en el método, la nueva tabla debe tener las mismas propiedades respecto a los multiplicadores simplex que la tabla inicial.

En un paso del método simplex dual se exige por una parte el cambio de una variable básica no factible (y por tanto negativa) por otra que cumpla la condición de no negatividad. A partir del desarrollo empleado en el método simplex, sabemos que si

$$\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0, 0, \dots, 0)$$

es la solución básica inicial asociada a las columnas $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m$. El cambio del vector básico \mathbf{A}_1 por el no básico \mathbf{A}_q , conducía a una nueva solución básica cuya expresión era

$$\mathbf{x}^1 = \left(0, x_2^0 - \frac{x_1^0}{y_{1q}} y_{2q}, \dots, x_m^0 - \frac{x_1^0}{y_{1q}} y_{mq}, 0, \dots, 0, \overbrace{\frac{x_1^0}{y_{1q}}}^q, 0, \dots, 0 \right)$$

Suponiendo que queremos hacer este cambio (suposición que puede hacerse sin pérdida de generalidad, como en el caso del simplex), estaremos asumiendo que el valor que tomaba la variable x_1 es el no factible y por tanto $x_1^0 < 0$. Como ahora queremos que la nueva variable x_q sea factible tendremos que exigir

$$\frac{x_1^0}{y_{1q}} \geq 0$$

y por tanto

$$y_{1q} < 0$$

en este caso el elemento pivote debe ser negativo, a diferencia del método simplex normal donde la factibilidad de la solución se conseguía utilizando un pivote estrictamente positivo.

Por otra parte, para conseguir que la nueva solución tenga las mismas propiedades que la tabla inicial, es decir, para conseguir que la nueva solución básica sea factible dual, tendremos que exigir que los nuevos coeficientes de coste relativo sigan siendo positivos. Si recordamos del método simplex que la última fila, la relativa a los coeficientes de coste relativo, se trata computacionalmente como una fila más; tendremos que los nuevos coeficientes de coste relativo respecto a la base $\{\mathbf{A}_q, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_m\}$ serán

$$r'_k = r_k - \frac{r_q}{y_{1q}} y_{1k}$$

para las variables no básicas actuales, es decir $x_1, x_{m+1}, \dots, x_{q-1}, x_{q+1}, \dots, x_n$, mientras que serán 0 para el resto. La nueva solución básica será factible dual si estos nuevos coeficientes de coste relativo siguen siendo ≥ 0

$$r'_k \geq 0 \Leftrightarrow r_k - \frac{r_q}{y_{1q}} y_{1k} \geq 0$$

como los signos de r_k (≥ 0) e y_{1q} (< 0) son fijos, el signo de r'_k dependerá solamente de y_{1k} . Distinguiamos 3 casos:

$$\begin{aligned} y_{1k} > 0 &\Rightarrow -\frac{y_{1k}}{y_{1q}} r_q \geq 0 \Rightarrow r_k - \frac{r_q}{y_{1q}} y_{1k} \geq 0 \\ y_{1k} = 0 &\Rightarrow -\frac{y_{1k}}{y_{1q}} r_q = 0 \Rightarrow r_k - \frac{r_q}{y_{1q}} y_{1k} = r_k \geq 0 \\ y_{1k} < 0 &\Rightarrow r_k - \frac{r_q}{y_{1q}} y_{1k} \text{ no tiene signo definido} \end{aligned}$$

en el último caso, cuando $y_{1k} < 0$, tenemos una diferencia de dos números positivos y por tanto el resultado puede tener cualquier sentido. Para garantizar que el nuevo coeficiente de coste relativo sea positivo hay que pedir que

$$r_k - \frac{r_q}{y_{1q}} y_{1k} \geq 0, \forall y_{1k} < 0$$

es decir

$$r_k \geq \frac{r_q}{y_{1q}} y_{1k}, \forall y_{1k} < 0$$

dividiendo por y_{1k} y teniendo en cuenta que es negativo

$$\frac{r_k}{y_{1k}} \leq \frac{r_q}{y_{1q}}, \forall y_{1k} < 0$$

si ahora multiplicamos la expresión por -1 (para obtener números positivos)

$$\frac{-r_k}{y_{1k}} \geq \frac{-r_q}{y_{1q}}, \quad \forall y_{1k} < 0$$

de esta forma podemos elegir como variable de entrada x_q , siendo

$$\frac{-r_q}{y_{1q}} = \min \left\{ \frac{-r_k}{y_{1k}} \mid y_{1k} < 0 \right\}$$

