

## Capítulo 7

# Simulación Discreta

### 7.1 Introducción

La simulación discreta es totalmente diferente en concepto y en aplicación de lo que hemos visto de respecto a la simulación continua en el tema anterior. La Simulación discreta está dirigida a los llamados *problemas de colas*, por que tienen una cosa en común: tratan sobre el tiempo de espera de ciertos objetos, mientras que esperan a ser procesados dentro del sistema.

Los objetos o componentes de un modelo de sistema discreto se conocen como *entidades (entities)*. Estas entidades son objetos discretos, cada uno separado del otro, y que poseen unos *atributos*, que pueden ser cualidades, características o propiedades que afectan a la conducta de las entidades dentro del modelo. Las entidades pueden tener dos tipos de estado: unas están *ocupadas (busy)* en alguna *actividad*, o están desocupadas (*idle*), sin hacer nada pero esperando en la cola. Una cola no indica literalmente un número de entidades alineadas una detrás de la otra, indican un estado común en el cual un número de entidades se encuentra después de acabar una actividad y antes de realizar la siguiente. Cuando una entidad se mueve desde una actividad hacia la cola, o viceversa, el estado del sistema cambia. Este instante de cambio se denomina *evento*.

El movimiento de entidades a través de los diferentes puntos de un modelo constituye la conducta dinámica del modelo. La conducta dinámica dentro del modelo depende del movimiento de las entidades de diferente tipo. Estas entidades entran en el entorno del sistema, posiblemente en puntos diferentes, y salen del sistema, de nuevo en puntos diferentes. Esas llegadas al modelo son las que permiten al modelo funcionar.

Los *sucesos* son instantes en los que el estado del modelo cambia a través de los desplazamientos de las entidades entre puntos a través del entorno del modelo. El estado del sistema permanece constante en cualquier otro instante de tiempo. La dinámica del modelo, pues, estará determinada por la forma de incorporarse las identidades. Normalmente esta llegada es una variable aleatoria con una determinada distribución. Estudiaremos por tanto la forma de generar algunas de las distribuciones más usuales.

### 7.2 Generación de Números Aleatorios

La simulación de cualquier sistema en el que se tengan en cuenta efectos no determinísticos necesita disponer de una gran cantidad de números aleatorios, y en general, de sucesiones de realizaciones de variables aleatorias. Existen muchos métodos para generar una variable aleatoria con una determinada función de distribución a partir de una sucesión de números aleatorios. Es conveniente, por tanto, encontrar métodos eficientes para generarlos.

En primer lugar tenemos que tener en cuenta que se entiende por sucesión de números aleatorios. En teoría, es una sucesión de variables aleatorias independientes distribuidas uniformemente dentro del intervalo  $[0, 1)$ . Para que una sucesión se considere aleatoria tienen que cumplirse una serie de requisitos como que una persona que no conozca el método de generación no pueda determinar el siguiente término, o que la sucesión supere una serie de contrastes estadísticos adecuados al uso que se va a hacer de ella.

### 7.2.1 Métodos mecánicos

La generación de números aleatorios de forma totalmente aleatoria, es muy sencilla con alguno de los siguientes métodos:

1. *Mediante una ruleta.* Si estamos interesados en obtener números aleatorios discretos de una cifra  $(0, 1, 2, \dots, 9)$ , se hace girar una ruleta numerando los sectores del 0 al 9 y posteriormente se delimita anotándose el número de sector. La probabilidad de obtener cualquier número de la secuencia anterior es  $1/10$ .

Si en lugar de generar números aleatorios de una cifra, necesitamos generar números aleatorios uniformes de  $k$  cifras, con valores de la variable aleatoria en el conjunto  $\{0, 1, \dots, 10^k - 1\}$ , con probabilidad  $1/10^k$ , no tenemos nada más que partir de una tabla de números aleatorios de una cifra, y agruparlos de  $k$  en  $k$ ; los números resultantes son aleatorios de  $k$  cifras.

La generación de números aleatorios de una variable aleatoria uniforme  $\mathcal{U}(0, 1)$  constituye el paso siguiente, ya que esa distribución juega un papel fundamental en la generación de variables aleatorias con otras distribuciones. Supongamos que estamos interesados en la generación de números aleatorios con  $k$  cifras decimales y uniformes en el intervalo  $(0, 1)$ . El primer paso será generar números  $(x)$ , uniformes de  $k$  cifras para posteriormente, a través de una transformación  $y = x/10^k$ , pasarlos al dominio  $(0, 1)$

2. *Mediante una moneda o un dado:* Se lanza una moneda o un dado y se anota el resultado.
3. *Uso de guías telefónicas:* Coger la guía telefónica de una provincia, abrir una página al azar y anotar de cada número de teléfono las cuatro últimas cifras.
4. *Recurrir a tablas de números aleatorios.* La utilización de tablas de números aleatorios tiene lugar cuando se resuelven problemas de forma manual.

Obviamente, después de obtener una sucesión de números aleatorios resulta conveniente ver si se comportan como tales, para ello se recurre a pruebas estadísticas.

### 7.2.2 Métodos de generación aritméticos

Los procedimientos de generación de números aleatorios más utilizados son de tipo aritmético y suelen ser de tipo recursivo. Cada número aleatorio se obtiene en función del último número obtenido, o de un número relativamente pequeño de los números obtenidos previamente. Si se considera el caso en el que cada número depende exclusivamente del anterior, la fórmula de generación será

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (7.1)$$

donde inicialmente se ha indicado el valor de  $x_0$ , que se denomina *semilla*.

Pero la generación de números aleatorios mediante la ecuación 7.1 no son aleatorios, ya que estamos generando dichos números de forma determinista, mediante una regla aritmética. Este tipo de sucesiones se denomina pseudoaleatoria. Se puede demostrar que la sucesión de números generados mediante la fórmula 7.1 es necesariamente cíclica.

