

Capítulo 5

Control óptimo de sistemas discretos

En este capítulo se obtendrá la solución general para problemas de optimización para sistemas en tiempo discreto, que se aplica en particular a sistemas lineales con índice de coste cuadrático.

5.1 Solución del problema de optimización discreta general

Supongamos que el sistema está descrito por la ecuación dinámica general

$$\mathbf{x}_{k+1} = f^k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \quad (5.1)$$

junto con la condición inicial x_0 . El superíndice de la función f indica que puede depender del tiempo. Supongamos que el estado del sistema \mathbf{x}_k es un vector n -dimensional y que el control \mathbf{u}_k es un vector m -dimensional. Puesto que 5.1 determina el estado del sistema en el tiempo $k + 1$ conociendo el control y el estado en tiempo k , esta será nuestra restricción de estado. Obviamente, $f^k \in \mathbb{R}^n$.

Si consideramos el *índice de rendimiento* asociado dado por la forma general

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \phi(N, \mathbf{x}_N) + \sum_{k=0}^{N-1} L^k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \quad (5.2)$$

donde $[0, N]$ es el intervalo de tiempo en el que queremos estudiar el comportamiento del sistema, $\phi(N, \mathbf{x}_N)$ es la *función de coste terminal* que depende del instante final N y del estado del sistema en ese instante \mathbf{x}_N , y $L^k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$ es una función que en general depende del tiempo, del estado y del control en cada instante de tiempo intermedio k en $[0, N]$. El *problema del control óptimo en tiempo discreto* será entonces, encontrar el control óptimo \mathbf{u}_k^* en el intervalo $[0, N]$ que lleva el sistema 5.1 a lo largo de una trayectoria óptima \mathbf{x}_k^* de forma que sea mínimo el índice de rendimiento 5.2.

Esta claro que la ecuación 5.1 describe el comportamiento del sistema, mientras que el índice de rendimiento dado por 5.2 sirve para elegir la respuesta del sistema adecuada. Para alcanzar diferentes objetivos es necesaria la elección de diferentes índices de rendimiento.

5.1.1 Introducción

Para aclarar el problema de formulación, es importante indicar algunos índices de rendimiento comunes que pueden seleccionarse para el sistema 5.1.

Problemas de tiempo mínimo

Supongamos que queremos encontrar el control \mathbf{u}_k que conduce el sistema desde un estado inicial dado \mathbf{x}_0 hacia un estado final $\mathbf{x}_f \in \mathbb{R}^n$ en el menor tiempo posible. Entonces podríamos seleccionar el índice de rendimiento

$$J = N = \sum_{k=0}^{N-1} 1 \quad (5.3)$$

y la condición de contorno

$$\mathbf{x}_N = \mathbf{x}_f \quad (5.4)$$

En este caso $\phi = N$ y $L = 0$, o equivalentemente $\phi = 0$ y $L = 1$

Problemas de Mínimo combustible

Para encontrar el control \mathbf{u}_k que lleve el sistema desde el estado inicial \mathbf{x}_0 hasta el estado final \mathbf{x}_f en un tiempo fijo N utilizando la mínima cantidad de combustible, podemos utilizar el siguiente índice de rendimiento

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} |\mathbf{u}_k| \quad (5.5)$$

puesto que el combustible utilizado es proporcional a la magnitud del vector control. Entonces $\phi = 0$ y $L^k = |\mathbf{u}_k|$. Las condiciones de contorno son de nuevo $\mathbf{x}_N = \mathbf{x}_f$

Problemas de Energía-Mínima

Supongamos que queremos encontrar \mathbf{u}_k para minimizar la energía del estado final y todos los estados intermedios, y también del control utilizado para alcanzar este estado final. Sea el instante de tiempo final N , de nuevo fijo. Entonces podríamos utilizar como índice de rendimiento

$$J = \frac{1}{2} s \mathbf{x}_N^T \mathbf{x}_N + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (q \mathbf{x}_k^T \mathbf{x}_k + r \mathbf{u}_k^T \mathbf{u}_k) \quad (5.6)$$

donde q , r y s son factores peso. Entonces $\phi = \frac{1}{2} s \mathbf{x}_N^T \mathbf{x}_N$, y $L = \frac{1}{2} (q \mathbf{x}_k^T \mathbf{x}_k + r \mathbf{u}_k^T \mathbf{u}_k)$ que son funciones cuadráticas.