Hemos obtenido así un criterio de entrada y otro de salida igual que el método simplex normal:

- *Criterio de salida:* Elegimos como variable de salida x_p , de forma que su valor x_p^0 en la actual base sea negativo.
- *Criterio de entrada:* Entrará en la base para sustituir a la variable x_p , la variable x_q que cumpla

$$\frac{-r_q}{y_{pq}} = \min \left\{ \frac{-r_j}{y_{pj}} \mid y_{pj} < 0 \right\}$$

El método a seguir para obtener una solución óptima para el primal es el que se describe a continuación:

1. Si \mathbf{x}_B es una solución factible básica dual ($r_k \geq 0$) tenemos dos posibilidades:
 - (a) $\mathbf{x}_B \geq 0 \Rightarrow$ Es solución óptima
 - (b) $\exists x_{B_i} < 0 \Rightarrow$ Elegimos alguna componente de la solución básica que sea menor que cero, esta será la variable de salida.
2. Si los elementos en la fila correspondiente a la variable elegida en el apartado anterior son todos no negativos, entonces, el problema dual es no acotado y por tanto el primal es no factible. En caso contrario, elegimos como variable de entrada x_p , a aquella que cumpla la siguiente relación

$$\frac{-r_p}{y_{ip}} = \min_j \left\{ \frac{-r_j}{y_{ij}} \mid y_{ij} < 0 \right\}$$

Se sustituye x_{B_i} por x_k y se continúa el proceso.

Veamos un ejemplo ilustrativo del proceso:

Ejemplo 3.38 Minimizar el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\ &\text{Sujeto} && \\ &&& x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 5 \\ &&& 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6 \\ &&& x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Solución: Utilizando variables de exceso obtenemos el problema en forma estándar:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\ &\text{Sujeto} && \\ &&& x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4^e = 5 \\ &&& 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5^e = 6 \\ &&& x_1, x_2, x_3, x_4^e, x_5^e \geq 0 \end{aligned}$$

cuya tabla asociada es

	x_1	x_2	x_3	x_4^e	x_5^e	b
x_4^e	1	2	3	-1	0	5
x_5^e	2	2	1	0	-1	6
	3	4	5	0	0	0

Notar que si ahora realizamos un cambio de signo en las restricciones obtendremos la tabla

	x_1	x_2	x_3	x_4^e	x_5^e	b
x_4^e	-1	-2	-3	1	0	-5
x_5^e	-2	-2	-1	0	1	-6
	3	4	5	0	0	0

que tiene como solución básica a $\mathbf{x}_B^0 = (0, 0, 0, -5, -6)$ que es infactible. Esta solución es factible dual ya que los coeficientes de coste relativo de las variables no básicas son no negativos.

Para aplicar el método Simplex dual, observemos que puede utilizarse como variable de salida, cualquiera de las variables de la solución básica actual, ya que ambas tienen valores negativos. Elegimos x_5^e como variable de salida. Una vez elegida la fila, utilizamos el criterio de entrada, para ello calculamos las razones entre los coeficientes de coste relativo de las variables no básicas y los elementos de su columna correspondientes a la fila de la variable de salida

$$\text{Variable no básica } x_1 \Rightarrow \frac{-3}{-2}$$

$$\text{Variable no básica } x_2 \Rightarrow \frac{-4}{-2}$$

$$\text{Variable no básica } x_3 \Rightarrow \frac{-5}{-1}$$

El menor de todos ellos es el correspondiente a la variable x_1 , esta será la variable de entrada. Cambiamos la variable básica x_5^e por la no básica x_1 , pivotando sobre el elemento del recuadro para obtener la tabla

	x_1	x_2	x_3	x_4^e	x_5^e	b
x_4^e	0	-1	-5/2	1	-1/2	-2
x_1	1	1	1/2	0	-1/2	3
	0	1	7/2	0	3/2	-9

Cuya solución básica es $\mathbf{x}_B^1 = (3, 0, 0, -2, 0)$, que sigue siendo infactible y factible dual, por tanto podemos aplicar otra iteración del método. En este caso la única variable básica con valor negativo que queda es x_4^e , así que ésta será la variable de salida. Mientras que utilizando el criterio del menor cociente observamos que es x_2 es la variable que debe entrar. Pivotamos sobre el elemento correspondiente para obtener la tabla siguiente

	x_1	x_2	x_3	x_1^e	x_2^e	b
x_2	0	1	5/2	-1	1/2	2
x_1	1	0	-2	1	-1	1
	0	0	1	1	1	-11

que como puede observarse es óptima, ya que los coeficientes de coste relativo son todos positivos para las variables no básicas y la solución básica $\mathbf{x}^* = (1, 2, 0, 0, 0)$ es factible.

