

Capítulo 4

Transformadas de Laplace y Fourier en sistemas LTI

4.1 Respuesta de un sistema LTI en tiempo continuo a exponenciales complejas

Como se ha comprobado en el tema anterior, es muy útil representar las señales como combinación lineal de señales básicas y utilizar la propiedad de superposición de los sistemas LTI. Para que esta representación sea eficiente, sería conveniente que estas señales sean lo más simples posibles y además, que las respuestas del sistema cuando se utilizan estas señales como entradas sean también suficientemente sencillas.

En el tema anterior se ha visto como la representación de una señal en términos de impulsos desplazados y ponderados, nos permitía describir fácilmente los sistemas LTI en términos de su respuesta impulsiva, $h(t)$. En este tema se hará una representación de señales como combinaciones lineales de señales básicas que serán exponenciales complejas. En general es muy ventajoso este procedimiento siempre que las señales utilizadas posean dos propiedades fundamentales:

1. El conjunto de señales básicas se puede utilizar para construir una clase de señales amplia y útil.
2. La respuesta del sistema LTI a cada señal básica debe ser suficientemente simple para proporcionar una representación conveniente de la respuesta.

En tiempo continuo estas propiedades son proporcionadas por las exponenciales complejas de la forma

$$x_s(t) = e^{st}, \quad s \in \mathbb{C}$$

Sea un sistema LTI en tiempo continuo con respuesta impulsiva $h(t)$. Nuestro objetivo es encontrar la relación que existe entre una entrada de la forma $x_s(t)$ y la respuesta, $y_s(t)$, que proporciona un sistema LTI con respuesta impulsiva, $h(t)$.

Como estamos ante un sistema LTI, la respuesta $y_s(t)$ vendrá dada por la convolución entre la entrada $x_s(t)$ y la respuesta impulsiva $h(t)$

$$y_s(t) = x_s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_s(r) h(t-r) dr = \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t-r) h(r) dr$$

teniendo en cuenta la expresión para la entrada $x_s(t) = e^{st}$, tenemos

$$y_s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{s(t-r)} h(r) dr = \int_{-\infty}^{\infty} e^{st} e^{-sr} h(r) dr = e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sr} h(r) dr = H(s) e^{st} = H(s) x_s(t)$$

donde se ha definido

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} h(t) dt$$

integral que solamente depende del valor $s \in \mathbb{C}$.

La utilidad del uso de este tipo de funciones está claro, si una señal $x(t)$ puede ponerse como combinación lineal de exponenciales complejas de la forma

$$x(t) = \sum_{k=1}^n a_k x_{s_k}(t) = \sum_{k=1}^n a_k e^{s_k t}$$

siendo $s_k \in \mathbb{C}$, podremos obtener de forma sencilla la respuesta del sistema sin más que tener en cuenta las propiedades de superposición de los sistemas lineales

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{k=1}^n a_k y_{s_k}(t) = \sum_{k=1}^n a_k H(s_k) x_{s_k}(t) \\ &= \sum_{k=1}^n a_k H(s_k) e^{s_k t} \end{aligned}$$

y el problema se reduce a conocer $H(s)$ para cualquier valor de $s \in \mathbb{C}$.

Hemos comprobado que la respuesta de un sistema LTI para una exponencial compleja, viene dada por el producto de la entrada y una función $H(s)$ que solamente depende de s (y del sistema). La función $H(s)$ recibe el nombre de *valor característico o propio*, mientras que la función exponencial e^{st} es una *función característica o propia* para los sistemas LTI. Conocer $H(s)$ para $s \in \mathbb{C}$, nos permite obtener la respuesta de un sistema a señales que son combinación lineal de exponenciales complejas.

Veremos a continuación que $H(s)$ es la transformada de Laplace de la función $h(t)$.

4.2 Transformada de Laplace

Comenzamos esta sección con la definición de transformada de Laplace de una señal en tiempo continuo.

Definición 4.1 Dada una señal en tiempo continuo, $x(t)$, definimos su transformada de Laplace en $s \in \mathbb{C}$, a la integral

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

siempre que esta integral exista.

La notación empleada para la transformada de Laplace de $x(t)$ puede ser cualquiera de las siguientes

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$$

o

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)](s) = \mathcal{L}[x](s)$$

Observación 4.2 A esta definición de transformada de Laplace se la suele denominar bilateral para distinguirla de la transformada unilateral que utiliza la semirrecta positiva como intervalo de integración y que definiremos en una sección posterior.

Ejemplo 4.3 Vamos a calcular la transformada de Laplace de la señal

$$x_1(t) = e^{-\alpha t} u(t)$$

donde $u(t)$ es el escalón unitario en tiempo continuo y $\alpha \in \mathbb{R}$.

Para calcular $X_1(s)$, utilizamos la definición de transformada de Laplace

$$X_1(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} x_1(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} e^{-\alpha t} u(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-\alpha t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t(\alpha+s)} dt$$

Integrando

$$X_1(s) = -\frac{1}{\alpha+s} e^{-t(\alpha+s)} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{\alpha+s} \left(1 - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t(\alpha+s)} \right)$$

El límite existe siempre que $\operatorname{Re}(\alpha+s) > 0$ y en ese caso su valor es cero:

$$X_1(s) = \frac{1}{\alpha+s} \quad \operatorname{Re}(s) > -\alpha$$

Por tanto la transformada de Laplace estará definida para los valores de $s \in \mathbb{C}$, que cumplan

$$\operatorname{Re}(s) > -\alpha$$

En el siguiente ejemplo se comprueba la importancia que tiene indicar el dominio donde está definida la transformada de Laplace.

Ejemplo 4.4 Calcularemos la transformada de Laplace de la señal

$$x_2(t) = -e^{-\alpha t} u(-t)$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Para ello utilizamos la definición de transformada de Laplace

$$X_2(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} x_2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} (-e^{-\alpha t} u(-t)) dt = - \int_{-\infty}^0 e^{-st} e^{-\alpha t} dt = \int_{-\infty}^0 -e^{-t(\alpha+s)} dt$$

Integrando

$$X_2(s) = \frac{1}{\alpha+s} e^{-t(\alpha+s)} \Big|_{t=-\infty}^{t=0} = \frac{1}{\alpha+s} \left(1 - \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-t(\alpha+s)} \right)$$

El límite existe siempre que $\operatorname{Re}(\alpha+s) < 0$ y en ese caso su valor es cero:

$$X_2(s) = \frac{1}{\alpha+s} \quad \operatorname{Re}(s) < -\alpha$$

La transformada de Laplace estará definida para los valores de $s \in \mathbb{C}$, que cumplan

$$\operatorname{Re}(s) < -\alpha$$

Como se puede comprobar la expresión analítica para la transformada de Laplace es la misma en ambos ejemplos, sin embargo, el dominio donde está definida esta función es diferente para cada caso, lo que demuestra la importancia de indicar junto con la expresión analítica de la transformada el dominio donde está definida.

Definición 4.5 Se define la región de convergencia (ROC) de la transformada de Laplace de una señal $x(t)$ en tiempo continuo al conjunto de números complejos para los que la integral es convergente. Como $x(t)$ está definida en tiempo t , se dice que $x(t)$ está definida en el dominio temporal, mientras que $X(s)$ está definida en el plano s .

Ejemplo 4.6 Calcularemos la transformada de Laplace de la función

$$x(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

Como veremos posteriormente la transformada de Laplace cumple la propiedad de linealidad, por lo que la transformada de Laplace de una combinación lineal de señales es la combinación lineal de transformadas de Laplace, es decir:

$$X(s) = X_1(s) + X_2(s)$$

y teniendo en cuenta los ejemplos anteriores

$$X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

La ROC de $X(s)$ son los valores de s para los que se puede calcular la transformada de Laplace, en este caso como podemos calcular $X(s)$ siempre que podamos calcular $X_1(s)$ y $X_2(s)$, es decir, s esté en la ROC de $X_1(s)$ y en la ROC de $X_2(s)$, luego debe estar en la intersección de ambas:

$$ROC X_1(s) = \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > -1\}$$

$$ROC X_2(s) = \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > -2\}$$

luego

$$\begin{aligned} ROC X(s) &= \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > -1\} \cap \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > -2\} \\ &= \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > -1\} \end{aligned}$$

Las siguientes son un conjunto de proposiciones relacionadas con la región de convergencia (ROC) de la transformada de Laplace de una señal $x(t)$ en tiempo continuo.

Proposición 4.7 La ROC de $X(s)$ son bandas paralelas al eje imaginario en el plano s .

Proposición 4.8 Si la transformada de Laplace de una señal es una función racional, entonces la ROC no contiene ningún polo.

Proposición 4.9 Si $x(t)$ es de duración finita y existe un $s_0 \in \mathbb{C}$, para el cual existe la transformada de Laplace, entonces la ROC de $X(s)$ es todo el plano complejo \mathbb{C} .