**Teorema 7.1** Sea  $m$  un número natural, y sea  $x_0, x_1, \dots$  una sucesión de números naturales menores que  $m$ , generados según la fórmula  $x_{n+1} = f(x_n)$ , entonces existen enteros  $0 \leq \mu < m$ , y  $1 \leq \lambda \leq m$ , tales que  $x_0, x_1, \dots, x_\mu, \dots, x_{\lambda+\mu-1}$  son distintos, y  $x_n = x_{\lambda+n}$ , para  $n \geq \mu$ . Se tiene además que  $1 \leq \mu + \lambda \leq m$ . Llamamos periodo a la longitud  $\lambda$  del ciclo.

#### Método de los cuadrados medios

El primer método aritmético para generar números aleatorios fue propuesto por Von Neumann en 1946 y se conoce como método de los cuadrados medios. Consiste en tomar un número  $x_0$  de  $2n$  dígitos y elevarlo al cuadrado. El resultado tendrá  $4n$  dígitos (si no es así se completa con ceros a la izquierda). Los  $2n$  dígitos centrales de este producto se toman como el número aleatorio siguiente. Esto es, se eliminan los  $n$  dígitos menos significativos y los  $n$  mas significativos (incluyendo ceros). El procedimiento se vuelve a repetir para este nuevo número, y así sucesivamente.

**Ejemplo 7.2** Si tomamos  $x_0 = 4879$ , el procedimiento sería el siguiente

$x_k$	$x_k^2$
$x_0 = 4879$	$x_0^2 = 23\,8046\,41$
$x_1 = 8046$	$x_1^2 = 64\,7381\,16$
$x_2 = 7381$	$x_2^2 = 54\,4791\,61$

### Método congruencia lineal

Para un número natural positivo  $m$ , al que llamaremos módulo, se generan sucesiones de números utilizando la fórmula de recurrencia:

$$x_{n+1} \equiv (ax_n + b) \pmod{m}, \quad n \geq 0 \quad (7.2)$$

donde  $a$  (multiplicador),  $b$  (incremento)  $x_0$  (valor inicial o *semilla*) son números naturales menores que  $m$ , se dice en este caso que  $x_{n+1}$  es congruente con  $(ax_n + b)$  módulo  $m$ . La fórmula indica que  $x_{n+1}$  y  $(ax_n + b)$  dan el mismo resto al dividir por el número natural  $m$ ; i.e., que  $(ax_n + b) - x_{n+1}$  es un múltiplo de  $m$ . La sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  proporciona, en consecuencia, números naturales entre 0 y  $m - 1$  (según el teorema anterior).

Podemos evitar la aparición de ciclos tempranos eligiendo un periodo tan grande que, para el uso del método no se agote el ciclo.

Para la elección de los parámetros hay que tener en cuenta que en primer lugar que  $m$  tiene que ser tan grande como sea posible, ya que el periodo, según el teorema 7.1 es siempre menor o igual que  $m$ . Una opción razonable es tomar  $m$  tan grande como permita el ordenador en el que se va a trabajar, de manera que si el ordenador es binario con una palabra de 32 bits, este número será  $m = 2^{32} = 4294967296$ , o un valor próximo a este.

Se demuestra que los métodos congruenciales son los que producen sucesiones de números aleatorios que parecen estadísticamente aleatorios, siempre que  $a$  y  $b$  se elijan propiamente. No hay una regla general para la elección de  $a$ ,  $m$  y  $b$ . El método depende de varios factores incluido el hardware y el software disponible. La mayoría de los lenguajes de programación y simulación proporcionan un generador de números aleatorios.

Si queremos conseguir una distribución aleatoria uniforme  $\mathcal{U}(0, 1)$  podremos hacerlo mediante la transformación  $u_{n+1} = x_{n+1}/m$ .

**Ejemplo 7.3** Sea  $m = 8$ ,  $a = 5$ ,  $b = 7$  y  $x_0 = 4$

$n$	$x_n$	$5x_n + 7$	$x_{n+1}$	$u_n$
0	4	27	3	0.375
1	3	22	6	0.750
2	6	37	5	0.625
3	5	32	0	0.000
4	0	7	7	0.875
5	7	42	2	0.250

Partiendo de la expresión general de las congruencias podemos tener los siguientes casos:

1. Si  $b = 0$ , entonces  $x_{n+1} = ax_n \pmod{m}$ , denominado *generador de números pseudoaleatorios multiplicativo*; se suele tomar  $m = c^p$ , donde  $c$  representa la cantidad de dígitos del sistema de numeración de la computadora y  $p$  la cantidad de dígitos de una palabra. Para el caso de una computadora binaria es  $c = 2$  y  $p$  elegida por el programador. Se puede comprobar que el periodo máximo que se puede obtener con este tipo de generador en computadoras binarias es  $m/4$ , con  $m = 2^p$  ( $p > 2$ ), y se logra tomando una semilla impar y  $a = 8i + 3$ , donde  $i = 1, 2, 3$ .
2. Si  $b \neq 0$ , tenemos el caso más general, denominada *método congruencial mixto*. La principal ventaja respecto al anterior es que si se realiza una elección adecuada de  $a$  y  $b$ , se puede llegar a conseguir que el periodo sea  $m$ . Las condiciones que deben verificarse para conseguir tal objetivo son las siguientes:

- (a) Que  $a$  y  $b$  sean primos entre sí.
- (b) Que  $(a - 1)$  sea múltiplo de cada número primo que divide a  $m$
- (c) Que  $(a - 1)$  sea múltiplo de 4 si  $m$  es múltiplo de 4.