3.7 Post-Optimización en Programación Lineal

Una vez resuelto un problema lineal, sería interesante conocer qué sucedería con las soluciones si las condiciones del problema cambian, es decir, que solución se obtendría si las restricciones sobre los bienes, gastos, costes, etc.; sufren modificaciones. Una opción, bastante costosa por cierto, podría ser la resolución del problema desde el principio. Esta opción, aunque menos complicada de tratar, no aprovecha las propiedades de las funciones que componen un problema lineal y tampoco tiene en cuenta los cálculos realizados previamente. Sin embargo en la mayoría de los casos se puede resolver el nuevo problema, utilizando la información de la tabla óptima del problema actual sin tener que rehacer todos los cálculos.

También se podrían considerar los posibles valores entre los que puede variar algún coeficiente del problema lineal, de forma que la solución óptima siga siendo la misma. Este tipo de análisis, posterior a la solución de un programa lineal se puede agrupar en tres tipos de problemas:

1. **Análisis post-óptimo:** Es el estudio de las modificaciones que se producen en la solución óptima de un problema lineal cuando se realiza una modificación de algún o algunos de los coeficientes del problema.
2. **Análisis de la sensibilidad:** Estudio de los posibles valores que puede tomar uno o varios coeficientes de un problema lineal para que la solución óptima siga siendo la misma.
3. **Análisis paramétrico:** Estudio particular de un problema lineal en el que las modificaciones de los coeficientes del problema dependen de un parámetro.

Los tres tipos de análisis anteriores son prácticamente de la misma naturaleza y solamente vamos a estudiar los efectos que produce la modificación de cada uno de los coeficientes de un problema lineal sobre la tabla óptima.

Consideremos un problema lineal en forma estándar

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{Sujeto a} & \\ & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

y supongamos que el método simplex produjo una base óptima \mathbf{B} , con solución óptima \mathbf{x}^* . Describiremos cómo utilizar las condiciones de optimización para encontrar una nueva solución óptima al cambiar los datos del problema sin tener que resolver el nuevo problema desde el principio. En particular, se analizarán las consecuencias sobre la solución óptima del problema cuando se realizan las siguientes variaciones:

1. Cambios en los coeficientes de la función objetivo \mathbf{c} .
2. Cambios en el vector de términos independientes o vector de recursos \mathbf{b} .
3. Cambios en la matriz de coeficientes tecnológicos o de restricciones \mathbf{A} .
4. Inclusión de una nueva variable.
5. Inclusión de una nueva restricción.

3.7.1 Cambios en la función objetivo

Al hacer una modificación en los coeficientes de la función objetivo, hay que distinguir si el coeficiente modificado corresponde o no a una variable básica. Recordemos que los coeficientes de la función objetivo sólo afectan al cálculo de los coeficientes de coste relativo de las variables no básicas (para las básicas es 0) según la relación:

$$r_k = c_k - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_k \quad (3.34)$$

donde \mathbf{c}_B son los coeficientes de la función objetivo asociados a las variables básicas y \mathbf{A}_k es la columna de la matriz \mathbf{A} asociada a la variable no básica x_k .

Suponiendo que el cambio se efectúa sobre el coeficiente c_k , sustituyéndolo por c'_k , distinguimos dos casos:

Caso I: x_k no es básica

En este caso el cambio sólo afecta al coeficiente de coste relativo de esa variable no básica

$$r'_k = c'_k - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_k \quad (3.35)$$

Si $r'_k < 0$ entonces la variable no básica x_k puede entrar en la base para producir una mejora en la función objetivo. Si $r'_k > 0$ entonces la entrada de dicha variable no produce mejora y no hay modificaciones en la base. Si $r'_k = 0$ la variable x_k puede entrar en la base pero el valor de la función objetivo es el mismo, de manera que tendremos soluciones alternativas.