Proposición 4.10 Sea una señal $x(t)$ una señal en tiempo continuo con la propiedad

$$x(t) = 0, \forall t < T_1$$

(se dice que $x(t)$ con esta propiedad es derecha). Si $X(s)$ es su transformada de Laplace con R como ROC y existe $s_0 \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}(s_0) + it \in R \forall t \in \mathbb{R}$, entonces

$$\forall s : \text{Re}(s) > \text{Re}(s_0) \Rightarrow s \in R.$$

Proposición 4.11 Sea una señal $x(t)$ una señal en tiempo continuo con la propiedad

$$x(t) = 0, \forall t > T_1$$

(se dice que $x(t)$ con esta propiedad es izquierda). Si $X(s)$ es su transformada de Laplace con R como ROC y existe $s_0 \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}(s_0) + it \in R \forall t \in \mathbb{R}$, entonces

$$\forall s : \text{Re}(s) < \text{Re}(s_0) \Rightarrow s \in R.$$

4.3 Propiedades de la transformada de Laplace

Para las siguientes propiedades de la transformada de Laplace se supone su existencia para cada señal utilizada dentro de su ROC y también se supone cualquier condición de convergencia. Si $x(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$ son señales en tiempo continuo, entonces $X(s)$, $X_1(s)$ y $X_2(s)$ son sus transformadas de Laplace respectivas.

4.3.1 Linealidad

La transformada de Laplace es lineal: Si $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son dos funciones en tiempo continuo, entonces: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\left. \begin{array}{l} x_1(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s) \quad \text{ROC} = R_1 \\ x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X_2(s) \quad \text{ROC} = R_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \alpha X_1(s) + \beta X_2(s) \quad \text{ROC} \supseteq R_1 \cap R_2$$

La demostración de esta propiedad es trivial aplicando la definición, ya que la integral es lineal.

4.3.2 Desplazamiento en el tiempo

Para $x(t)$ señal en tiempo continuo y $t_0 \in \mathbb{R}$, se cumple:

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) \quad \text{ROC} = R \Rightarrow x(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-st_0} X(s) \quad \text{ROC} = R$$

La demostración de esta propiedad se efectúa utilizando la definición de transformada de Laplace aplicada a $x(t - t_0)$ directamente y haciendo un cambio de variable bajo el signo de la integral.

4.3.3 Cambio de escala temporal

Para $x(t)$ señal en tiempo continuo y $a \in \mathbb{R}$, se cumple:

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) \quad \text{ROC} = R \Rightarrow x(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right) \quad \text{ROC} = R/a$$

La demostración de esta propiedad se consigue aplicando la definición y posteriormente un cambio de variable en el que hay que distinguir entre valores de $a > 0$ y valores $a < 0$.

4.3.4 Convolución

Para $x_1(t)$ y $x_2(t)$ señales en tiempo continuo, se cumple:

$$\left. \begin{array}{l} x_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s) \quad \text{ROC} = R_1 \\ x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_2(s) \quad \text{ROC} = R_2 \end{array} \right\} \Rightarrow x_1(t) * x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s) \cdot X_2(s) \quad \text{ROC} \supseteq R_1 \cap R_2$$

La región de convergencia contiene a la intersección de las dos regiones pero puede ser un conjunto mayor; por ejemplo, si $X_1(s) = \frac{s+1}{s+2}$ con ROC el conjunto $\{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) > -2\}$ y $X_2(s) = \frac{s+2}{s+1}$ con ROC el conjunto $\{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) > -1\}$, el producto $X_1(s) X_2(s) = 1$ está definido para cualquier valor de s .

En este caso la demostración es más complicada, pero se obtiene sencillamente aplicando el teorema de Fubini de intercambio de integrales.

4.3.5 Diferenciación respecto al tiempo

Para $x(t)$ señal en tiempo continuo derivable, se cumple:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s) \quad \text{ROC} = R \Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} sX(s) \quad \text{ROC} = R' \supseteq R$$

La demostración se obtiene aplicando la definición de transformada de Laplace sobre $x'(t)$ e integración por partes.

4.3.6 Diferenciación en el plano s

Para $x(t)$ señal en tiempo continuo derivable, se cumple:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s) \quad \text{ROC} = R \Rightarrow -tx(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{dX(s)}{ds} \quad \text{ROC} = R$$

La demostración se obtiene diferenciando bajo la integral directamente en la definición de transformada de Laplace.

4.3.7 Integración en el dominio temporal

Para $x(t)$ señal en tiempo continuo integrable, se cumple:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s) \quad \text{ROC} = R \Rightarrow g(t) = \int_{-\infty}^t x(r) dr \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} X(s) \quad \text{ROC} = R' \supseteq R \cap \{\text{Re}(s) > 0\}$$

La demostración se obtiene aplicando la definición de transformada de Laplace a $g(t)$ e integración por partes.

4.4 Transformada de Laplace unilateral

Generalmente para sistemas causales, como los descritos por ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes junto con la condición de reposo inicial, es más importante o más útil utilizar la llamada: *Transformada de Laplace unilateral*, que se obtiene integrando solamente sobre el eje

real positivo, es decir, si $x(t)$ es una señal en tiempo continuo, se define la transformada de Laplace unilateral de $x(t)$ y se denota por $\mathcal{X}(s)$, a

$$\mathcal{X}(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

Ejemplo 4.12 *Calcula la transformada de Laplace unilateral de*

$$x_n(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha t} u(t)$$

En este caso como $x_n(t) = 0$ para $t < 0$, las transformadas bilateral y unilateral coinciden. Calculamos dicha transformada de forma recursiva.

$$\mathcal{X}_n(s) = \int_0^{\infty} x_n(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha t} u(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t(\alpha+s)} dt$$

integrando por parte con

$$u = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \Rightarrow du = \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} dt$$

$$dv = e^{-t(\alpha+s)} dt \Rightarrow v = -\frac{1}{\alpha+s} e^{-t(\alpha+s)}$$

obtendremos

$$\mathcal{X}_n(s) = -\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \frac{1}{\alpha+s} e^{-t(\alpha+s)} \Big|_{t=0}^{t=\infty} + \frac{1}{\alpha+s} \int_0^{\infty} \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} e^{-t(\alpha+s)} dt$$

o equivalentemente

$$\mathcal{X}_n(s) = -\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \frac{1}{\alpha+s} e^{-t(\alpha+s)} \Big|_{t=0}^{t=\infty} + \frac{1}{\alpha+s} \mathcal{X}_{n-1}(s)$$

Por otra parte si $n > 1$

$$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \frac{1}{\alpha+s} e^{-t(\alpha+s)} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \frac{1}{\alpha+s} e^{-t(\alpha+s)}$$

que existe solamente cuando $\text{Re}(s) > -\alpha$ y en ese caso vale 0, por tanto la ecuación recursiva queda como

$$\mathcal{X}_n(s) = \frac{1}{\alpha+s} \mathcal{X}_{n-1}(s)$$

y de esta forma

$$\mathcal{X}_n(s) = \left(\frac{1}{\alpha+s} \right)^{n-1} \mathcal{X}_1(s)$$

quedando solamente por calcular el término $\mathcal{X}_1(s)$

$$\mathcal{X}_1(s) = \int_0^{\infty} \frac{t^{1-1}}{(1-1)!} e^{-t(\alpha+s)} dt = \int_0^{\infty} e^{-t(\alpha+s)} dt = \frac{1}{\alpha+s}$$

siempre que $\text{Re}(s) > -\alpha$. Sustituyendo obtenemos la transformada de $x_n(t)$

$$\mathcal{X}_n(s) = \frac{1}{(\alpha+s)^n}$$

Ejemplo 4.13 *Calcula las transformada de Laplace bilateral y unilateral de la función*

$$x(t) = e^{-\alpha(t+1)}u(t+1)$$

Utilizando la propiedad de desplazamiento en el espacio de la transformada bilateral:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s) \quad \text{ROC} = R \Rightarrow x(t-t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} e^{-st_0} X(s) \quad \text{ROC} = R$$

y teniendo en cuenta que para

$$x_1(t) = e^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s) = \frac{1}{\alpha + s}$$

entonces como $x(t) = x_1(t+1)$, tendremos

$$X(s) = \frac{e^{-s}}{\alpha + s}$$

Para calcular la transformada unilateral aplicamos su definición

$$\mathcal{X}(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-\alpha(t+1)}u(t+1) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-\alpha(t+1)} e^{-st} dt = e^{-\alpha} \int_0^{\infty} e^{-t(\alpha+s)} dt$$

e integrando

$$\mathcal{X}(s) = \frac{e^{-\alpha}}{\alpha + s}$$

que como puede observarse es distinta a la transformada bilateral.

La mayor parte de las propiedades de la transformada unilateral son las mismas que las de la transformada bilateral.

Una diferencia importante radica en la propiedad de la transformada de Laplace unilateral respecto a la diferenciación en el dominio temporal. Si $x(t)$ tiene por transformada unilateral a $\mathcal{X}(s)$, entonces si $x(t)$ es derivable, podemos intentar calcular la transformada de Laplace unilateral de $x'(t)$. Aplicando la definición a $x'(t)$, e integrando por partes

$$\int_0^{\infty} x'(t) e^{-st} dt = x(t) e^{-st} \Big|_{t=0}^{t=\infty} + s \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt = x(0) + s\mathcal{X}(s)$$

siendo

$$x(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} x(t)$$

y de forma similar para las siguientes derivadas.