Que tengamos una sucesión de números pseudo-aleatorios generados mediante congruencia lineal, no garantiza que los números generados se comporten de modo aleatorio, por ejemplo: para  $a = b = 1$ ,  $m$  y  $x_0$  cualquiera, se genera la sucesión  $0, 1, 2, \dots, m - 1$ , que es de periodo máximo, sin embargo, esta sucesión no es útil para un proceso aleatorio.

Los generadores congruenciales requieren muy poco gasto de tiempo y de espacio en memoria. Además, para elecciones adecuadas de los parámetros, pueden tener un periodo tan grande como se quiera, limitado por el tamaño del módulo  $m$ , aunque como se ha comprobado en el ejemplo anterior un periodo largo no garantiza que la sucesión presente una apariencia aleatoria, de forma que pueda ser utilizada para simular una realización de experimentos independientes y con distribución uniforme en  $[0, 1)$ . Habría por tanto que realizar una serie de pruebas convenientes con el fin de determinar si un generador congruencial es adecuado en un problema determinado de simulación. Este conjunto de pruebas se realiza mediante técnicas estadísticas.

## 7.3 Generación de Variables Aleatorias

Los modelos que se construyen para poder simular situaciones reales de naturaleza aleatoria utilizan para la modelización de fenómenos aleatorios una gran variedad de variables aleatorias, no sólo variables aleatorias uniformes.

A partir de un generador de números aleatorios, y por tanto de un simulador de variables aleatorias uniformes en  $[0, 1)$ , podemos centrarnos en el problema de generar una muestra con una distribución de probabilidad específica para nuestra simulación. Vemos a continuación algunos de estos métodos.

### 7.3.1 Simulación de variables aleatorias discretas

Aunque existen métodos particulares para ciertas variables aleatorias discretas, el siguiente problema nos proporciona un método directo para simular cualquiera de ellas.

**Teorema 7.4 (Método de la transformación inversa (v.a. Discreta))** Sea  $U$  una variable aleatoria uniformemente distribuida sobre el intervalo unidad,  $U(0, 1)$ , y sea  $X$  una variable aleatoria con función puntual de probabilidad  $P(X = x_i) = p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . La variable aleatoria  $Y$  definida a partir de  $U$ , como

$$Y = x_1 \text{ si } U \leq p_1 \tag{7.3}$$

$$Y = x_k \text{ si } p_1 + \dots + p_{k-1} < U \leq p_1 + \dots + p_k$$

tiene la misma distribución de probabilidad que  $X$ .

Este método proporciona un método utilizable para simular cualquier variable aleatoria discreta.

**Ejemplo 7.5** Supongamos por ejemplo una variable aleatoria discreta  $X$ , que toma los valores y probabilidades asignados en la siguiente tabla

$k$	$P(X = k)$	$F(x)$	Intervalo
0	0.10	0.10	$[0.00, 0.10)$
1	0.20	0.30	$[0.10, 0.30)$
2	0.25	0.55	$[0.30, 0.55)$
3	0.20	0.75	$[0.55, 0.75)$
4	0.25	1.00	$[0.75, 1.00)$

Por tanto recordando la secuencia de números aleatorios generada mediante la fórmula de congruencia lineal del ejemplo anterior,

$n$	$x_n$	$5x_n + 7$	$x_{n+1}$	$u_n$
0	4	27	3	0.375
1	3	22	6	0.750
2	6	37	5	0.625
3	5	32	0	0.000
4	0	7	7	0.875
5	7	42	2	0.250

Los valores de la variables  $X$  que se obtienen serían

$n$	$u_n$	$X$
0	$0.375 \in [0.30, 0.55)$	2
1	$0.750 \in [0.75, 1.00)$	4
2	$0.625 \in [0.55, 0.75)$	3
3	$0.000 \in [0.00, 0.10)$	0
4	$0.875 \in [0.75, 1.00)$	4
5	$0.250 \in [0.10, 0.30)$	1

y en la última columna tendríamos la simulación de una variable aleatoria con la misma distribución que  $X$ .

### 7.3.2 Generación de variables aleatorias discretas

#### Variables aleatorias de Bernoulli

Una variable aleatoria de tipo Bernoulli de parámetro  $p$ ,  $B(p)$ , toma dos posibles valores, 1 (éxito) y 0 (fracaso), con probabilidades  $p$  y  $q = 1 - p$ , respectivamente. Si  $U$  es una variable aleatoria uniforme en  $(0, 1)$ , entonces la variable aleatoria definida como

$$X = \begin{cases} 0 & \text{si } U > p \\ 1 & \text{si } U \leq p \end{cases}$$

es una variable de Bernoulli. Por tanto para obtener una observación de una variable aleatoria de Bernoulli  $B(p)$ , es suficiente obtener una observación de una distribución uniforme  $U(0, 1)$ , y comprobar si es mayor que  $p$  (fracaso) o no (éxito).

Un ejemplo de variable aleatoria de tipo Bernoulli sería el número de caras que se obtiene al lanzar una moneda al aire.

#### Variable aleatoria Binomial

La variable aleatoria Binomial  $B(n, p)$ , representa el número de veces que se obtiene éxito al repetir  $n$  veces de forma independiente un experimento que tiene probabilidad de éxito  $p$ . Además si  $\{X_i\}$  es una familia de variables aleatorias de tipo Bernoulli  $B(p)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , independientes entre sí, entonces  $X = \sum_{i=1}^n X_i$  es una variable aleatoria binomial  $B(n, p)$ .

Para obtener una observación de una variable aleatoria binomial  $B(n, p)$ , es suficiente obtener una muestra de tamaño  $n$  de una variable de Bernoulli  $B(p)$ , y sumar los resultados. Si necesitamos obtener una muestra de tamaño  $m$  de una variable aleatoria binomial  $B(m, p)$ , habrá que generar en ese caso  $n * m$  observaciones de la distribución uniforme  $U(0, 1)$ .