Restando las expresiones 3.35 y 3.34 se obtiene la relación que existe entre el coeficiente de coste relativo inicial y el nuevo

$$r_k - r'_k = c_k - c'_k \Rightarrow r'_k = r_k + (c'_k - c_k)$$

o en términos de incrementos

$$\Delta r_k = \Delta c_k$$

Caso II: x_k es básica

En este caso utilizando la expresión 3.34 se verán afectados todos los coeficientes de coste relativo asociados a variables no básicas, ya que se modifica el vector \mathbf{c}_B . Habrá que volver a calcular los nuevos coeficientes de coste relativo de esas variables (para las básicas sigue siendo 0)

$$r'_j = c_j - (\mathbf{c}'_B)^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_j \quad \forall x_j \text{ no básica} \quad (3.36)$$

donde

$$(\mathbf{c}'_B)^T = (c_{B_1}, \dots, c'_{B_k}, \dots, c_{B_m})$$

Si alguno de los nuevos coeficientes de coste relativo es negativo habrá modificaciones al incorporar su variable correspondiente a la solución básica. Mientras que si todos son positivos no hay ningún cambio. Si existe algún $r'_j = 0$ tendríamos soluciones alternativas.

Restando 3.35 y 3.34 se obtiene la relación que existe entre el coeficiente de coste relativo inicial y el nuevo para cada variable no básica

$$r_j - r'_j = \mathbf{c}'_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_j - \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_j \Rightarrow r'_j = r_j + (c_{B_k} - c'_{B_k}) y_{kj}$$

donde y_{kj} es el elemento de la columna no básica j y la fila k referida a la variable básica modificada.

En términos de incrementos tendremos la ecuación

$$\Delta r = y_{kj} \Delta c_{B_k}$$

3.7.2 Cambios en el vector \mathbf{b}

Un cambio en el vector \mathbf{b} implica un cambio en la solución básica y por tanto esta puede dejar de ser factible, pero en cualquier caso será factible dual. Si el vector \mathbf{b} pasa a valer \mathbf{b}' , la nueva solución básica \mathbf{x}'_B será

$$\mathbf{x}'_B = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}'$$

Si \mathbf{x}'_B es factible, también será óptima, puesto que los coeficientes de coste relativo no cambian. Si \mathbf{x}'_B dejar de ser factible (alguna de las componentes es < 0), entonces se recurre al método simplex dual para intentar obtener una nueva solución óptima.

Si \mathbf{x}_B era la solución básica inicial, entonces

$$\mathbf{x}'_B - \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{b}' - \mathbf{b}) \Leftrightarrow \Delta \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1} \Delta \mathbf{b}$$

3.7.3 Cambio en la matriz de coeficientes \mathbf{A}

Al hacer una modificación en los coeficientes de la matriz tecnológica, hay que tener en cuenta si el coeficiente modificado corresponde a una columna básica o no. Si la columna afectada no pertenece a la base, entonces la única modificación se produce en el coeficiente de coste relativo de la variable asociada a dicha columna. Si la columna afectada pertenece a la base, el análisis es más complejo porque incluso puede que los nuevos vectores no formen una base.

Em resumen si suponemos que se hace el cambio de la columna \mathbf{A}_k por \mathbf{A}'_k , tendremos dos posibilidades:

Caso I: x_k no es básica

En este caso sólo se modifica el coeficiente de coste relativo de la variable asociada

$$r'_k = c_k - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}'_k$$

Si $r'_k < 0$ la variable no básica x_k puede entrar en la base para producir una mejora en la función objetivo. Si $r'_k \geq 0$, entonces no hay modificaciones en la base, existiendo soluciones alternativas para $r'_j = 0$.