Minimizar la energía corresponde en cierto sentido a dejar el estado y el control cerca del cero. Si fuera más importante para nosotros que los estados intermedios sean pequeños, entonces debemos elegir q grande, mientras que si es más importante que la energía empleada en el control sea pequeña, entonces hay que hacer grande el valor de r . Si por el contrario queremos que el estado final sea pequeño, entonces, s debería ser grande.

5.1.2 Ecuaciones generales

Para determinar la secuencia de controles óptimos $\mathbf{u}_0^*, \dots, \mathbf{u}_{N-1}^*$, que minimice el índice J en el intervalo $[0, N]$, procederemos como en el caso de optimización de funciones reales: utilizando los multiplicadores de Lagrange. Puesto que hay una función restricción $f^k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$ específica en cada instante de tiempo k dentro del intervalo de interés $[0, N]$, es necesario utilizar un multiplicador de Lagrange en cada instante de tiempo: *Cada restricción tiene un multiplicador de Lagrange asociado.*

Para la restricción 5.1

$$\mathbf{x}_{k+1} = f^k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \Rightarrow (f^k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) - \mathbf{x}_{k+1}) = 0 \quad k = 0, \dots, N-1$$

elegimos $\boldsymbol{\lambda}_k \in \mathbb{R}^n$, y adjuntamos la restricción al índice de rendimiento 5.2 para definir un índice de rendimiento aumentado $J'(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ definido por

$$J_a(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \phi(N, \mathbf{x}_N) + \sum_{k=0}^{N-1} \left[L^k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \boldsymbol{\lambda}_k^T (f^k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) - \mathbf{x}_{k+1}) \right] \quad (5.7)$$

Si definimos la *función Hamiltoniana* como

$$H^k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) = L^k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \boldsymbol{\lambda}_k^T f^k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k), \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (5.8)$$

podremos escribir entonces

$$J_a(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \phi(N, \mathbf{x}_N) + \sum_{k=0}^{N-1} \left[H^k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) - \boldsymbol{\lambda}_k^T \mathbf{x}_{k+1} \right]$$

o de otra forma

$$J_a(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \phi(N, \mathbf{x}_N) - \boldsymbol{\lambda}_{N-1}^T \mathbf{x}_N + H^0(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) + \sum_{k=1}^{N-1} \left[H^k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) - \boldsymbol{\lambda}_{k-1}^T \mathbf{x}_k \right] \quad (5.9)$$

Si examinamos el incremento en J_a debido a los incrementos en todas las variables \mathbf{x}_k , $\boldsymbol{\lambda}_k$ y \mathbf{u}_k , y asumimos que N , el tiempo final es fijo. De acuerdo con la teoría de los multiplicadores de Lagrange, en un mínimo con restricciones debe ocurrir $dJ_a = 0$, por tanto

$$\begin{aligned} dJ_a &= \sum_{k=0}^N \frac{dJ_a}{d\mathbf{x}_k} d\mathbf{x}_k + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{dJ_a}{d\mathbf{u}_k} d\mathbf{u}_k + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{dJ_a}{d\boldsymbol{\lambda}_k} d\boldsymbol{\lambda}_k = \\ &= (H_{x_0}^0)^T d\mathbf{x}_0 + \sum_{k=1}^{N-1} (H_{x_k}^k - \boldsymbol{\lambda}_{k-1}^T)^T d\mathbf{x}_k + (\phi_{x_N} - \boldsymbol{\lambda}_{N-1}^T)^T d\mathbf{x}_N + \\ &\quad \sum_{k=0}^{N-1} (H_{u_k}^k)^T d\mathbf{u}_k + \\ &\quad \sum_{k=0}^{N-1} (H_{\lambda_k}^k - \mathbf{x}_{k+1})^T d\boldsymbol{\lambda}_k \end{aligned} \quad (\text{co216})$$

donde

$$H_{x_k}^k = \frac{\partial H^k}{\partial \mathbf{x}_k}; \quad H_{u_k}^k = \frac{\partial H^k}{\partial \mathbf{u}_k}; \quad H_{\lambda_k}^k = \frac{\partial H^k}{\partial \boldsymbol{\lambda}_k}$$