#### Variable aleatoria de Poisson

Para simular una variable aleatoria de Poisson se hace el cambio de variable  $U = e^{-\lambda T}$ . Para  $T_1, \dots, T_{k+1}$ , las variables  $U_1, \dots, U_{k+1}$  son  $U(0, 1)$ , independientes, por lo que la variable aleatoria de Poisson  $X$  se puede calcular de la siguiente forma, a partir de observaciones uniformes

$$X = \begin{cases} 0 & \text{si } U_1 \leq e^{-\lambda} \\ k & \text{si } k \text{ es el primer entero que cumple } U_1 \cdots U_k > e^{-\lambda}; U_1 \cdots U_{k+1} \leq e^{-\lambda} \end{cases}$$

Si  $N$  es la variable aleatoria que representa el número de observaciones uniformes  $U(0, 1)$  que es necesario generar para obtener una observación de la variable aleatoria de Poisson  $X$ , hay que tomar  $N = X + 1$ , con lo que el valor esperado de  $N$  es  $E[N] = \lambda + 1$ .

### Variable aleatoria Geométrica

Una variable aleatoria discreta que siga una distribución geométrica, está basada en la repetición de un experimento hasta conseguir un éxito. En ese caso si  $X$  indica el número de veces que se repite el experimento hasta obtener un éxito,  $X$  será una distribución geométrica con función de densidad

$$P(X = k) = q^{k-1}p = (1-p)^{k-1}p$$

donde  $p$  es la probabilidad de obtener un éxito en la realización de un experimento. Para generar una variable aleatoria discreta de tipo geométrica mediante simulación, utilizamos el teorema de la función inversa:

$$Y = x_k = k \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k-1} P(X = i) < U \leq \sum_{i=1}^k P(X = i)$$

teniendo en cuenta el valor de  $P(X = i)$

$$\sum_{i=1}^{k-1} (1-p)^{i-1}p < U \leq \sum_{i=1}^k (1-p)^{i-1}p$$

teniendo en cuenta que cada sumatorio es una suma de una progresión geométrica de razón  $(1-p)$  tendremos

$$1 - (1-p)^{k-1} < U \leq 1 - (1-p)^k$$

restando 1 y cambiando el sentido de la desigualdad multiplicando por  $-1$

$$(1-p)^{k-1} > 1 - U \geq (1-p)^k$$

Si  $U$  es una distribución uniforme en  $(0, 1)$ , entonces  $V = 1 - U$ , también es una distribución uniforme  $(0, 1)$

$$(1-p)^{k-1} > V \geq (1-p)^k$$

tomando logaritmos

$$(k-1) \ln(1-p) > \ln V \geq k \ln(1-p)$$

y dividiendo por  $\ln(1-p)$  (teniendo en cuenta que este número será negativo)

$$(k-1) < \frac{\ln V}{\ln(1-p)} \leq k$$

Si ahora simulamos un valor  $V$  de una variable aleatoria uniforme  $(0, 1)$  ( $\mathcal{U}(0, 1)$ ), el correspondiente valor simulado en la variable aleatoria geométrica de parámetro  $p$ , se obtiene a través de la siguiente expresión

$$X = 1 + E \left[ \frac{\ln V}{\ln(1-p)} \right]$$

donde  $E[x]$  es la parte entera de  $x$ .

### 7.3.3 Simulación de variables aleatorias continuas

En este apartado seguimos un método análogo al del apartado anterior para el caso discreto, en concreto se desarrollan los métodos de la transformación inversa y el método del rechazo.

**Teorema 7.6 (Método de transformación Inversa (v.a. Continua))** Sea  $U$  una variable aleatoria  $U(0, 1)$  y  $X$  una variable aleatoria absolutamente continua con función de densidad  $f(x)$  y función de distribución  $F(x)$ ,  $x \in I \subseteq \mathbb{R}$ . Supongamos que existe la función inversa  $F^{-1}(u)$  para  $0 \leq u \leq 1$ . Entonces la variable aleatoria  $Y$  definida a partir de  $U$  como

$$Y = F^{-1}(U) \quad (7.4)$$

tiene la misma distribución de probabilidad que  $X$ .

A diferencia del caso discreto, aquí este método no siempre puede utilizarse para generar una variable aleatoria continua puesto que puede que no exista la función  $F^{-1}$ .

Podemos sin embargo utilizar el método que nos proporciona el siguiente Teorema:

**Teorema 7.7 (Método de rechazo con entorno finito  $(a, b)$ )** Sean  $U_1$  y  $U_2$  variables aleatorias  $U(0, 1)$  independientes y  $X$  una variable aleatoria absolutamente continua con función de densidad  $f(x)$ ,  $x \in (a, b)$ ,  $-\infty < a < b < \infty$ . La variable aleatoria  $Y$  definida a partir de  $U_1$  y  $U_2$ , para cualquier constante  $c$  con

$$0 < c \leq \frac{1}{\max f(x)} \quad (7.5)$$

como

$$Y = \begin{cases} a + (b - a)U_1 & \text{Si } U_2 \leq cf(a + (b - a)U_1) \\ \text{se rechaza} & \text{Si } U_2 > cf(a + (b - a)U_1) \end{cases} \quad (7.6)$$

tiene la misma distribución de probabilidad que  $X$

Es decir, si queremos simular una variable aleatoria  $X$  con función de densidad  $f(x)$  con  $x \in (a, b)$ , el proceso consistirá en los siguientes pasos:

1. Generar dos valores  $U_1$  y  $U_2$ , según una distribución uniforme  $(0, 1)$ , y construir los valores

$$\begin{aligned} x_i &= a + (b - a)U_1 \\ y_i &= cU_2 \end{aligned}$$

2. Calcular el valor de  $f(x_i)$ , y comprobar la desigualdad

$$y_i \leq f(x_i)$$

si esta desigualdad se cumple, entonces  $x_i$  es un valor simulado de la variable aleatoria  $X$  con función de densidad  $f(x)$ , si no se cumple la desigualdad, entonces hay que repetir el paso 1.