La relación entre el coeficiente de coste inicial y el actual es la siguiente

$$r_k - r'_k = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}'_k - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_k \Rightarrow r'_k = r_k + \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{A}_k - \mathbf{A}'_k)$$

o bien

$$\Delta r = (\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}) \Delta \mathbf{A}_k$$

Caso II: x_k es básica

En este caso la matriz \mathbf{B} puede incluso dejar de ser regular; pero aunque esto no ocurra, habrá modificaciones en todos los elementos de la tabla, ya que la matriz \mathbf{B} se utiliza para efectuar todos los cálculos. Si la nueva matriz \mathbf{B}' sigue siendo base tendremos que actualizar toda la tabla, calculando todos los elementos de la misma:

- Las nuevas columnas serán

$$(\mathbf{B}')^{-1} \mathbf{A}_k \quad k = 1, \dots, n.$$

- La nueva solución básica será

$$\mathbf{x}'_{B'} = (\mathbf{B}')^{-1} \mathbf{b}$$

- El nuevo vector de coeficientes de coste relativo se calcula como

$$(\mathbf{r}'_D)^T = \mathbf{c}_D^T - \mathbf{c}_{B'}^T (\mathbf{B}')^{-1} \mathbf{D}$$

La única ventaja respecto a empezar el problema de nuevo es que ya tenemos una base de partida.

Si la nueva matriz \mathbf{B}' ya no es regular podemos o bien comenzar de nuevo, o bien introducir una variable artificial que sustituya a la variable básica cuya columna ha sido modificada y resolviendo a continuación el problema por el método de las dos fases o por el de las penalizaciones.

3.7.4 Inclusión de una nueva variable

Si introducimos en el problema una nueva variable x_{n+1} (una nueva actividad, un nuevo producto) con su correspondiente coeficiente de coste en la función objetivo, c_{n+1} y su correspondiente vector tecnológico \mathbf{A}_{n+1} . El problema se reduce a comprobar si esta nueva variable puede o no incorporarse a la base, es decir, el problema consistirá en calcular su coeficiente de coste relativo

$$r_{n+1} = c_{n+1} - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_{n+1}$$

e introducir la nueva variable en la base si $r_{n+1} < 0$.

Si $r_{n+1} > 0$ no habrá cambios y si $r_{n+1} = 0$ habrá soluciones alternativas.

3.7.5 Inclusión de una nueva restricción

Si añadimos una nueva restricción, el conjunto factible es más pequeño, por tanto si la solución óptima actual cumple la nueva restricción, esta será de nuevo la solución óptima del problema con la nueva restricción.

Al ampliar el problema con una nueva restricción aumenta la dimensión de la base de manera que la nueva solución óptima tendrá una nueva componente.

Supongamos que \mathbf{B} es la base óptima antes de añadir la restricción. Recordemos que en forma matricial la función objetivo se puede poner como

$$z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} + (\mathbf{c}_D^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D}) \mathbf{x}_D$$

siendo

$$\mathbf{r}_D^T = \mathbf{c}_D^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D}$$

el vector de los coeficientes de coste relativo de las variables no básicas.

Además la solución básica tiene la expresión

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{x}_D \quad (3.37)$$

Si añadimos la nueva restricción

$$\mathbf{A}^{m+1} \mathbf{x} \leq b_{m+1}$$

donde \mathbf{A}^{m+1} son los coeficientes de la nueva fila y que puede escribirse como

$$\mathbf{A}^{m+1} \mathbf{x} + x_{m+1}^h = b_{m+1} \quad (3.38)$$

con $x_{m+1}^h \geq 0$ una variable de holgura. La ecuación anterior se puede poner como

$$\mathbf{A}_B^{m+1} \mathbf{x}_B + \mathbf{A}_D^{m+1} \mathbf{x}_D + x_{m+1}^h = b_{m+1}$$

Sustituyendo el valor de \mathbf{x}_B dado por la ecuación 3.37 en la restricción anterior y despejando x_{m+1} , obtenemos la restricción equivalente

$$\begin{aligned} x_{m+1}^h &= b_{m+1} - \mathbf{A}_B^{m+1} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} - (\mathbf{A}_D^{m+1} - \mathbf{A}_B^{m+1} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D}) \mathbf{x}_D \\ x_{m+1}^h &= b_{m+1} - \mathbf{A}_B^{m+1} \mathbf{x}_B - (\mathbf{A}_D^{m+1} - \mathbf{A}_B^{m+1} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D}) \mathbf{x}_D \end{aligned} \quad (3.39)$$

A partir de la solución óptima actual $\mathbf{x}^* = (\mathbf{x}_B, 0)$ y sustituyendo en la ecuación 3.39 obtenemos un valor para la variable de holgura x_{m+1}^h

$$x_{m+1}^h = b_{m+1} - \mathbf{A}_B^{m+1} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \quad (3.40)$$