En este caso es necesario conocer el valor de $x(t)$ en el instante inicial.

4.5 La transformada inversa de Laplace

Una vez transformada una señal $x(t)$ y obtenida su transformada de Laplace (bilateral) podemos regresar al dominio temporal mediante la transformada inversa. La fórmula de inversión para la transformada de Laplace bilateral es:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + i\omega) e^{(\sigma + i\omega)t} d\omega$$

siendo $s = \sigma + i\omega$, o mediante un cambio

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} X(s) e^{st} ds$$

Integral que se calcula mediante integración sobre contornos o mediante el teorema de los residuos, aunque en nuestro caso utilizaremos la transformada de Laplace de funciones racionales.

4.6 Aplicaciones de la transformada de Laplace a sistemas LTI

Debido al comportamiento de la transformada de Laplace con la convolución, podemos determinar las respuestas de un sistema LTI, en términos de transformadas.

Sabemos que para un sistema LTI

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

siendo $h(t)$ la respuesta impulsiva del sistema, $x(t)$ la entrada del sistema y $y(t)$ la respuesta del mismo. Si utilizamos la propiedad de la convolución para la transformada de Laplace

$$Y(s) = X(s) H(s)$$

siendo $H(s)$ la llamada *función de transferencia* del sistema.

Muchas de las propiedades de los sistemas LTI están asociadas a $H(s)$. Por ejemplo si un sistema LTI es causal entonces sabemos que $h(t) = 0 \forall t < 0$ y la función de transferencia estará definida solamente a la derecha.

Según la proposición 4 relativa a la región de convergencia; la ROC asociada a la función de transferencia de un sistema causal con función de transferencia racional, será todo el plano s situado a la derecha del polo que esté más a la derecha.

Si el sistema es anticausal ($h(t) = 0 \forall t > 0$), entonces la ROC para $H(s)$, racional, es la parte de la izquierda del plano s , que está más a la izquierda del polo que esté más a la izquierda (con la parte real más negativa).

El inverso de estas propiedades no es cierto, es decir, una ROC que esté situada a la derecha del polo más a la derecha no garantiza que el sistema sea causal, sólo que $h(t)$ está a la derecha.

La ROC también puede estar relacionada con la estabilidad del sistema. Para que un sistema sea estable la ROC de su función de transferencia debe contener al eje imaginario.

La relación de la ROC con la causalidad y la estabilidad conducen a la conclusión de que un sistema LTI causal y estable con función de transferencia racional tiene todos los polos en el semiplano s con $s < 0$

Ejemplo 4.14 Sea un sistema con respuesta impulsiva $h(t) = e^{-t}u(t)$. La función de transferencia asociada es

$$H(s) = \frac{1}{s+1} \quad ROC = Re(s) > -1$$

la región de convergencia contiene al eje imaginario, luego el sistema es estable; y es derecha luego el sistema es causal.

Ejemplo 4.15 Sea

$$H(s) = \frac{e^{st}}{s+1} \quad ROC = Re(s) > -1$$

En este caso la ROC está a la derecha del polo más a la derecha, por tanto $h(t)$ debe ser una función derecha, es decir $h(t) = 0$, para $t < T_1$.

Si recordamos ahora la propiedad de desplazamiento temporal. Veremos que la función $h(t)$ cuya transformada de Laplace es $H(s)$ con su correspondiente ROC es

$$h(t) = e^{-(t+1)}u(t+1)$$

que no es causal puesto que $h(t) \neq 0$ para $-1 \leq t < 0$.

Ejemplo 4.16 Sea la EDO

$$y'(t) + 3y(t) = x(t)$$

si aplicamos la transformada de Laplace a la ecuación

$$sY(s) + 3Y(s) = X(s) \Leftrightarrow Y(s)(s+3) = X(s)$$

y por tanto

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s+3}$$

luego este método proporciona la expresión de $H(s)$, sin embargo, no se obtiene su ROC. Para poder especificar el sistema completamente hay que conocer alguna de sus propiedades, por ejemplo, si el sistema es causal, entonces

$$ROC \subseteq \{Re(s) > -3\}$$

mientras que si es anti-causal

$$ROC \subseteq \{Re(s) < -3\}$$

En el primer caso

$$h(t) = e^{-3t}u(t)$$

mientras que en el segundo

$$h(t) = -e^{-3t}u(-t)$$

De forma general a partir de una ecuación diferencial ordinaria lineal con coeficientes constantes del tipo

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{j=0}^M b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j}$$

y aplicando la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación

$$\sum_{k=0}^N a_k s^k Y(s) = \sum_{j=0}^M b_j s^j X(s)$$

y de este modo

$$H(s) = \frac{\sum_{j=0}^M b_j s^j}{\sum_{k=0}^N a_k s^k}$$

pero no tenemos información de su ROC, solamente a través de las propiedades del sistema.

Ejemplo 4.17 Sea el sistema

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = x(t)$$

junto con las condiciones iniciales

$$y(0) = 3$$

$$y'(0) = 5$$

y sea $x(t) = 2u(t)$. Calcula utilizando la transformada de Laplace la respuesta del sistema.

En este caso es más útil aplicar la transformada de Laplace unilateral. Por una parte tenemos que

$$X(s) = \frac{1}{s}2$$

y aplicando la Transformada de Laplace unilateral a la ecuación

$$\{s^2\mathcal{Y}(s) - sy(0) - y'(0)\} + 3\{s\mathcal{Y}(s) - y(0)\} + 2s\mathcal{Y}(s) = 2\frac{1}{s}$$

Agrupando

$$\mathcal{Y}(s)\{s^2 + 3s + 2\} = \frac{2}{s} + 3s + 4 = \frac{3s^2 + 4s + 2}{s}$$

y despejando $\mathcal{Y}(s)$

$$\mathcal{Y}(s) = \frac{3s^2 + 4s + 2}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{3}{s+2}$$

donde hemos descompuesto en fracciones simples.

Sabiendo que

$$x(t) = e^{-\alpha t}u(t) \leftrightarrow \mathcal{X}(s) = \frac{1}{\alpha + s}$$

entonces

$$y(t) = e^{-0t}u(t) - e^{-1t}u(t) + 3e^{-2t}u(t) = [1 - e^{-t} + 3e^{-2t}]u(t)$$

4.7 Análisis de Fourier en tiempo continuo

Un caso particular de las funciones exponenciales complejas, que como se ha comprobado son funciones características de los sistemas LTI son las funciones exponenciales de la forma

$$x(t) = e^{i\omega_0 t} \quad \omega_0 \in \mathbb{R}$$

que tienen una gran importancia en el estudio de las señales periódicas en tiempo continuo.

4.7.1 Representación de señales periódicas: series de Fourier en tiempo continuo

Recordemos aquí que una señal periódica en tiempo continuo $x(t)$ viene caracterizada por la existencia de un número real positivo $T \neq 0$ de forma que se cumple la propiedad

$$x(t) = x(t + T) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

siendo T_0 el periodo fundamental el menor de estos valores y

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

su frecuencia fundamental.

También se definió la familia de funciones uniparamétricas

$$\phi_k(t) = e^{ik\omega_0 t} \quad k \in \mathbb{Z}$$

relacionadas armónicamente y con periodo común $T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$. Una combinación lineal de exponenciales de este tipo de la forma

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\omega_0 t}$$

que también será periódica de periodo T_0 .

El término $k = 0$ es un término constante. Los términos $k = 1$ y $k = -1$ tienen periodo fundamental T_0 y se conocen como componentes fundamentales del primer armónico. En general los términos k y $-k$ tienen el mismo periodo fundamental T_0/k y se denominan componentes del k -ésimo armónico. La representación anterior se denomina representación en series de Fourier de una señal periódica.

Con esta representación para $x(t)$, la salida de un sistema LTI para esta entrada será

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\omega_0 t} H(ik\omega_0)$$

siendo

$$H(ik\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(s) e^{-ik\omega_0 s} ds$$

de esta forma los coeficientes a_k de la señal $x(t)$ se transforman en $a_k H(ik\omega_0)$ para $y(t)$.