De esta manera las condiciones necesarias para un mínimo con restricciones están dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \frac{\partial H^k}{\partial \boldsymbol{\lambda}_k} \quad k = 0, \dots, N-1 \\ \boldsymbol{\lambda}_{k-1} &= \frac{\partial H^k}{\partial \mathbf{x}_k} \quad k = 1, \dots, N-1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda}_k = \frac{\partial H^{k+1}}{\partial \mathbf{x}_{k+1}}, \quad k = 0, \dots, N-2 \\ 0 &= \frac{\partial H^k}{\partial \mathbf{u}_k} \quad k = 0, \dots, N-1 \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}_N} - \boldsymbol{\lambda}_{N-1} \right)^T d\mathbf{x}_N &= 0 \\ \left(\frac{\partial H^0}{\partial \mathbf{x}_0} \right)^T d\mathbf{x}_0 &= 0 \end{aligned} \quad (5.10)$$

Si utilizamos la relación 5.1, podremos expresar las ecuaciones anteriores en términos de la función f^k

Modelo del sistema:

$$\mathbf{x}_{k+1} = f^k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$$

Índice de rendimiento:

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \phi(N, \mathbf{x}_N) + \sum_{k=0}^{N-1} L^k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$$

Hamiltoniano

$$H^k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) = L^k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \boldsymbol{\lambda}_k^T f^k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \quad k = 0, \dots, N-1$$

Ecuación de Estado

$$\mathbf{x}_{k+1} = \frac{\partial H^k}{\partial \boldsymbol{\lambda}_k} = f^k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \quad k = 0, \dots, N-1$$

Ecuación de Co-estado

$$\boldsymbol{\lambda}_k = \frac{\partial H^{k+1}}{\partial \mathbf{x}_{k+1}} = \frac{\partial L^{k+1}}{\partial \mathbf{x}_{k+1}} + \left(\frac{\partial f^{k+1}}{\partial \mathbf{x}_{k+1}} \right)^T \boldsymbol{\lambda}_{k+1} \quad k = 0, \dots, N-2$$

Condición Estacionaria

$$0 = \frac{\partial H^k}{\partial \mathbf{u}_k} = 0 = \frac{\partial L^k}{\partial \mathbf{u}_k} + \left(\frac{\partial f^k}{\partial \mathbf{u}_k} \right)^T \boldsymbol{\lambda}_k \quad k = 0, \dots, N-1$$

Condiciones de Contorno

$$0 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}_N} - \boldsymbol{\lambda}_{N-1} \right)^T d\mathbf{x}_N$$

$$0 = \left(\frac{\partial H^0}{\partial \mathbf{x}_0} \right)^T d\mathbf{x}_0 = \left(\frac{\partial L^0}{\partial \mathbf{x}_0} + \left(\frac{\partial f^0}{\partial \mathbf{x}_0} \right)^T \boldsymbol{\lambda}_0 \right)^T d\mathbf{x}_0$$

Se hace notar que la ecuación de estado es la propia ecuación del sistema y es una ecuación recursiva hacia adelante en el tiempo. Mientras que la *ecuación de co-estado* es una ecuación recursiva hacia atrás en el tiempo. De este modo los multiplicadores de Lagrange (que son artificiales) son variables determinadas por su propia ecuación dinámica. Como se ha comentado anteriormente se denomina *ecuación de co-estado del sistema* y describe el llamado *sistema adjunto*. Las ecuaciones de estado y co-estado son un sistema de ecuaciones en diferencias acoplado y definen un problema de valor de frontera de dos puntos, puesto que las condiciones de contorno son el *estado inicial* \mathbf{x}_0 y el *co-estado final* $\boldsymbol{\lambda}_{N-1}$. Este tipo de problemas es en general, muy difícil de resolver.