3. Continuar el proceso hasta conseguir el número deseado de muestras de la variable aleatoria  $X$ .

En el caso de una variable aleatoria  $X$  cuyo recorrido no sea finito, podemos aplicar el siguiente teorema.

**Teorema 7.8 (Método de rechazo con entorno infinito)** Si el recorrido de la variable aleatoria  $X$  no es finito, se parte de una variable aleatoria  $Y$ , con función de densidad  $g(y)$ , de la que se puedan simular valores sin dificultad y que verifique la desigualdad

$$\frac{f(y)}{g(y)} \leq c \quad \forall y, c > 0$$

podemos tomar  $c = \max \left\{ \frac{f(y)}{g(y)} \right\}$ , y se aplica el siguiente proceso:

1. Se simula un valor  $y$  de la variable aleatoria  $Y$ , con función de densidad  $g(y)$
2. Se simula un valor  $u$  de una variable aleatoria uniforme  $\mathcal{U}(0, 1)$
3. Si ocurre

$$u \leq \frac{f(y)}{cg(y)}$$

entonces  $y$  es un valor simulado de la variable aleatoria  $X$ ; en caso contrario se rechaza dicho valor y se continua en el punto i)

La sucesión de puntos construida según el método anterior siguen la misma distribución que  $X$ .

### 7.3.4 Generación de variables aleatorias continuas

#### Variables aleatorias uniformes

La función de densidad de una variable aleatoria  $U(a, b)$ , con  $-\infty < a < b < \infty$ , es

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad \forall x \in (a, b)$$

y su función de distribución es

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a} \quad \forall x \in (a, b)$$

que tiene como función inversa

$$F^{-1}(y) = a + (b-a)y \quad \forall y \in (0, 1)$$

Por el método de la transformación inversa, si  $U$  es una variable aleatoria con distribución  $U(0, 1)$ , la variable aleatoria  $X = a + (b-a)U$ , tendrá una distribución  $U(a, b)$ . Por tanto cada observación de una variable aleatoria uniforme  $U(a, b)$ , necesita una observación de una variable aleatoria  $U(0, 1)$

#### Variable aleatoria exponencial

La función de densidad de una variable aleatoria exponencial de parámetro  $\lambda > 0$ , es

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \forall x > 0$$

y su función de distribución es

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad \forall x > 0$$

que tiene como función inversa

$$F^{-1}(y) = -\frac{\ln(1-y)}{\lambda} \quad \forall y \in (0, 1)$$

Por el método de la transformación inversa, y teniendo en cuenta que si  $U$  es una variable aleatoria con distribución  $U(0, 1)$ ,  $1 - U$ , también es  $U(0, 1)$ , resulta que la variable

$$X = -\frac{\ln U}{\lambda}$$

será una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro  $\lambda$ .

#### Variable aleatoria normal

Una forma de obtener observaciones de una variable aleatoria normal de media 0 y desviación típica 1 ( $N(0, 1)$ ), es la siguiente; partiendo del resultado conocido que asegura que si  $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ , es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (con el mismo tipo de distribución), con media  $\mu$  y desviación típica  $\sigma < \infty$ , se tiene que

$$\frac{\sum_{j=1}^{\infty} X_j - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \rightarrow N(0, 1)$$

Por tanto, según esto, para obtener una observación de una variable  $N(0, 1)$ , es suficiente obtener  $n$  observaciones de cualquier variable con varianza finita y calcular su media tipificada, con  $n$  suficientemente grande. En la práctica, se suele admitir como suficiente tomar  $n = 12$  y  $X_j$  distribuciones uniformes  $U(0, 1)$ , independientes. En este caso

$$X = \frac{\sum_{j=1}^{12} U_j - 12\frac{1}{2}}{\sqrt{12/12}} = \sum_{i=1}^{12} U_i - 6$$

Este procedimiento es muy sencillo, aunque para cada observación normal es necesario generar 12 observaciones uniformes, y además la simulación no es exacta, sino aproximada.



También podemos utilizar el teorema del rechazo con Entorno Infinito, para simular una variable aleatoria normal,  $Z \equiv N(0, 1)$ . La función de densidad de esta variable es de la forma

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad -\infty < z < \infty$$

que por la simetría podemos generar dentro del intervalo  $[0, \infty)$  con la densidad

$$h(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad 0 < x < \infty$$

Si  $h(x)$  es la función de densidad anterior y la asociamos a una variable aleatoria  $X$ , entonces la variable aleatoria  $Z$ , cuya función de densidad es la normal  $f(z)$ , se obtiene haciendo

$$Z = \begin{cases} X & \text{con probabilidad } 1/2 \\ -X & \text{con probabilidad } 1/2 \end{cases} \quad (7.7)$$

Como variable aleatoria de partida  $Y$ , tomaremos la exponencial negativa de media  $\mu = 1$ , es decir  $g(y) = e^{-y}$ ,  $0 < y < \infty$ . Operando llegamos a:

$$\begin{aligned} \frac{f(y)}{g(y)} &= \frac{\frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}}{e^{-y}} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} e^{-\frac{y^2}{2} + y} = \left(\frac{2e}{\pi}\right)^{1/2} e^{-(y^2 - 2y + 1)/2 + 1/2} = \\ &= (2e/\pi)^{1/2} e^{-(y-1)^2/2} \leq (2e/\pi)^{1/2} \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que el máximo de la función  $e^{-x^2/2}$  es 1. Si tomamos  $c = (2e/\pi)^{1/2}$  obtenemos

$$\frac{f(y)}{cg(y)} = e^{-(y-1)^2/2}$$

Para generar la variable aleatoria  $X$ , seguimos los siguientes pasos:

1. Generar una variable aleatoria  $Y$  con función de densidad  $g(y) = e^{-y}$  y una variable aleatoria  $U$  con distribución uniforme  $\mathcal{U}(0, 1)$ .
2. Si  $U \leq e^{-(Y-1)^2/2}$  entonces  $X = Y$ , en caso contrario volvemos al paso anterior.

entonces la sucesión generada de esta forma tiene la misma distribución que  $X$ .