Ejemplo 4.18 Sea

$$x(t) = \sum_{k=-3}^3 a_k e^{ik2\pi t}$$

con

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4}$$

$$a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3}$$

entonces, para un sistema LTI cuya respuesta impulsiva es:

$$h(t) = e^{-t} u(t)$$

la respuesta $y(t)$ que da el sistema para la entrada $x(t)$ es

$$y(t) = \sum_{k=-3}^3 a_k e^{ik2\pi t} H(ik2\pi)$$

siendo

$$\begin{aligned} H(i2\pi k) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s} u(s) e^{-ik2\pi s} ds = \int_0^{\infty} e^{-s} e^{-ik2\pi s} ds = \int_0^{\infty} e^{-s(1+2\pi ki)} ds = \\ &= -\frac{1}{1+2\pi ki} e^{-s(1+2\pi ki)} \Big|_{s=0}^{s=\infty} = \frac{1}{1+2\pi ki} \end{aligned}$$

siendo entonces el valor de $y(t)$

$$y(t) = \sum_{k=-3}^3 \frac{a_k}{1+2\pi ki} e^{ik2\pi t}$$

Señales reales y series de Fourier

Si $x(t)$ es una señal real entonces coincide con su conjugada

$$\overline{x(t)} = x(t)$$

y por tanto

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\omega_0 t} \Rightarrow \overline{x(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{a_k e^{ik\omega_0 t}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{a_k} e^{-ik\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{a_k} e^{-ik\omega_0 t}$$

Cambiando k por $-k$

$$\overline{x(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{a_{-k}} e^{ik\omega_0 t} \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\omega_0 t} = x(t)$$

y de ahí

$$a_k = \overline{a_{-k}} \Leftrightarrow \overline{a_k} = a_{-k}$$

Es posible expresar $x(t)$ como

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k e^{ik\omega_0 t} + a_{-k} e^{-ik\omega_0 t}) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k e^{ik\omega_0 t} + \overline{a_k} e^{-ik\omega_0 t}) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} (a_k e^{ik\omega_0 t}) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A \cos(\omega_0 t + \theta_k) \quad a_k = A_k e^{i\theta_k} \end{aligned}$$

4.7.2 Determinación de la representación en serie de Fourier de una señal periódica

Suponiendo que una señal periódica $x(t)$ puede ponerse como representación en series de Fourier, habrá que calcular los coeficientes a_k de la misma. Supongamos que $x(t)$ es una señal periódica que admite esta representación, es decir

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\omega_0 t}$$

siendo ω_0 la frecuencia fundamental.

Si ahora multiplicamos a ambos lados de la igualdad por $e^{-in\omega_0 t}$, obtenemos

$$x(t) e^{-in\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\omega_0 t} e^{-in\omega_0 t}$$

y si ahora integramos ambos miembros sobre un periodo completo, por ejemplo entre 0 y T_0 , obtenemos

$$\int_0^{T_0} x(t) e^{-in\omega_0 t} dt = \int_0^{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\omega_0 t} e^{-in\omega_0 t} dt$$

Bajo ciertas hipótesis de convergencia podemos suponer que se pueda hacer el cambio entre el sumatorio y la integral

$$\int_0^{T_0} x(t) e^{-in\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{T_0} a_k e^{ik\omega_0 t} e^{-in\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_0^{T_0} e^{i(k-n)\omega_0 t} dt$$

y para calcular las integrales dentro del sumatorio distinguimos dos casos:

1. Caso $k = n$

$$\int_0^{T_0} e^{i(k-n)\omega_0 t} dt = \int_0^{T_0} 1 dt = T_0$$

2. Caso $k \neq n$

$$\int_0^{T_0} e^{i(k-n)\omega_0 t} dt = \frac{1}{i\omega_0 (k-n)} e^{i\omega_0 t(k-n)} \Big|_{t=0}^{t=T_0}$$

pero $e^{i\omega_0 t(k-n)}$ es periódica de periodo $T_0 \Rightarrow e^{i\omega_0 0(k-n)} = e^{i\omega_0 T_0(k-n)} \Rightarrow$ La integral se anula.

Es decir, solamente hay un término no nulo en el sumatorio de la parte derecha de la expresión

$$\int_0^{T_0} x(t) e^{-in\omega_0 t} dt = a_n T_0$$

y despejando

$$a_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-in\omega_0 t} dt$$

En general y debido a la periodicidad de $x(t)$ los coeficientes a_k se podrían obtener integrando sobre cualquier intervalo de longitud T_0 y lo expresamos como:

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} x(t) e^{-ik\omega_0 t} dt$$

Esta ecuación se denomina de *análisis*, mientras que la expresión

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\omega_0 t}$$

es la ecuación de *síntesis*, ya que reconstruye la señal $x(t)$ a partir de los coeficientes a_k . Estos coeficientes reciben el nombre de *coeficientes de Fourier* o *coeficientes espectrales*.

Ejemplo 4.19 *Calcula los coeficientes de Fourier de la siguiente señal*

$$x(t) = \text{sen}(\omega_0 t)$$

Solución: Para encontrar los coeficientes espectrales sería suficiente con aplicar la ecuación de análisis, pero en este caso es más sencillo utilizar la fórmula de Euler, para obtener

$$x(t) = \text{sen}(\omega_0 t) = \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i} = \frac{1}{2i}e^{i\omega_0 t} - \frac{1}{2i}e^{-i\omega_0 t}$$

de esta forma

$$a_1 = \frac{1}{2i}$$

$$a_{-1} = -\frac{1}{2i}$$

$$a_k = 0 \quad \forall k \neq 1, -1$$

Ejemplo 4.20 *Calcula los coeficientes de Fourier de la siguiente señal*

$$x(t) = 1 + \sin(\omega_0 t) + 2 \cos(\omega_0 t) + \cos\left(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Solución: Podemos utilizar de nuevo la ecuación de Euler para expresar la señal como

$$x(t) = 1 + \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i} + 2 \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} + \frac{e^{i(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4})} - e^{-i(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4})}}{2i}$$

y reagrupando

$$x(t) = 1 + \left(1 + \frac{1}{2i}\right)e^{i\omega_0 t} + \left(1 - \frac{1}{2i}\right)e^{-i\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{i\pi/4}e^{i2\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-i\pi/4}e^{-i2\omega_0 t}$$

y tendremos

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = \left(1 + \frac{1}{2i}\right)$$

$$a_{-1} = \left(1 - \frac{1}{2i}\right)$$

$$a_2 = \frac{1}{2}e^{i\pi/4}$$

$$a_{-2} = \frac{1}{2}e^{-i\pi/4}$$

$$a_k = 0 \quad \forall |k| > 2$$

Ejemplo 4.21 *Calcula los coeficientes de Fourier de la siguiente señal*

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < \frac{T_0}{2} \end{cases}$$

definida sobre un periodo $[-T_0/2, T_0/2]$

Solución: En la figura 4.1 vemos una representación gráfica de esta señal.

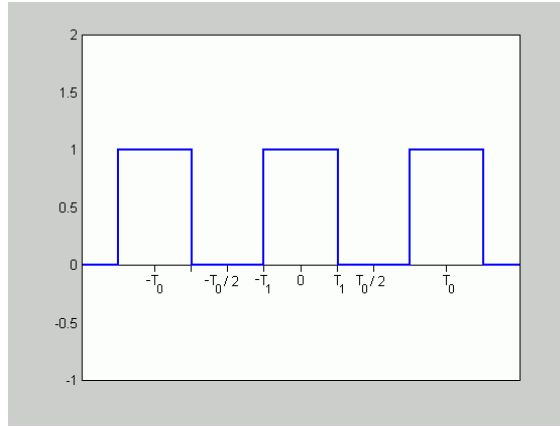


Figura 4.1: Función periódica del ejemplo 4.21

Si utilizamos la ecuación de análisis para calcular los coeficientes de la serie de Fourier:

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-ik\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_1}^{T_1} x(t) e^{-ik\omega_0 t} dt$$

en este caso

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Calculamos en primer lugar el caso $k = 0$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_1}^{T_1} 1 dt = \frac{2T_1}{T_0}$$

y ahora el caso $k \neq 0$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_1}^{T_1} e^{-ik\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \left(-\frac{1}{ik\omega_0} e^{-ik\omega_0 t} \right) \Big|_{t=-T_1}^{t=T_1} = -\frac{1}{ikT_0\omega_0} (e^{-ik\omega_0 T_1} - e^{ik\omega_0 T_1}) \\ &= \frac{1}{ikT_0\omega_0} (e^{ik\omega_0 T_1} - e^{-ik\omega_0 T_1}) = \frac{2}{ikT_0\omega_0} \frac{(e^{ik\omega_0 T_1} - e^{-ik\omega_0 T_1})}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{kT_0\omega_0} \frac{(e^{ik\omega_0 T_1} - e^{-ik\omega_0 T_1})}{2i} = \frac{2}{kT_0\omega_0} \sin(k\omega_0 T_1) \\
&= \frac{2}{k2\pi} \sin(k\omega_0 T_1) = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}
\end{aligned}$$

4.7.3 Aproximación de señales periódicas usando series de Fourier

Si consideramos la serie de Fourier de una señal periódica truncada hasta el término N -ésimo, es decir

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{ik\omega_0 t}$$

podemos definir el error de aproximación como

$$e_N(t) = x(t) - x_N(t) = x(t) - \sum_{k=-N}^N a_k e^{ik\omega_0 t}$$

y podemos definir el error cuadrático

$$E_N = \int_{[T_0]} |e_N(t)|^2 dt = \int_{[T_0]} e_N(t) \overline{e_N(t)} dt$$

como una medida cuantitativa del error producido por este truncamiento, notar que es la energía de $e_N(t)$.

La elección de los coeficientes de la forma

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} x(t) e^{-ik\omega_0 t} dt$$

minimiza este error, es decir, si tenemos una señal definida como

$$\hat{x}_N(t) = \sum_{k=-N}^N b_k e^{ik\omega_0 t}$$

entonces

$$\|x(t) - x_N(t)\| \leq \|x(t) - \hat{x}_N(t)\|$$

para cualquier valor de N .