La condición *estacionaria* permite expresar al control óptimo \mathbf{u}_k en términos del co-estado. Los valores de $\boldsymbol{\lambda}_k$ solamente nos interesan como valores intermedios para encontrar los controles óptimos.

Las *condiciones de contorno* son necesarias para poder resolver las ecuaciones recurrentes de estado y co-estado. Podemos distinguir dos posibles casos para cada una de esas ecuaciones: que los estados inicial y final sean fijos o variables.

Si el estado inicial \mathbf{x}_0 es fijo, entonces trivialmente $d\mathbf{x}_0 = 0$, y la ecuación se cumple independientemente del valor de $\frac{\partial H^0}{\partial \mathbf{x}_0}$, y en este caso la condición de contorno se convierte en

$$\mathbf{x}_0 = cte.$$

Si el estado inicial \mathbf{x}_0 es libre, entonces $d\mathbf{x}_0$ no es cero, y por tanto la condición de contorno exige que

$$\frac{\partial H^0}{\partial \mathbf{x}_0} = 0$$

Generalmente el estado inicial del sistema es conocido y por tanto $d\mathbf{x}_0 = 0$, y no habrá ninguna restricción sobre $\frac{\partial H^0}{\partial \mathbf{x}_0} = 0$, por tanto podemos prescindir de esta condición de contorno.

Las mismas dos posibilidades se pueden dar para el estado final \mathbf{x}_N , del sistema: estado final fijo y estado final libre.

Si \mathbf{x}_N es fijo, entonces de nuevo $d\mathbf{x}_N = 0$, y la ecuación de contorno correspondiente se cumple trivialmente. En este caso la condición de contorno que se utiliza para resolver las ecuaciones es

$$\mathbf{x}_N = \mathbf{x}_f$$

En el caso variable, $d\mathbf{x}_N \neq 0$, y por tanto

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}_N} - \boldsymbol{\lambda}_{N-1} \right)^T = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda}_{N-1} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}_N}$$

5.1.3 Ejemplo práctico

Con el fin de aplicar las ecuaciones obtenidas en la sección anterior, plantearemos y resolveremos el siguiente ejemplo: Considremos el sistema dinámico lineal siguiente

$$x_{k+1} = ax_k + bu_k$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$. Supongamos la condición inicial x_0 , y supongamos que se quiere estudiar el comportamiento del sistema en el intervalo $[0, N]$ de forma que se minimice el siguiente índice de energía:

$$J_0 = \frac{r}{2} \sum_{k=0}^{N-1} u_k^2$$

con $r \in \mathbb{R}$.

Estudiaremos dos casos: estado final fijo y libre.

Estado final fijo

En este caso supongamos que el sistema en el instante $k = N$, debe tener el estado r_N , es decir

$$x_N = r_N$$

Para encontrar la sucesión de controles óptimos, u_0^*, \dots, u_{N-1}^* , que conducen el sistema desde el estado inicial x_0 hasta el estado final $x_N = r_N$ y minimizan J_0 , utilizaremos las ecuaciones de la sección anterior.

Calculamos en primer lugar el Hamiltoniano en cada instante, introduciendo las variables de co-estado λ_k

$$H^k = L^k + \lambda_k^T f^k = \frac{r}{2} u_k^2 + \lambda_k (ax_k + bu_k) \quad k = 0, \dots, N-1$$

y utilizando las condiciones correspondientes:

Ecuación de Estado

$$x_{k+1} = \frac{\partial H^k}{\partial \lambda_k} = ax_k + bu_k \quad k = 0, \dots, N-1$$

Ecuación de Co-estado

$$\lambda_k = \frac{\partial H^{k+1}}{\partial x_{k+1}} = a\lambda_{k+1} \quad k = 0, \dots, N-2$$