Una vez simulada la variable aleatoria  $X$ , pasaremos a simular la variable aleatoria  $Z$ , para ello basta tener en cuenta la ecuación 7.7.

Si se requiere mayor precisión en la simulación, se pueden utilizar otros métodos como el de Box-Muller, o el método Polar de Marsaglia.

**Lema 7.9 (Box-Muller)** Si  $U_1$  y  $U_2$  son variables aleatorias  $U(0, 1)$  independientes, entonces las variable aleatoria  $X$  e  $Y$  obtenidas a partir de ellas como

$$X = \sqrt{-2 \log U_1} \cos(2\pi U_2)$$

$$Y = \sqrt{-2 \log U_1} \sin(2\pi U_2)$$

son variable aleatoria  $N(0, 1)$  independientes.

**Lema 7.10 (Marsaglia)** Si  $U_1$  y  $U_2$  son variable aleatoria  $U(0, 1)$  independientes, entonces las variable aleatoria  $X$  e  $Y$  obtenidas según el siguiente criterio:

1. Calculamos  $W = (2U_1 - 1)^2 + (2U_2 - 1)^2$

2. Si  $W \geq 1$  rechazamos  $U_1$  y  $U_2$ , en caso contrario

$$X = (2U_1 - 1) \left( -2 \frac{\log W}{W} \right)^{1/2}$$

$$Y = (2U_2 - 1) \left( -2 \frac{\log W}{W} \right)^{1/2}$$

son variable aleatoria  $N(0, 1)$  independientes.

Si se quiere una observación de una variable aleatoria  $X$ , con distribución normal  $N(\mu, \sigma)$ , es suficiente obtener una observación de una variable aleatoria  $Y$  con distribución  $N(0, 1)$ , y calcular  $X$  como  $X = \mu + \sigma Y$ .

## 7.4 Cálculo Aproximado de Integrales y Series

Presentamos en esta sección dos aplicaciones del proceso de simulación estocástica a problemas matemáticos de carácter determinista: cálculo de series y de integrales definidas.

Cualquier serie o integral se puede representar como la esperanza matemática de una función de una variable aleatoria (discreta para series y absolutamente continua para integrales)

Por ejemplo la serie

$$\sum_{i \in C} g(x)$$

se puede considerar una variable aleatoria discreta  $X$  que tome valores en  $C$ , con distribución de probabilidad  $p(x)$ ,  $x \in C$  y se transforma la serie en

$$\sum_{i \in C} g(x) = \sum_{x \in C} \frac{g(x)}{p(x)} p(x) = E \left[ \frac{g(X)}{p(X)} \right]$$

Por su parte, para una integral

$$\int_C g(x) dx$$

se puede considerar una variable aleatoria absolutamente continua  $X$ , que tome valores en  $C$ , con función de densidad  $f(x)$ ,  $x \in C$ , y se transforma la integral de la siguiente forma:

$$\int_C g(x) dx = \int_C \frac{g(x)}{f(x)} f(x) dx = E \left[ \frac{g(X)}{f(X)} \right]$$

En ambos casos, el cálculo de la integral o la serie se reduce al cálculo de una esperanza matemática; podemos utilizar la simulación estocástica para obtener una muestra de la variable aleatoria  $X$  y estimar la esperanza matemática a través de la media muestral. Es decir se aproxima la integral o la serie por

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{g(X_i)}{f(X_i)}$$

La fundamentación teórica para esta aproximación la proporciona el siguiente Teorema, conocido como teorema de Khintchine, consecuencia de la ley débil de los grandes números.

**Teorema 7.11 (Teorema de Khintchine)** Si  $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ , es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con media  $\mu < \infty$ , entonces se tiene la convergencia en probabilidad siguiente:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \mu$$

La convergencia en probabilidad significa lo siguiente

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j - \mu \right| > \varepsilon \right) = 0$$

Mientras que para determinar el tamaño que debe tener la muestra de la variable aleatoria  $X$ , para acotar el error cometido en la estimación, se puede utilizar el resultado que proporciona la desigualdad de Tchebychev.

**Teorema 7.12 (Desigualdad de Tchebychev)** *Cualquier variable aleatoria  $X$  con media  $\mu$  y desviación típica  $\sigma < \infty$ , satisface la siguiente desigualdad*

$$P(|X - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

para  $\varepsilon > 0$ .

El teorema anterior aplicado a la variable aleatoria  $\sum_{i=1}^n \frac{g(X_i)}{f(X_i)}$  proporciona un método para acotar el error de la estimación a través de la determinación de un valor mínimo para  $n$ .