Los criterios que se deben cumplir para que una señal periódica tenga representación en series de Fourier son las llamadas condiciones de Dirichlet.

Condición 1 de Dirichlet: La señal $x(t)$ debe ser absolutamente integrable sobre cualquier periodo, es decir

$$\int_{[T_0]} |x(t)| dt < \infty$$

Esta propiedad garantiza que los coeficientes a_k sean finitos

$$|a_k| = \left| \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} x(t) e^{-ik\omega_0 t} dt \right| \leq \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} |x(t) e^{-ik\omega_0 t}| dt = \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} |x(t)| dt < \infty$$

La señal definida en la figura 4.2 no cumple esta condición y no tendría representación en serie de Fourier

$$x(t) = \frac{1}{t-k} \quad k < t \leq k+1$$

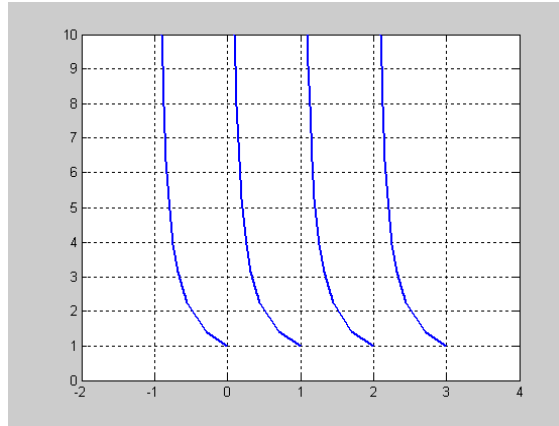


Figura 4.2: Violación de la condición 1 de Dirichlet.

Condición 2 de Dirichlet: La variación de $x(t)$ en cualquier instante finito de tiempo está acotada, i.e., hay un número finito de máximos y mínimos en cada periodo. Por ejemplo la señal

$$x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t-k}\right) \quad k < t \leq k+1$$

dada en la figura 4.3 no tiene representación en series de Fourier, aunque cumpla la primera condición de Dirichlet, ya que

$$\int_0^1 \left| \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right) \right| dt \leq \int_0^1 1 dt = 1$$

sin embargo, tiene un número infinito de mínimos y máximos dentro de cada periodo.

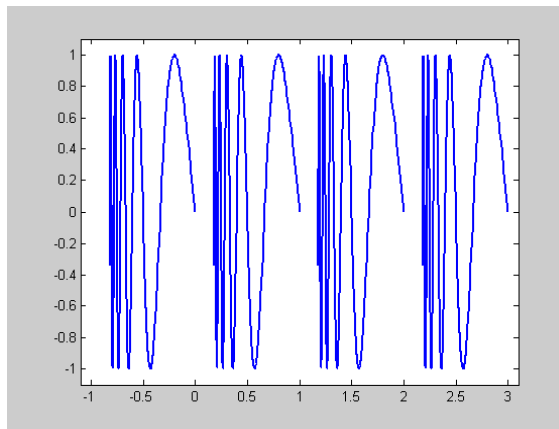


Figura 4.3: Violación de la condición 2 de Dirichlet.

Condición 3 de Dirichlet.- En cualquier intervalo finito hay un número finito de discontinuidades y todas son de salto finito. Por ejemplo la señal

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & t \in [a_n, b_n] = \left[4 - \frac{8}{2^{n+1}}, 4 + \frac{8}{2^{n+1}}\right] \end{cases} \quad n = 0, \dots$$

representada en la figura 4.4

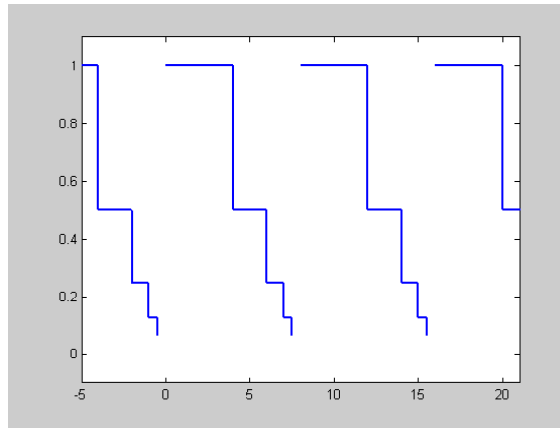


Figura 4.4: Violación de la condición 3 de Dirichlet.

Las señales que no cumplen las condiciones de Dirichlet son en general funciones “patológicas” y no serán importantes en el estudio de señales y sistemas.

Por otra parte la identificación de $x(t)$ con su serie de Fourier, no es una identificación punto a punto, sino que la energía que hay en la diferencia de ambas señales tiende a 0, es decir

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E_N(t) = 0$$

4.7.4 Representación de señales no periódicas: transformada de Fourier en tiempo continuo

Sea una señal $x(t)$ de soporte compacto (o de duración finita), es decir

$$x(t) = 0 \quad \forall t \notin [-T_1, T_1]$$

como la de la figura 4.5

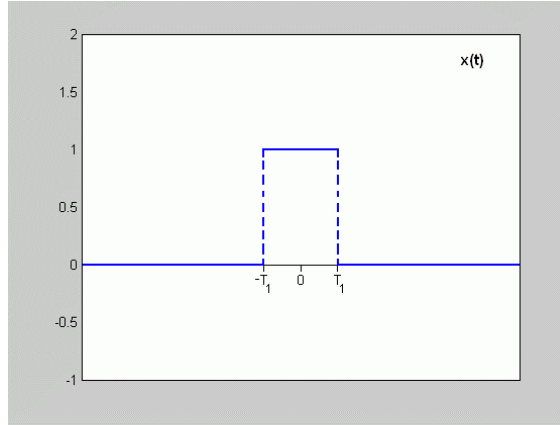


Figura 4.5: Señal en tiempo continuo de soporte compacto.

y consideremos la señal periódica

$$\tilde{x}(t) = x(t - nT_0) \quad t \in \left[\left(n - \frac{1}{2}\right)T_0, \left(n + \frac{1}{2}\right)T_0 \right]$$

que como puede apreciarse en la figura 4.6 es una extensión periódica de la señal $x(t)$.

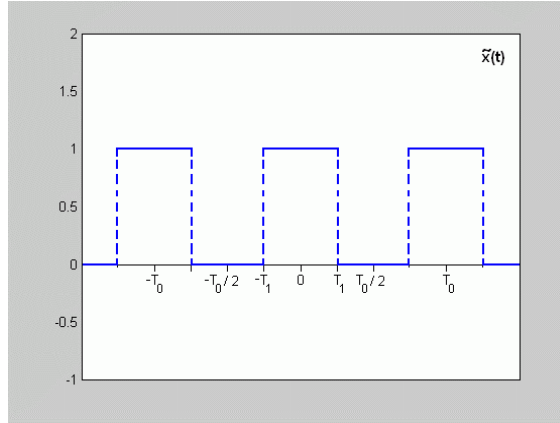


Figura 4.6: La extensión periódica $\tilde{x}(t)$ de la señal $x(t)$.

Como $\tilde{x}(t)$ es periódica podemos calcular sus coeficientes de Fourier mediante las fórmulas de síntesis y análisis

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\omega_0 t} \\ a_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t) e^{-ik\omega_0 t} dt \end{aligned}$$

Como $\tilde{x}(t) \equiv x(t)$ en el intervalo $[-T_0/2, T_0/2]$ y además $x(t) = 0 \quad \forall t \in [-T_1, T_1]$, los coeficientes a_k

puede expresarse como

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_1}^{T_1} x(t) e^{-ik\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-ik\omega_0 t} dt$$

y si definimos la función $X(\omega)$ como

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (4.1)$$

obtenemos

$$a_k = \frac{1}{T_0} X(k\omega_0)$$

y por tanto

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0) e^{ik\omega_0 t}$$

tomando $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_0 X(k\omega_0) e^{ik\omega_0 t}$$

Si ahora hacemos $T_0 \rightarrow \infty$, la señal periódica $\tilde{x}(t)$ se aproxima a la señal original $x(t)$. Mientras que por otra parte (y bajo condiciones adecuadas de convergencia) la suma se transforma en una integral y obtenemos

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (4.2)$$

que junto con la ecuación 4.1 forman el *par de transformadas de Fourier*, siendo $X(\omega)$ la *transformada o integral de Fourier* de $x(t)$ y que denotamos por

$$\mathcal{F}(x(t))(\omega) = X(\omega)$$

La ecuación 4.2 es la fórmula para la transformada inversa de Fourier.