Condición Estacionaria

$$0 = \frac{\partial H^k}{\partial u_k} = ru_k + b\lambda_k \quad k = 0, \dots, N-1$$

Utilizando la condición estacionaria podemos expresar el control en términos de la variable de co-estado

$$u_k = -\frac{b}{r}\lambda_k \quad k = 0, \dots, N-1$$

de este modo si encontramos el valor del co-estado óptimo λ_k^* podremos calcular el valor del control óptimo u_k^* .
Para encontrar este valor, sustituimos u_k en la ecuación de estado:

$$x_{k+1} = ax_k + bu_k = ax_k - \frac{b^2}{r} \lambda_k$$

y por otra parte resolvemos la ecuación de co-estado que es una ecuación en diferencias homogénea cuya solución en términos de λ_0 es:

$$\lambda_k = a\lambda_{k+1} \Rightarrow \lambda_{k+1} = \frac{1}{a}\lambda_k = \left(\frac{1}{a}\right)^2 \lambda_{k-1} = \dots = \left(\frac{1}{a}\right)^{k+1} \lambda_0 \quad k = 0, \dots, N-2$$

o bien

$$\lambda_k = \left(\frac{1}{a}\right)^k \lambda_0 \quad k = 1, \dots, N-1$$

si sustituimos en la ecuación de estado

$$x_{k+1} = ax_k - \frac{b^2}{r} \left(\frac{1}{a}\right)^k \lambda_0$$

definimos por comodidad el siguiente parámetro

$$\beta = \frac{b^2 \lambda_0}{r}$$

por lo que la ecuación anterior se puede expresar como

$$x_{k+1} = ax_k - \beta a^{-k}$$

que es una ecuación en diferencias no homogénea cuya solución se puede obtener facilmente en términos de x_0

$$\left. \begin{array}{l} x_k = ax_{k-1} - \beta a^{-(k-1)} \\ x_{k-1} = ax_{k-2} - \beta a^{-(k-2)} \end{array} \right\} \Leftrightarrow x_k = a \left(ax_{k-2} - \beta a^{-(k-2)} \right) - \beta a^{-(k-1)} \Leftrightarrow x_k = a^2 x_{k-2} - \beta a^{-k} (a^3 + a)$$

$$x_k = a^2 x_{k-2} - \beta a^{-k+1} (a^2 + a^0)$$

y recursivamente obtenemos

$$x_k = a^k x_0 - \beta a^{-k+1} (a^{2(k-1)} + \dots + a^2 + a^0) =$$

sumando la serie geométrica de razón a^2 que hay entre paréntesis

$$x_k = a^k x_0 - \beta a^{-k+1} \frac{(1 - a^{2k})}{(1 - a^2)} = a^k x_0 - \frac{b^2}{r} \frac{(1 - a^{2k})}{(1 - a^2)} \lambda_0 a^{-k+1}$$

Otra forma de resolver la ecuación recursiva en x_k es utilizar la forma general para ecuaciones en diferencias con coeficientes constantes, es decir, obtendremos la solución general de la ecuación en diferencias sumando la solución de la ecuación homogénea y una solución particular de la ecuación. La ecuación homogénea es

$$x_{k+1} = ax_k \Rightarrow x_{k+1} - ax_k = 0$$

que tiene como polinomio característico

$$P(\lambda) = \lambda - a$$

cuya única raíz es $\lambda = a$, y por tanto la solución general de la homogénea es de la forma

$$x_k^h = C a^k$$

donde C es constante. Para encontrar ahora una solución particular de la ecuación, probamos con soluciones del tipo

$$x_k^p = \gamma a^{-k}$$

y sustituyendo en la ecuación

$$x_{k+1}^p = ax_k^p - \beta a^{-k} \Rightarrow \gamma a^{-(k+1)} = a\gamma a^{-k} - \beta a^{-k}$$

como la expresión debe ser cierta para $k = 0, \dots, N-1$, en particular tomamos $k = 0$

$$\gamma a^{-1} = a\gamma - \beta \Leftrightarrow \gamma = a^2\gamma - a\beta \Leftrightarrow \gamma = \frac{-a\beta}{1-a^2}$$