### 7.4.1 Cálculo de Series

Consideremos el problema de calcular

$$S = \sum_{x \in C} g(x)$$

Sea  $X$  una variable aleatoria discreta que toma valores en  $C$ , con distribución de probabilidad  $p(x)$ ,  $x \in C \subseteq \mathbb{N}$ . Como ya se indicó, la serie anterior coincide con

$$S = E \left[ \frac{g(X)}{p(X)} \right]$$

En este caso el valor

$$\hat{S} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{g(X_j)}{p(X_j)}$$

es un estimador centrado de  $S$ . De forma que si  $S < \infty$ , entonces como consecuencia del teorema de Khintchine,  $\hat{S}$  converge a  $S$  en probabilidad. Si además

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{[g(X_j)]^2}{p(X_j)} < \infty$$

entonces, como consecuencia de la desigualdad de Tchebychev, si se quiere asegurar que la probabilidad de cometer un error mayor que  $\varepsilon$  sea a lo sumo  $\delta$

$$P(|\hat{S} - S| > \varepsilon) \leq \frac{\text{Var} \left( \frac{g(X)}{p(X)} \right)}{n\varepsilon^2} < \delta$$

basta tomar

$$n > \frac{1}{\delta\varepsilon^2} \text{Var} \left( \frac{g(X)}{p(X)} \right)$$

**Ejemplo 7.13** *Si se quiere calcular de forma aproximada la serie*

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^5 - k^3 + 2}{k!}$$

Para ello se considera la distribución de probabilidad de una variable aleatoria de poisson  $\mathcal{P}(1)$ , con lo que la serie se transforma en

$$S = e \sum_{k=0}^{\infty} (k^5 - k^3 + 2) \frac{e^{-1}}{k!} = e (E(X^5) - E(X^3) + 2)$$

por lo que  $S$  puede estimarse mediante:

$$\hat{S} = e \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^5 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^3 + 2 \right)$$

siendo  $(X_1, \dots, X_n)$  una muestra de una variable Poisson de parámetro 1.

### 7.4.2 Cálculo de Integrales Definidas

Para el cálculo aproximado de integrales definidas mediante simulación aleatoria se han estudiado diversos métodos, de los que presentamos algunos de ellos. La gran ventaja que presentan es la sencillez de uso, así como que se exigen pocos requisitos a la función que se integra para poder ser aplicados, a diferencia de los métodos numéricos que requieren, por ejemplo, derivadas continuas de cierto orden.

#### Método de acierto o fallo (Hit or Miss)

Se considera el problema de calcular la integral definida

$$I = \int_a^b g(x) dx \quad -\infty < a < b < \infty$$

donde la función  $g(x)$  es acotada en el intervalo  $(a, b)$ . El problema es equivalente a considerar la integral definida

$$I = \int_0^1 g(x) dx$$

donde la función  $g(x)$  verifica  $0 \leq g(x) \leq 1$ ,  $\forall x \in (0, 1)$ , en cuyo caso se tiene que  $0 \leq I \leq 1$ . Definimos  $A$  como

$$A = \{(x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) : y < g(x)\}$$

entonces

$$I = \int_0^1 g(x) dx = \int \int_A dx dy = P((X, Y) \in A)$$

siendo  $(X, Y)$  una variable aleatoria bidimensional distribuida uniformemente en el cuadrado unidad, o equivalentemente,  $X$  e  $Y$  son variable aleatoria  $U(0, 1)$  independientes.

Se considera la variable aleatoria  $Z$ , definida a partir de  $(X, Y)$  como

$$Z = \begin{cases} 0 & \text{si } (X, Y) \notin A \\ 1 & \text{si } (X, Y) \in A \end{cases}$$

La media y la varianza de la variable  $Z$  son

$$E(Z) = 0 \times P((X, Y) \notin A) + 1 \times P((X, Y) \in A) = I \leq 1$$

$$Var(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2 = I(1 - I) \leq \frac{1}{4}$$

donde en la última desigualdad hemos considerado el valor máximo de  $I(1 - I)$ .

Sea  $(Z_1, \dots, Z_n)$  una muestra de la variable  $Z$ . El método Hit or Miss propone estimar  $I$  mediante el estimador

$$\hat{I}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i$$

La media y la varianza del estimador son:

$$E(\hat{I}_1) = E(Z) = I$$

$$Var(\hat{I}_1) = \frac{1}{n} Var(Z) = \frac{I(1 - I)}{n} \leq \frac{1}{4n}$$

por lo que  $\hat{I}_1$  es un estimador centrado de  $I$ , y aplicando el teorema de Khintchine,  $\hat{I}_1$  converge en probabilidad a  $I$ . Aplicando la desigualdad de Tchebychev, para tener un error mayor que  $\varepsilon$  con probabilidad menor que  $\delta$  basta tomar

$$n > \frac{1}{4\delta\varepsilon^2}$$

El nombre del método se debe a que para obtener el valor del estimador lo que se hace en realidad es simular puntos  $(X, Y)$  distribuidos uniformemente dentro del cuadrado unidad y contar cuántos de ellos están dentro de  $A$  (Hit) dividiendo el resultado por el total de puntos simulados  $n$ .

**Ejemplo 7.14** Para calcular la integral

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

con una probabilidad de al menos 0.9 de tener una cifra decimal exacta, se considera el estimador  $\hat{I}$ .

Para ello, se obtienen  $n$  pares de observaciones uniformes  $\mathcal{U}(0,1)$ ,  $(x_i, y_i)$  y se calcula  $\hat{I}$ , como el número de estos pares que se encuentran dentro de  $A$ , en este caso  $x_i^2 + y_i^2 < 1$ , dividido por  $n$ .

Para que se tenga una cifra decimal exacta con probabilidad al menos 0.9, basta elegir  $n = 251$ .