Es posible relacionar la transformada de Fourier con la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}(x(t))(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

y por tanto

$$\mathcal{L}(x(t))(i\omega) = \mathcal{F}(x(t))(\omega)$$

Ejemplo 4.22 *Calcula la transformada de Fourier de la siguiente señal en tiempo continuo:*

$$x(t) = e^{-\alpha t} u(t), \quad \alpha > 0$$

Solución: Aplicando la definición

$$\begin{aligned}
 X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t} u(t) e^{-i\omega t} dt = \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-i\omega t} dt \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-t(\alpha+i\omega)} dt \\
 &= \frac{-1}{\alpha+i\omega} e^{-t(\alpha+i\omega)} \Big|_{t=0}^{t=\infty} \\
 &= \frac{1}{\alpha+i\omega} \left(1 - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t(\alpha+i\omega)} \right) \\
 &= \frac{1}{\alpha+i\omega}
 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.23 *Calcula la transformada de Fourier de la siguiente señal en tiempo continuo:*

$$x(t) = e^{-|t|}$$

Solución: Aplicando la definición

$$\begin{aligned}
 X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} e^{-i\omega t} dt = \\
 &= \int_{-\infty}^0 e^t e^{-i\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-i\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^0 e^{t(1-i\omega)} dt + \int_0^{\infty} e^{-t(1+i\omega)} dt \\
 &= \frac{1}{1-i\omega} e^{t(1-i\omega)} \Big|_{t=-\infty}^{t=0} + \frac{-1}{1+i\omega} e^{-t(1+i\omega)} \Big|_{t=0}^{t=\infty} \\
 &= \frac{1}{1-i\omega} \left(1 - \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{t(1-i\omega)} \right) + \frac{1}{1+i\omega} \left(1 - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t(1+i\omega)} \right) \\
 &= \frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega} = \frac{(1+i\omega) + (1-i\omega)}{1+\omega^2} = \frac{2}{1+\omega^2}
 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.24 *Calcula la transformada de Fourier de la siguiente señal en tiempo continuo:*

$$x(t) = \delta(t)$$

Solución: Aplicando la definición

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt = x(0) = e^{-i\omega 0} = 1$$

Ejemplo 4.25 *Calcula la transformada de Fourier de la siguiente señal en tiempo continuo:*

$$x(t) = \begin{cases} 1 & -T_1 < t < T_1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Solución: Aplicando la definición

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-T_1}^{T_1} e^{-i\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{t=-T_1}^{t=T_1} \\ &= \frac{1}{-i\omega} (e^{-i\omega T_1} - e^{-i\omega(-T_1)}) \\ &= \frac{1}{i\omega} (e^{i\omega T_1} - e^{-i\omega T_1}) \\ &= \frac{2 \operatorname{sen}(\omega T_1)}{\omega} \end{aligned}$$

Ejemplo 4.26 *Considera la señal $x(t)$ cuya transformada de Fourier está dada por*

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & -W < \omega < W \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

¿quien es $x(t)$?

Solución: Para calcular $x(t)$ utilizaremos la fórmula de la transformada inversa de Fourier dada en la ecuación 4.2

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i\omega t}}{it} \Big|_{\omega=-W}^{\omega=W} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{e^{iWt} - e^{i(-W)t}}{it} \right) \\ &= \frac{\operatorname{sen}(Wt)}{\pi t} \end{aligned}$$

4.7.5 Convergencia de la transformada de Fourier

Si tenemos una señal $x(t)$ en tiempo continuo, podemos plantearnos el cálculo de su transformada de Fourier según la fórmula 4.1 y nos preguntamos en qué condiciones la función

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

se aproxima a $x(t)$, es decir, bajo que condiciones la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e(t)|^2 dt \rightarrow 0$$

siendo

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

Estas condiciones, al igual que las de existencia de la serie de Fourier de una señal periódica, se denominan condiciones de Dirichlet y son:

Condición 1.- La señal $x(t)$ es absolutamente integrable, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

Condición 2.- El número de máximos y/o mínimos es finito en cualquier intervalo de longitud finita.

Condición 3.- El número de discontinuidades en cualquier intervalo de longitud finita es finito y todas las discontinuidades deben ser de salto finito.

4.7.6 Señales periódicas y la transformada de Fourier

Sea $\tilde{x}(t)$ una señal periódica de periodo T_0 . Podemos definir entonces la función de duración finita

$$x_1(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t) & -\frac{T_0}{2} \leq t \leq \frac{T_0}{2} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

y podemos calcular la transformada de Fourier de $x(t)$ mediante la fórmula 4.1 y además podremos calcular los coeficientes de la serie de Fourier asociada a $\tilde{x}(t)$:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t) e^{-ik\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_1(t) e^{-ik\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) e^{-ik\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} X_1(k\omega_0) \end{aligned}$$

Sin embargo los coeficientes se pueden integrar sobre cualquier intervalo de longitud T_0 y en general $\forall s \in \mathbb{R}$, si $\tilde{x}(t)$ es periódica con periodo T_0 entonces definimos $x_s(t)$ como

$$x_s(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t) & s \leq t \leq s + T_0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

y los coeficientes serán en este caso

$$a_k = \frac{1}{T_0} X_s(k\omega_0)$$

cualquiera que sea el valor de s .

En general ocurrirá

$$X_{s_1}(\omega) \neq X_{s_2}(\omega)$$

con $s_1 \neq s_2$; pero si es cierto que

$$X_{s_1}(k\omega_0) = X_{s_2}(k\omega_0) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Veamos un ejemplo para ilustrar esta propiedad.

Ejemplo 4.27 Consideremos de nuevo la señal periódica de periodo T_0 , que definida sobre el intervalo $[-T_0/2, T_0/2]$ está definida como:

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} 1 & -T_1 \leq t \leq T_1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

y que está representada en la figura 4.7

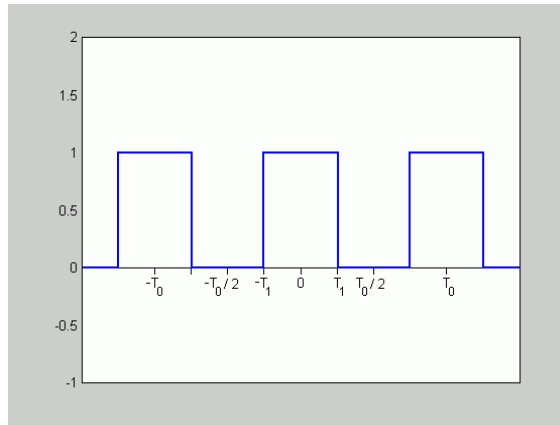


Figura 4.7: Señal periódica $\tilde{x}(t)$ del ejemplo ??.

Definimos dos señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$ a partir de $\tilde{x}(t)$ evaluada en dos periodos diferentes. La definición de $x_1(t)$ es (figura 4.8)

$$x_1(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t) & -\frac{T_0}{2} \leq t \leq \frac{T_0}{2} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

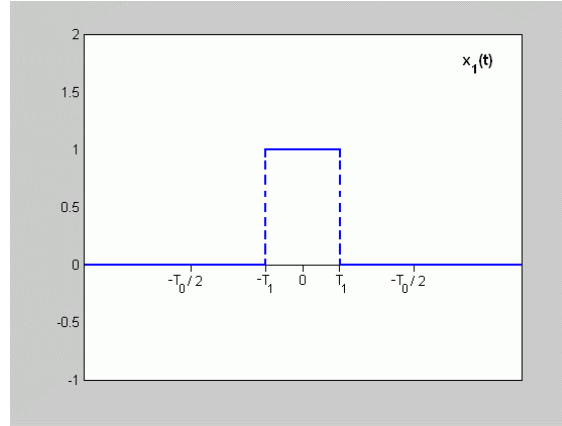


Figura 4.8: Señal $x_1(t)$ del ejemplo 4.27.

Mientras que la definición de $x_2(t)$ es (figura 4.9).

$$x_2(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t) & 0 \leq t \leq T_0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

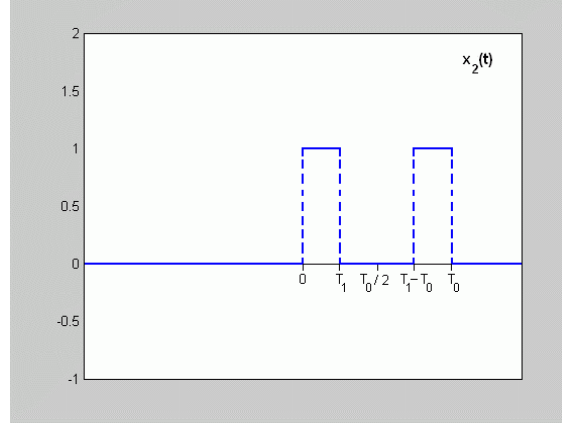


Figura 4.9: Señal $x_2(t)$ del ejemplo 4.27.