Teniendo en cuenta el valor de esta variable de holgura, puede ocurrir

$$\begin{aligned} b_{m+1} - \mathbf{A}_B^{m+1} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} &> 0 \implies \text{La solución actual es, junto con este nuevo valor, óptima} \\ b_{m+1} - \mathbf{A}_B^{m+1} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} &= 0 \implies \text{La solución actual es, junto con este nuevo valor, óptima degenerada} \\ b_{m+1} - \mathbf{A}_B^{m+1} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} &< 0 \implies \text{La solución actual deja de ser factible. Hay que utilizar el método simplex dual} \end{aligned}$$

En resumen, añadir una nueva restricción al problema aumenta la dimensión del problema y con ello la dimensión de la base, tendremos pues que incorporar un nuevo vector a la base. Este vector va a ser la columna asociada a la variable de holgura de la nueva restricción (ec. 3.38). La nueva restricción es equivalente a la ecuación 3.39, que nos da el valor de la variable de holgura en función de la solución básica. Dependiendo de este valor el problema seguirá siendo óptimo y la solución óptima será la solución óptima inicial, junto con la variable de holgura tomando dicho valor; o tendremos que aplicar el método simplex dual, y en este caso será la variable de holgura la variable de salida.

La formula anterior se puede explicar de la siguiente forma, puesto que cada variable básica está en una y sólo una de las ecuaciones de la tabla óptima del problema inicial podemos utilizar estas ecuaciones para eliminar de la nueva restricción las variables básicas, de manera que en esa ecuación solamente aparezcan variables no básicas (con valor cero) y la nueva variable de holgura x_{m+1}^h con valor $b_{m+1} - \mathbf{A}_B^{m+1} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$ y por tanto x_{m+1}^h será básica. Tendremos pues una solución básica para el sistema ampliado utilizando las variables óptimas del problema anterior, junto con esta variable de holgura. Lo único que queda por comprobar es si esa solución básica es factible, y por tanto también será óptima y en caso contrario será factible dual y tendremos que aplicar el método simplex dual.

En la práctica esta operación este proceso es muy sencillo, puesto que lo único que hace falta es incluir la nueva restricción en la tabla óptima y pivotar hasta conseguir la base necesaria.

3.7.6 Ejemplo de aplicación

A continuación veremos con un ejemplo cada uno de los cambios posibles en los coeficientes del problema.

Ejemplo 3.39 Considerar el siguiente problema

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & 5x_1 - 5x_2 - 13x_3 \\ \text{Sujeto a} \quad & -x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 20 \\ & 12x_1 + 4x_2 + 10x_3 \leq 90 \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

que tiene como tabla óptima

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^h	b
x_2	-1	1	3	1	0	20
x_5^h	16	0	-2	-4	1	10
	0	0	2	5	0	100

donde x_4^h y x_5^h son las variables de holgura. Estudiar cada uno de los siguientes cambios de forma independiente y dar la solución óptima del problema modificado en cada caso.

1. Cambiar b_1 por $b'_1 = 30$
2. Cambiar (b_1, b_2) por $(b'_1, b'_2) = (10, 100)$
3. Cambiar c_3 por $c'_3 = 8$
4. Cambiar \mathbf{A}_1 por $\mathbf{A}_1'^T = (0, 5)$ y c_1 por $c'_1 = 2$
5. Inclusión de una nueva variable x_6 con $\mathbf{A}_6^T = (3, 5)$ y $c_6 = 10$
6. Inclusión de una nueva restricción: $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 50$

Solución: Para resolver todos los apartados necesitamos conocer los siguientes elementos: la inversa de la matriz básica óptima y los coeficientes de coste asociados a las variables básicas óptimas. Según la tabla, la base óptima del problema está formada por las columnas A_2 y A_5^h (hay que conservar ese orden), de manera que la base óptima del problema será

$$\mathbf{B} = (A_2, A_5^h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Al ser un problema sólo con restricciones del tipo \leq , podremos encontrar su inversa \mathbf{B}^{-1} donde antes estaban las variables de holgura (ya que podemos pasar de la tabla inicial a la óptima multiplicando por \mathbf{B}^{-1} y en la matriz inicial las columnas asociadas a las variables de holgura formaban la identidad), de manera que esta matriz será