y la solución particular es

$$x_k^p = \frac{-a\beta}{1-a^2} a^{-k}$$

La solución general de la ecuación es entonces

$$x_k^g = x_k^h + x_k^p = Ca^k - \frac{a\beta}{1-a^2} a^{-k}$$

Para hallar el valor de C en términos de x_0 tomamos $k = 0$

$$x_0 = C - \frac{a\beta}{1-a^2} \Rightarrow C = x_0 + \frac{a\beta}{1-a^2}$$

y la solución es

$$x_k = \left(x_0 + \frac{a\beta}{1-a^2} \right) a^k - \frac{a\beta}{1-a^2} a^{-k} \Rightarrow x_k = x_0 a^k - \frac{a^{-k+1}\beta}{1-a^2} (1-a^{2k})$$

que de nuevo es la solución buscada.

Ahora para encontrar el valor de λ_0 utilizaremos las condiciones de contorno. Puesto que tanto el estado inicial x_0 como el final x_N son fijos, las condiciones de contorno se cumplen de forma trivial, ya que en este caso tendremos $dx_0 = 0$ y $dx_N = 0$. Se utiliza en este caso las condiciones inicial y final

$$x_0 = x_0$$

$$x_N = r_N$$

Utilizando la condición final

$$x_N = a^N x_0 - \frac{b^2}{r} \frac{(1-a^{2N})}{(1-a^2)} a^{-N+1} \lambda_0 \Rightarrow r_N = a^N x_0 - \frac{b^2}{r} \frac{(1-a^{2N})}{(1-a^2)} a^{-N+1} \lambda_0 = a^N x_0 - \gamma \lambda_0$$

donde

$$\gamma = \frac{b^2}{r} \frac{(1-a^{2N})}{(1-a^2)} a^{-N+1}$$

y despejando λ_0

$$\lambda_0 = \frac{(a^N x_0 - r_N)}{\gamma}$$

Podemos ahora calcular los valores para las variables de co-estado en cada instante k

$$\lambda_k = \left(\frac{1}{a} \right)^k \lambda_0 = \frac{(a^N x_0 - r_N)}{\gamma a^k}$$

y el control óptimo

$$u_k^* = -\frac{b}{r} \lambda_k = -\frac{b}{r} \frac{(a^N x_0 - r_N)}{\gamma a^k} = \frac{b(r_N - a^N x_0)}{r\gamma} a^{-k}$$

Calculamos el valor de la trayectoria óptima x_k^*

$$x_k^* = a^k x_0 - \frac{b^2 (1 - a^{2k})}{r (1 - a^2)} \lambda_0 a^{-k+1} = a^k x_0 - \frac{b^2 (a^N x_0 - r_N)}{r \gamma} \frac{(1 - a^{2k})}{(1 - a^2)} a^{-k+1}$$

y sustituyendo γ

$$u_k^* = \frac{(r_N - a^N x_0) (1 - a^2)}{b (1 - a^{2N})} a^{N-1-k}$$

$$x_k^* = a^k x_0 - \frac{(a^N x_0 - r_N) (1 - a^{2k})}{(1 - a^{2N})} a^{N-k}$$

y el valor óptimo del índice de rendimiento J_0^* será

$$J_0^* = \frac{r}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (u_k^*)^2 = \frac{r}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{b (r_N - a^N x_0)}{r \gamma} a^{-k} \right)^2 = \frac{b^2}{2r\gamma^2} (r_N - a^N x_0)^2 \sum_{k=0}^{N-1} a^{-2k} =$$

$$= \frac{b^2}{2r\gamma^2} (r_N - a^N x_0)^2 \left(\frac{1 - a^{-2N}}{1 - a^{-2}} \right) = \frac{b^2}{2r\gamma^2} (r_N - a^N x_0)^2 \left(\frac{1 - a^{2N}}{1 - a^2} \right) a^{-2(N-1)}$$

y teniendo en cuenta el valor de γ

$$J_0^* = \frac{b^2}{2r\gamma^2} (r_N - a^N x_0)^2 \left(\frac{1 - a^{2N}}{1 - a^2} \right) a^{-2(N-1)} = \frac{1}{2\gamma} (r_N - a^N x_0)^2 a^{-(N-1)} = \frac{r}{2b^2} \frac{(1 - a^2)}{(1 - a^{2N})} (r_N - a^N x_0)^2$$