Si calculamos la transformada de Fourier para $x_1(t)$ y $x_2(t)$ mediante la ecuación 4.1. Para $x_1(t)$ obtenemos

$$\begin{aligned} X_1(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-T_1}^{T_1} e^{-i\omega t} dt = \frac{2 \sin(\omega T_1)}{\omega} \end{aligned}$$

mientras que para $x_2(t)$

$$\begin{aligned}
 X_2(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{T_0} e^{-i\omega t} dt \\
 &= \int_0^{T_1} e^{-i\omega t} dt + \int_{T_0-T_1}^{T_0} e^{-i\omega t} dt \\
 &= \frac{1}{i\omega} (1 - e^{-i\omega T_1}) + \frac{1}{i\omega} (e^{-i\omega(T_0-T_1)} - e^{-i\omega T_0}) \\
 &= \frac{1}{i\omega} (1 - e^{-i\omega T_1}) + \frac{1}{i\omega} e^{-i\omega T_0} (e^{i\omega T_1} - 1) \\
 &= \frac{1}{i\omega} e^{-i\omega T_1/2} (e^{i\omega T_1/2} - e^{-i\omega T_1/2}) + \frac{1}{i\omega} e^{-i\omega(T_0-T_1)/2} (e^{i\omega T_1/2} - e^{-i\omega T_1/2}) \\
 &= \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega T_1}{2}\right) \left\{ e^{-i\omega T_1/2} + e^{-i\omega(T_0-T_1)/2} \right\}
 \end{aligned}$$

y en general ocurre

$$X_1(\omega) \neq X_2(\omega)$$

Sin embargo para $\omega = k\omega_0$

$$\begin{aligned}
 X_1(k\omega_0) &= \frac{2 \sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0} \\
 X_2(k\omega_0) &= \frac{2}{k\omega_0} \sin\left(\frac{k\omega_0 T_1}{2}\right) \left\{ e^{-ik\omega_0 T_1/2} + e^{-ik\omega_0(T_0-T_1)/2} \right\}
 \end{aligned}$$

En la última expresión y como $\omega_0 T_0 = 2\pi \Rightarrow$

$$k\omega_0(T_0 - T_1/2) = k\omega_0 T_0 - k\omega_0 T_1/2 = 2\pi k - k\omega_0 T_1/2$$

y por tanto

$$e^{-ik\omega_0(T_0-T_1/2)} = e^{-i(2\pi k - k\omega_0 T_1/2)} = e^{-i2\pi k} e^{ik\omega_0 T_1/2} = e^{ik\omega_0 T_1/2}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
 X_2(k\omega_0) &= \frac{2}{k\omega_0} \sin\left(\frac{k\omega_0 T_1}{2}\right) \left\{ e^{-ik\omega_0 T_1/2} + e^{ik\omega_0 T_1/2} \right\} = \\
 &= \frac{2}{k\omega_0} \sin\left(\frac{k\omega_0 T_1}{2}\right) 2 \cos\left(\frac{k\omega_0 T_1}{2}\right) = \\
 &= \frac{2}{k\omega_0} \sin(k\omega_0 T_1) = X_1(k\omega_0)
 \end{aligned}$$

4.7.7 Transformada de Fourier para señales periódicas

Sea $x(t)$ una señal en tiempo continuo cuya transformada de Fourier, $X(\omega)$ es

$$X(\omega) = 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$$

Si queremos determinar $x(t)$ utilizamos la formula de la transformada inversa correspondiente para obtener

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0) e^{i\omega t} d\omega = e^{i\omega_0 t}$$

donde se ha utilizado la expresión

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \delta(t - s) ds$$

válida para cualquier señal en tiempo continuo.

De esta forma si $X(\omega)$ es una combinación lineal de impulsos equidistantes, i.e.

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

entonces aplicando el resultado anterior

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\omega_0 t}$$

que representa la serie de Fourier de una señal periódica. Es decir, la transformada de Fourier de una señal periódica con coeficientes $\{a_k\}$ puede ser interpretada como un tren de impulsos que ocurren a las frecuencias armónicamente relacionadas.

Ejemplo 4.28 Si

$$a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{\pi k}$$

y la señal

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\omega_0 t}$$

entonces su transformada de Fourier es

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin(k\omega_0 T_1)}{k} \delta(\omega - k\omega_0)$$

Ejemplo 4.29 Sea la señal

$$x(t) = \sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2i} e^{i\omega_0 t} - \frac{1}{2i} e^{-i\omega_0 t}$$

entonces su transformada de Fourier es

$$\begin{aligned} X(\omega) &= 2\pi \frac{1}{2i} \delta(\omega - \omega_0) - 2\pi \frac{1}{2i} \delta(\omega + \omega_0) \\ &= \frac{\pi}{i} \delta(\omega - \omega_0) - \frac{\pi}{i} \delta(\omega + \omega_0) \\ &= \pi i \delta(\omega + \omega_0) - \pi i \delta(\omega - \omega_0) \end{aligned}$$

Ejemplo 4.30 Dada la señal

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

si calculamos los coeficientes a_k

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T \delta(t) e^{-ik\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}$$

y su transformada de Fourier es

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T} \delta(\omega - k\omega_0)$$

como

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$X(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$$

4.8 Propiedades de la transformada de Fourier en tiempo continuo

De acuerdo con la notación elegida para la transformada de Fourier de una señal continua:

$$\mathcal{F}(x(t))$$

indicamos el par de transformadas de Fourier como:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)$$

y podemos expresar y demostrar las siguientes propiedades para la transformada de Fourier en tiempo continuo. Estas propiedades pueden demostrarse fácilmente teniendo en cuenta la relación que existe entre la transformada de Fourier y la de Laplace.

4.8.1 Linealidad

Dadas dos señales en tiempo continuo $x_1(t)$ y $x_2(t)$ entonces:

$$\left. \begin{array}{l} x_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(\omega) \\ x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_2(\omega) \end{array} \right\} \iff \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \alpha X_1(\omega) + \beta X_2(\omega)$$

4.8.2 Simetría

Si $x(t)$ es una señal en tiempo continuo, i.e., $x(t) \in \mathbb{R}, \forall t$, entonces

$$X(-\omega) = \overline{X}(\omega) \quad (\text{Simetría conjugada})$$

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) \iff \left. \begin{aligned} x_e(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \operatorname{Re}\{X(\omega)\} \\ x_o(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} i\operatorname{Im}\{X(\omega)\} \end{aligned} \right\}$$

Su demostración es sencilla. Para la propiedad de simetría conjugada tenemos por una parte

$$X(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{i\omega t} dt$$

y por otra

$$\begin{aligned} \overline{X}(\omega) &= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{x(t) e^{-i\omega t}} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{x(t)} \cdot \overline{e^{-i\omega t}} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{x(t)} \cdot e^{i\omega t} dt \end{aligned}$$

y como $x(t) \in \mathbb{R}$

$$x(t) = \overline{x(t)}$$

tenemos la igualdad buscada.

Para demostrar la segunda propiedad calculamos directamente las transformadas de Fourier de la parte par e impar de la señal $x(t)$. Por su definición:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x_e(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_e(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \{x(t) + x(-t)\} e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} x(t) e^{-i\omega t} + \frac{1}{2} x(-t) e^{-i\omega t} \right\} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} x(t) e^{-i\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} x(-t) e^{-i\omega t} dt \end{aligned}$$

Hacemos el cambio de variable $-t = s$ en la segunda integral para obtener

$$\mathcal{F}(x_e(t)) = \frac{1}{2} X(\omega) + \int_{\infty}^{-\infty} \frac{1}{2} x(s) e^{i\omega s} (-ds)$$

intercambiando los extremos de integración

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x_e(t)) &= \frac{1}{2} X(\omega) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} x(s) e^{i\omega s} (ds) \\ &= \frac{1}{2} X(\omega) + \frac{1}{2} X(-\omega) \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta la propiedad anterior

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(x_e(t)) &= \frac{1}{2}X(\omega) + \frac{1}{2}\overline{X}(\omega) = \frac{1}{2}(X(\omega) + \overline{X}(\omega)) \\ &= \operatorname{Re}(X(\omega))\end{aligned}$$

Del mismo modo se prueba para la transformada de la parte impar de la señal.

4.8.3 Desplazamiento en el tiempo

Para una señal en tiempo continuo y $t_0 \in \mathbb{R}$

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) \iff x(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-i\omega t_0} X(\omega)$$

La demostración es idéntica a la propiedad de desplazamiento vista para la transformada de Laplace.

4.8.4 Diferenciación

Para una señal $x(t)$ en tiempo continuo que sea diferenciable se puede establecer la siguiente propiedad respecto a la transformada de Fourier de su derivada:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) \iff \frac{dx}{dt}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} i\omega X(\omega)$$

4.8.5 Integración

Para una señal $x(t)$ en tiempo continuo que sea integrable se puede establecer la siguiente propiedad respecto a la transformada de Fourier de su función integral:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) \iff \int_{-\infty}^t x(s) ds \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{i\omega} X(\omega) + \pi X(0) \delta(\omega)$$

4.8.6 Cambio de escala en tiempo y frecuencia

Dada una señal en tiempo continuo $x(t)$ y un valor $a \in \mathbb{R}$ podemos obtener las relaciones entre la transformada de Fourier de $x(t)$ y la transformada de Fourier de la función escalada.