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Mientras que los coeficientes de coste óptimos son

$$\mathbf{c}_B^T = (c_2, c_5^h) = (-5, 0)$$

1. Cambiar b_1 por $b'_1 = 30$

En este caso habrá un cambio en los valores de la solución básica y tenemos que comprobar si los nuevos valores siguen siendo factibles.

$$\mathbf{x}'_B = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -30 \end{pmatrix}$$

como se puede comprobar la nueva solución básica ha dejado de ser factible y por tanto también ha dejado de ser óptima. En este caso para recuperar la factibilidad del problema podremos aplicar el método simplex dual, ya que al ser los coeficientes de coste relativo de las variables no básicas no negativos, la solución es factible dual. La tabla sobre la que hay que usar el método simplex dual es la tabla siguiente

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^h	b
x_2	-1	1	3	1	0	30
x_5^h	16	0	-2	-4	1	-30
	0	0	2	5	0	150

donde hemos reflejado en la columna de términos independientes el cambio experimentado al cambiar el coeficiente.

Aplicando los criterios de entrada y salida del simplex dual, la variable x_5^h dejará la base porque es la única con valor negativo, mientras que utilizando el criterio de entrada

$$\min \left\{ -\frac{r_j}{y_{ij}} \mid y_{ij} < 0 \right\} = \min \left\{ \frac{-2}{-2}, \frac{-5}{-4} \right\} = \frac{-2}{-2}$$

y la variable x_3 será la que entre en la base. Si pivotamos sobre el elemento recuadrado

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^h	b
x_2	-1	1	3	1	0	30
x_5^h	16	0	-2	-4	1	-30
	0	0	2	5	0	150

obtendremos la tabla:

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^h	b
x_2	23	1	0	-5	3/2	-15
x_3	-8	0	1	2	-1/2	15
	16	0	0	1	1	120

que como podemos observar, proporciona una nueva variable básica $(0, -15, 15, 0, 0)$ que es infactible pero factible dual, por tanto tendremos que volver a aplicar el método simplex dual; para ello pivotamos sobre el elemento encuadrado ($x_2 < 0 \Rightarrow$ sale y solamente puede entrar x_4^h)

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^h	b
x_4^h	-23/5	-1/5	0	1	-3/10	3
x_3	-6/5	2/5	1	0	1/10	9
	103/5	1/5	0	0	13/10	117

esta última tabla es ya óptima, puesto que todos los coeficientes de coste relativo de las variables no básicas son ≥ 0 . La nueva solución óptima será

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}^*)' &= (0, 0, 9) \\ (\mathbf{z}^*)' &= -117\end{aligned}$$

donde hemos eliminado de la solución el valor de las variables de holgura.

2. *Cambiar (b_1, b_2) por $(b'_1, b'_2) = (10, 100)$*

Como en el caso anterior se ha modificado el vector de coeficientes independientes, por lo que habrá una modificación en los valores de la solución básica y tendremos que comprobar, igual que en el apartado anterior, si la nueva solución es o no factible. La diferencia aparece ahora porque se han modificado los dos coeficientes.

$$\mathbf{x}'_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 60 \end{pmatrix}$$

En este caso la nueva solución básica es factible y por tanto, como los coeficientes de coste relativo de las no básicas no han sido modificados, la solución es óptima. Luego la solución óptima básica seguirá teniendo como variables x_2 y x_5^h , pero ahora con valores 10 y 60 respectivamente. La nueva solución será

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}^*)' &= (0, 10, 0) \\ (z^*)' &= -50\end{aligned}$$

3. *Cambiar c_3 por $c'_3 = 8$*

Se trata de un cambio en un coeficiente de coste asociado a una variable x_3 , que no es básica, por tanto el único cambio estará relacionado con su coeficiente de coste relativo. El valor actual $r_3 = 2$ se transforma en r'_3 .

$$r'_3 = c'_3 - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_3$$

si tenemos en cuenta que r_3 era

$$r_3 = c_3 - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_3$$

podemos restar ambas expresiones para obtener

$$r_3 - r'_3 = c_3 - c'_3$$

y de aquí

$$r'_3 = r_3 - (c_3 - c'_3) = 2 - (-13 - 8) = 23 > 0$$

como el nuevo coeficiente de coste es positivo la solución óptima incluyendo sus valores no cambiará.