Estado final libre

En esta sección utilizaremos otro método de asegurar que el sistema esté suficientemente cerca del estado final r_N en el instante N . Para ello vamos a suponer que no es necesario que suceda la igualdad entre x_N y r_N , sin embargo, será necesario que no haya una diferencia muy grande entre ellos. Podemos conseguir este objetivo y a la misma vez minimizar la energía utilizada, si incorporamos un término en el índice de rendimiento que represente la diferencia entre x_N y r_N . Un índice que represente esta situación tipo podría ser el siguiente

$$J_1 = \frac{1}{2} (x_N - r_N)^2 + \frac{r}{2} \sum_{k=0}^{N-1} u_k^2$$

de esta forma el objetivo será minimizar la energía (indicada en el sumatorio) a la misma vez que se intenta acercar x_N a r_N lo máximo posible.

En este caso hay función de coste terminal ϕ

$$\phi(N, x_N) = \frac{1}{2} (x_N - r_N)^2$$

sin embargo las funciones f^k y L^k del problema no cambian y por tanto el Hamiltoniano sigue siendo el mismo que para el estado final fijo visto en la sección anterior. De esta forma las ecuaciones de estado, co-estado y estacionarias siguen siendo las mismas:

Ecuación de Estado

$$x_{k+1} = \frac{\partial H^k}{\partial \lambda_k} = ax_k + bu_k \quad k = 0, \dots, N-1$$

Ecuación de Co-estado

$$\lambda_k = \frac{\partial H^{k+1}}{\partial x_{k+1}} = a\lambda_{k+1} \quad k = 0, \dots, N-2$$

Condición Estacionaria

$$0 = \frac{\partial H^k}{\partial u_k} = ru_k + b\lambda_k \quad k = 0, \dots, N-1$$

Las soluciones para el sistema anterior serán pues la mismas que para el caso de tiempo final fijo salvo que ahora cambian las condiciones de contorno. Recordemos que las soluciones de las ecuaciones en diferencias eran:

$$\begin{aligned}x_k &= a^k x_0 - \frac{b^2}{r} \left(\frac{1 - a^{2k}}{1 - a^2} \right) \lambda_0 a^{-k+1} \quad k = 0, \dots, N \\ \lambda_k &= \left(\frac{1}{a} \right)^k \lambda_0 \quad k = 1, \dots, N-1 \\ u_k &= -\frac{b}{r} \left(\frac{1}{a} \right)^k \lambda_0 \quad k = 0, \dots, N-1\end{aligned}$$

En este caso el valor de λ_0 no puede obtenerse a partir de la condición final, puesto que x_N no es conocido. Tendremos que hacer uso de las condiciones de contorno.

Puesto que ahora x_N no es fijo, ocurrirá $dx_N \neq 0$, y por tanto de acuerdo con las ecuaciones generales

$$0 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}_N} - \boldsymbol{\lambda}_{N-1} \right)^T d\mathbf{x}_N \Rightarrow \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_N} - \lambda_{N-1} \right)^T = 0 \Rightarrow \lambda_{N-1} = \frac{\partial \phi}{\partial x_N}$$

y utilizando la expresión de la función ϕ

$$\lambda_{N-1} = x_N - r_N \Rightarrow \left(\frac{1}{a} \right)^{N-1} \lambda_0 = x_N - r_N \Rightarrow \lambda_0 = a^{N-1} (x_N - r_N)$$

y el co-estado final está ahora relacionado con el estado final x_N y el estado deseado r_N .