### Método Montecarlo Crudo

Se considera el problema de calcular la integral definida

$$I = \int_a^b g(x) dx \quad -\infty < a < b < \infty$$

donde la función  $g(x)$  es acotada en el intervalo  $(a, b)$ . El problema es equivalente a considerar la integral definida

$$I = \int_0^1 g(x) dx = E(g(U))$$

siendo  $U$  una distribución uniforme  $(0,1)$ . El método de Montecarlo Crudo, o de la media muestral, propone estimar  $I$ , mediante

$$\hat{I}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(U_i)$$

siendo  $U_i$  una muestra de una variable aleatoria uniforme  $\mathcal{U}(0,1)$ . La media y la varianza del estimador son:

$$E(\hat{I}_2) = E(g(U)) = I$$

$$Var(\hat{I}_2) = \frac{1}{n} (E([g(U)]^2) - I^2) = \frac{\sigma^2}{n}$$

con

$$\sigma^2 = Var(g(U))$$

por lo que  $\hat{I}_2$  es un estimador centrado de  $I$ , y si  $I < \infty$ , aplicando el teorema de Khintchine,  $\hat{I}_2$  converge en probabilidad a  $I$ . Si además se cumple

$$\int_0^1 [g(x)]^2 dx < \infty$$

entonces se puede aplicar la desigualdad de Tchebychev, que proporciona una cota inferior de  $n$  para que la probabilidad de un error mayor que  $\varepsilon$  sea menor que  $\delta$  basta tomar

$$n > \frac{\sigma^2}{\delta \varepsilon^2}$$

**Ejemplo 7.15** Para calcular la integral

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

con una probabilidad de al menos 0.9 de tener una cifra decimal exacta, se considera el estimador  $\hat{I}_2$  anterior. Como  $\sqrt{1-x^2} < 1$  en  $(0,1)$ , se tiene que  $I < 1$ . Además como

$$\sigma^2 \leq \int_0^1 1-x^2 dx = \frac{2}{3}$$

será suficiente que el tamaño de la muestra que se utilice satisfaga

$$\frac{\sigma^2}{\delta \varepsilon^2} < \frac{2/3}{0.1^2 \times 0.1} = \frac{2000}{3} < n$$

y es suficiente tomar  $n = 667$ .

### Método de introducción de una nueva función

Los métodos anteriores no son utilizables para el cálculo aproximado de integrales impropias. el método de introducción de una nueva función permite encontrar una solución en este caso, además de ser aplicables a integrales propias.

Se considera el problema de calcular la integral definida

$$I = \int_a^b g(x) dx \quad -\infty \leq a < b \leq \infty$$

y una variable aleatoria absolutamente continua  $X$  que tome valores en  $(a, b)$ , con función de densidad  $f(x)$ ,  $x \in (a, b)$ . La integral se transforma en

$$I = \int_a^b g(x) dx = \int_a^b \frac{g(x)}{f(x)} f(x) dx = E \left( \frac{g(X)}{f(X)} \right)$$

El método de introducción de una nueva función propone estimar  $I$  mediante el estimador

$$\hat{I}_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{g(X_i)}{f(X_i)}$$

siendo  $(X_1, \dots, X_n)$  una muestra de una variable aleatoria  $X$ . La media y la varianza del estimador son:

$$E(\hat{I}_3) = E \left( \frac{g(X)}{f(X)} \right) = I$$

$$Var(\hat{I}_3) = \frac{1}{n} \left( E \left( \left[ \frac{g(X)}{f(X)} \right]^2 \right) - I^2 \right) = \frac{\sigma^2}{n}$$

con

$$\sigma^2 = Var \left( \frac{g(X)}{f(X)} \right)$$

por lo que  $\hat{I}_3$  es un estimador centrado de  $I$ , y si  $I < \infty$ , aplicando el teorema de Khintchine,  $\hat{I}_3$  converge en probabilidad a  $I$ . Si además se cumple

$$\int_a^b \frac{[g(x)]^2}{f(x)} dx < \infty$$

entonces se puede aplicar la desigualdad de Tchebychev, que proporciona una cota inferior de  $n$  para que la probabilidad de un error mayor que  $\varepsilon$  sea menor que  $\delta$  basta tomar

$$n > \frac{\sigma^2}{\delta \varepsilon^2}$$

### Método Montecarlo

Sean  $x_1, \dots, x_N$ ,  $N$  puntos aleatorios, uniformemente distribuidos en un volumen multidimensional  $V$ , entonces el teorema básico de Montecarlo para la estimación de la integración de una función  $f$  sobre el volumen  $V$ , es

$$\int f dV \approx V \langle f \rangle \pm V \sqrt{\frac{\langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2}{N}}$$

donde

$$\langle f \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$$

$$\langle f^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f^2(x_i)$$

El segundo término es una estimación de error de desviación estándar para la integral, aunque no es una cota rigurosa, puesto que no hay garantías de que el error esté distribuido normalmente. Por tanto este error es solamente una indicación pobre del error probable.

Supongamos que queremos integrar una función  $g$  sobre una región  $W$ , que no es muy fácil de muestrear aleatoriamente. Por ejemplo  $W$ , puede tener un forma complicada. Para resolver el problema se busca una región  $V$  que incluya a  $W$  y que pueda ser fácilmente muestreada, después definimos la función

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in W \\ 0 & \text{si } x \notin W \end{cases} \quad x \in V$$

Hay que conseguir que  $V$  esté lo más cerca posible de  $W$

## 7.5 Bibliografía Básica del Tema

1. Aguaron-Joven, J.; Calvete-Fernández, H.; Calleja-Lasala, P.; Jiménez-Moreno, J.M. & Alastrué-Plo, F. *Simulación*. Ed. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Zaragoza. Colección de Textos Docentes (1993)
2. Bennett, B.S. *Simulation Fundamentals*. Ed. Prentice Hall (1995)
3. Hoover, S. V. & Perry, R. F. *Simulation. A Problem-Solving Approach*. Ed. Addison-Wesley (1990)
4. Law, A.M. & Kelton W.D. *Simulation Modeling and Analysis*. Ed McGraw-Hill International Editions (1991)