4. Cambiar \mathbf{A}_1 por $\mathbf{A}'_1 = (0, 5)$ y c_1 por $c'_1 = 2$

Al tratarse de una modificación en un vector de coeficientes tecnológicos asociado a la variable x_1 que no es básica, solamente habrá cambios en el coeficiente de coste relativo asociado a esta variable. El coeficiente r_1 que actualmente tiene un valor 0 se transformará en r'_1

$$r'_1 = c_1 - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}'_1$$

sustituyendo los valores correspondientes

$$r'_1 = 5 - (-5, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 - (-5, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 - 0 = 5$$

luego el coeficiente de coste es positivo y la variable no entrará en la base y no habrá cambio de solución óptima. Lo que se observa es que en el problema inicial al ser $r_1 = 0$, teníamos un problema con soluciones alternativas; el cambio en \mathbf{A}_1 ha provocado que la solución óptima sea ahora única, puesto que la tabla óptima final es ahora:

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^h	b
x_2	0	1	3	1	0	20
x_5^h	5	0	-2	-4	1	10
	5	0	2	5	0	100

5. Introducir una nueva variable x_6 con $\mathbf{A}_6^T = (3, 5)$ y $c_6 = 10$

La introducción de una nueva variable, implica solamente el cálculo de su correspondiente coeficiente de coste relativo y el valor de este último indicará si la nueva variable entra dentro de la base o si la nueva solución óptima sigue siendo la misma. Calculamos dicho coeficiente de coste relativo

$$r_6 = c_6 - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_6 = 10 - (-5, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 25$$

que al ser positivo indica que la solución sigue siendo la misma y que la variable x_6 no mejorará el valor óptimo del problema.

6. Introducir una nueva restricción: $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 50$

Si la solución óptima actual cumple la nueva restricción, entonces la solución óptima no cambiará, en caso contrario habrá que buscar la nueva solución. En primer lugar sustituimos el valor de la solución en la nueva restricción

$$2 * 0 + 3 * 20 + 5 * 0 = 60 \not\leq 50$$

Como la solución actual no cumple la nueva restricción, el problema tendrá una nueva solución. La forma de proceder es la siguiente: Se incluye la nueva restricción en la tabla óptima, incluyendo la correspondiente variable de holgura x_6^h

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^h	x_6^h	b
x_2	-1	1	3	1	0	0	20
x_5^h	16	0	-2	-4	1	0	10
x_6^h	2	3	5	0	0	1	50
	0	0	2	5	0	0	100

obviamente los coeficientes de x_6^h , en las dos primeras ecuaciones es 0 (no aparece), mientras que los coeficientes de x_4^h y x_5^h en la última ecuación también serán 0 por los mismos motivos. Como las dimensiones del problema cambian (ahora necesitamos una base de \mathbb{R}^3) hemos considerado como nuevo vector en la base al correspondiente a x_6^h . Como x_2 y x_5^h eran las variables básicas del problema inicial también queremos que sigan formando parte de la base actual, por lo que habrá que conseguir un valor 0 en los coeficientes correspondientes. Para ello, debemos multiplicar por 3 la primera fila y restársela a la tercera, para conseguir la tabla:

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^h	x_6^h	b
x_2	-1	1	3	1	0	0	20
x_5^h	16	0	-2	-4	1	0	10
x_6^h	5	0	-4	-3	0	1	-10
	0	0	2	5	0	0	100

que como se puede comprobar nos proporciona una solución infactible pero factible dual y por tanto habrá que utilizar el método simplex dual. Utilizando el criterio de salida para este método saldrá la variable x_6^h (es < 0) y utilizando el criterio de entrada, la variable x_3 será la que entre en la base. Pivotamos sobre el elemento correspondiente

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^h	x_6^h	b
x_2	11/4	1	0	-5/4	0	3/4	25/2
x_5^h	27/2	0	0	-5/2	1	-1/2	15
x_3	-5/4	0	1	3/4	0	-1/4	10/4
	5/2	0	0	7/2	0	1/2	95

y la nueva solución es ahora

$$(\mathbf{x}^*)' = (0, 25/2, 10/4)$$

que es una solución óptima cuyo valor óptimo es

$$(z^*)' = -95$$

Notar ahora que la matriz básica es ahora una matriz 3×3 .