De la expresión de x_k y haciendo $k = N$, obtenemos

$$x_N = a^N x_0 - \frac{b^2}{r} \left(\frac{1 - a^{2N}}{1 - a^2} \right) \lambda_0 a^{-N+1}$$

y sustituyendo el valor de λ_0 de la ecuación anterior

$$\begin{aligned}x_N &= a^N x_0 - \frac{b^2}{r} \left(\frac{1 - a^{2N}}{1 - a^2} \right) a^{N-1} (x_N - r_N) a^{-N+1} = \\ &= a^N x_0 - \frac{b^2}{r} \left(\frac{1 - a^{2N}}{1 - a^2} \right) (x_N - r_N)\end{aligned}$$

podemos obtener el valor de x_N

$$x_N = \frac{\mu r_N + a^N x_0}{1 + \mu}$$

donde hemos definido μ como

$$\mu = \frac{b^2}{r} \left(\frac{1 - a^{2N}}{1 - a^2} \right)$$

y por tanto

$$\lambda_0 = a^{N-1} (x_N - r_N) = a^{N-1} \left(\frac{\mu r_N + a^N x_0}{1 + \mu} - r_N \right) = \frac{a^N x_0 - r_N}{1 + \mu} a^{N-1}$$

y el co-estado para k es

$$\lambda_k = \left(\frac{1}{a} \right)^k \lambda_0 = a^{N-1-k} \left(\frac{a^N x_0 - r_N}{1 + \mu} \right)$$

y por tanto el control óptimo es

$$u_k^* = -\frac{b}{r} \lambda_k = -\frac{b}{r} \left(\frac{r_N - a^N x_0}{1 + \mu} \right) a^{N-1-k}$$

Para finalizar la trayectoria óptima tendrá la expresión

$$x_k^* = a^k x_0 - \frac{b^2}{r} \left(\frac{1 - a^{2k}}{1 - a^2} \right) \frac{(a^N x_0 - r_N)}{(1 + \mu)} a^{N-k}$$

con estado final

$$x_N^* = \frac{\mu r_N + a^N x_0}{1 + \mu}$$

Notar que si $r \rightarrow 0$, entonces

$$\lim_{r \rightarrow 0} \mu = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{b^2}{r} \left(\frac{1 - a^{2N}}{1 - a^2} \right) = \infty$$

y por tanto

$$\lim_{r \rightarrow 0} x_N^* = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu r_N + a^N x_0}{1 + \mu} = r_N$$

Por último el valor óptimo del índice de rendimiento

$$\begin{aligned} J_1^* &= \frac{1}{2} (x_N^* - r_N)^2 + \frac{r}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (u_k^*)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu r_N + a^N x_0}{1 + \mu} - r_N \right)^2 + \frac{r}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{b}{r} \left(\frac{r_N - a^N x_0}{1 + \mu} \right) a^{N-1-k} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{a^N x_0 - r_N}{1 + \mu} \right)^2 + \frac{r}{2} \frac{b^2}{r^2 (1 + \mu)^2} (r_N - a^N x_0)^2 a^{2(N-1)} \sum_{k=0}^{N-1} a^{-2k} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{a^N x_0 - r_N}{1 + \mu} \right)^2 + \frac{b^2 (r_N - a^N x_0)^2 a^{2(N-1)}}{2r (1 + \mu)^2} \frac{(1 - a^{-2N})}{(1 - a^{-2})} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{a^N x_0 - r_N}{1 + \mu} \right)^2 + \frac{b^2 (r_N - a^N x_0)^2}{2r (1 + \mu)^2} \frac{(1 - a^{2N})}{(1 - a^2)} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{a^N x_0 - r_N}{1 + \mu} \right)^2 + \frac{(r_N - a^N x_0)^2}{2 (1 + \mu)^2} \mu = \\ &= \frac{1}{2(1 + \mu)} (r_N - a^N x_0)^2 \end{aligned}$$

Notar que el coste óptimo para el caso de estado final fijo era

$$J_0^* = \frac{r}{2b^2} \frac{(1 - a^2)}{(1 - a^{2N})} (r_N - a^N x_0)^2 = \frac{1}{2\mu} (r_N - a^N x_0)^2$$