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) \iff x(at) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

4.8.7 Dualidad

Debido a la simetría de las expresiones del par de transformadas de Fourier, tendremos la siguiente propiedad de dualidad, que nos facilita el cálculo de algunas transformadas

$$g(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} f(\omega) \iff f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi g(-\omega)$$

Por ejemplo dada la señal en tiempo continuo

$$x(t) = \frac{2}{1+t^2}$$

si tenemos en cuenta que la transformada de Fourier de

$$g(t) = e^{-|t|}$$

es

$$f(\omega) = \frac{2}{1 + \omega^2}$$

es decir

$$x(t) = f(t)$$

entonces

$$X(\omega) = 2\pi g(-\omega) = 2\pi e^{-|\omega|}$$

4.8.8 Convolución

Una de las propiedades más importantes de la transformada de Fourier en el análisis de sistemas LTI es su efecto sobre la operación de convolución. Para obtener esa relación consideremos un sistema LTI con respuesta impulsiva $h(t)$ y supongamos que queremos obtener la respuesta $y(t)$ del sistema para la entrada $x(t)$. Como el sistema es LTI la respuesta $y(t)$ estará relacionada con la entrada $x(t)$ a través del producto de convolución de esta con su respuesta impulsiva $h(t)$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s) h(t-s) ds$$

Si existe la transformada de Fourier $X(\omega)$ y $H(\omega)$ de las señales $x(t)$ y $h(t)$ respectivamente, entonces es posible calcular la transformada de Fourier de $y(t)$ como

$$Y(\omega) = X(\omega) H(\omega)$$

La función $H(\omega)$ se denomina respuesta en *frecuencia del sistema*.

La demostración se realiza actuando sobre la propia definición del producto de convolución.

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(s) h(t-s) ds \right) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(s) h(t-s) e^{-i\omega t} ds dt \end{aligned}$$

intercambiando el orden de integración y teniendo en cuenta que $x(s)$ no depende de t

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t-s) e^{-i\omega t} dt \right) ds$$

realizamos el cambio de variable $t-s=r$

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(r) e^{-i\omega(s+r)} dr \right) ds$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(r) e^{-i\omega s} e^{-i\omega r} dr \right) ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(s) e^{-i\omega s} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(r) e^{-i\omega r} dr \right) ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(s) e^{-i\omega s} H(\omega) ds \\
&= H(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} x(s) e^{-i\omega s} ds \\
&= H(\omega) X(\omega)
\end{aligned}$$

Es importante observar que la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ no puede ser definida para cualquier sistema LTI.

4.8.9 Relaciones de Parseval

Teorema 4.31 (Relación de Parseval) Para un par de transformadas de Fourier

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)$$

se cumple

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (4.3)$$

y si $x(t)$ es periódica entonces

$$\frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \quad (4.4)$$

siendo $[T_0]$ cualquier intervalo de longitud T .

Demostración: La demostración de 4.3 se realiza directamente utilizando la transformada de Fourier:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{x(t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left(\overline{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega} \right) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{X(\omega) e^{i\omega t}} d\omega \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{X(\omega)} e^{-i\omega t} d\omega \right) dt
\end{aligned}$$

intercambiando el orden de integración (Teorema de Fubini)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{X(\omega)} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \right) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{X(\omega)} X(\omega) d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Para demostrar 4.4 probaremos en primer lugar el siguiente resultado previo.

Lema 4.32 *Dadas dos señales periódicas $x(t)$ e $y(t)$ con el mismo periodo T_0 y cuya representación en series de Fourier son*

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\omega_0 t}$$

y

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{ik\omega_0 t}$$

entonces la representación en serie de la señal

$$z(t) = x(t) y(t)$$

es

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 t}$$

siendo

$$c_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n b_{k-n}$$

Demostración: Como $x(t)$ e $y(t)$ son señales periódicas con el mismo periodo T_0 ($\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$) podemos comprobar fácilmente que $z(t) = x(t) y(t)$ también es periódica del mismo periodo:

$$z(t + T_0) = x(t + T_0) y(t + T_0) = x(t) y(t) = z(t)$$

y por tanto tendrá una representación en series de Fourier de la forma

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 t}$$

donde los coeficientes c_k se calculan usualmente

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} z(t) e^{-ik\omega_0 t} dt$$

utilizando la definición de $z(t)$ y que $x(t)$ admite representación en series de Fourier tendremos:

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} x(t) y(t) e^{-ik\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\omega_0 t} \right) y(t) e^{-ik\omega_0 t} dt$$

intercambiando el sumatorio y la integral (siempre que exista convergencia)

$$\begin{aligned} c_k &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} e^{in\omega_0 t} y(t) e^{-ik\omega_0 t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} y(t) e^{-i(k-n)\omega_0 t} dt \right) \end{aligned}$$

y la expresión entre paréntesis es el coeficiente b_{k-n} de la representación en series de Fourier de la señal $y(t)$

$$c_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n b_{k-n}$$

tal y como queríamos demostrar.

La demostración entonces de 4.4 es ahora muy sencilla. Si tomamos $x(t) = x(t)$ e $y(t) = \overline{x(t)}$ en la proposición anterior.

Por una parte los coeficientes de $\overline{x(t)}$ son

$$\overline{x(t)} = \overline{\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\omega_0 t}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{a_n e^{in\omega_0 t}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{a_n} e^{-in\omega_0 t}$$

y haciendo el cambio $n = -k$

$$\overline{x(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{a_{-k}} e^{ik\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{ik\omega_0 t}$$

luego

$$b_k = \overline{a_{-k}}$$

De esta forma los coeficientes de $z(t) = x(t) \overline{x(t)}$ son

$$c_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n b_{k-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \overline{a_{n-k}}$$

y si tomamos $k = 0$

$$c_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \overline{a_n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2$$

pero c_0 es el primer coeficiente de la serie de Fourier de $z(t)$, esto es

$$c_0 = \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} z(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} x(t) \overline{x(t)} dt = \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} |x(t)|^2 dt$$

y se obtiene la igualdad de Parseval para señales periódicas.

4.9 Transformada de Fourier y sistemas descritos mediante EDO's

Gracias a la linealidad de la transformada de Fourier, si aplicamos dicha transformada a una EDO lineal con coeficientes constantes de la forma

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

obtendremos

$$\mathcal{F} \left(\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right) = \mathcal{F} \left(\sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right)$$

$$\sum_{k=0}^N a_k \mathcal{F} \left(\frac{d^k y(t)}{dt^k} \right) = \sum_{k=0}^M b_k \mathcal{F} \left(\frac{d^k x(t)}{dt^k} \right)$$

y por las propiedades de la transformada de Fourier con la derivación

$$\sum_{k=0}^N a_k (i\omega)^k \mathcal{F}(y(t)) = \sum_{k=0}^M b_k (i\omega)^k \mathcal{F}(x(t))$$

de donde

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(y(t)) \left(\sum_{k=0}^N a_k (i\omega)^k \right) &= \mathcal{F}(x(t)) \left(\sum_{k=0}^M b_k (i\omega)^k \right) \\ Y(\omega) \left(\sum_{k=0}^N a_k (i\omega)^k \right) &= X(\omega) \left(\sum_{k=0}^M b_k (i\omega)^k \right) \end{aligned}$$

y despejando $Y(\omega)$

$$Y(\omega) = X(\omega) \frac{\sum_{k=0}^M b_k (i\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (i\omega)^k}$$

y empleando las propiedades de la convolución y de los sistemas LTI obtenemos

$$H(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (i\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (i\omega)^k} \quad (4.5)$$

que es la respuesta en frecuencia del sistema.

De la ecuación 4.5 obtenemos que $H(\omega)$ es una función racional, es decir, un cociente de polinomios en $(i\omega)$.

Ejemplo 4.33 Consideremos el sistema LTI con la condición de reposo inicial y caracterizado mediante la EDO

$$y'(t) + ay(t) = x(t)$$

con $a > 0$. La respuesta en frecuencia para este sistema se obtiene fácilmente a través de la expresión 4.5

$$H(\omega) = \frac{1}{(i\omega) + a}$$

La función $H(\omega)$ es la transformada de Fourier de la función $e^{-at}u(t)$. Entonces la respuesta impulsiva del sistema es

$$h(t) = e^{-at}u(t)$$

Ejemplo 4.34 Consideremos el sistema LTI con la condición de reposo inicial y caracterizado mediante la EDO

$$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = x'(t) + 2x(t)$$

En este caso y a partir de la ecuación 4.5 obtenemos la respuesta en frecuencia del sistema

$$H(\omega) = \frac{(i\omega) + 2}{(i\omega)^2 + 4(i\omega) + 3}$$

Para determinar la respuesta impulsiva $h(t)$ del sistema a partir de su respuesta en frecuencia hay que calcular la transformada inversa de $H(\omega)$. Para ello desarrollamos en fracciones simples

$$H(\omega) = \frac{1/2}{i\omega + 1} + \frac{1/2}{i\omega + 3}$$

que rápidamente nos lleva a la conclusión de que

$$h(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t)$$

Ejemplo 4.35 Consideremos el sistema del ejemplo anterior y supongamos que queremos encontrar la respuesta del sistema para la entrada

$$x(t) = e^{-t}u(t)$$

Utilizando la propiedad de convolución de la transformada de Fourier obtenemos

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = \left(\frac{1}{i\omega + 1}\right) \left(\frac{i\omega + 2}{(i\omega)^2 + 4(i\omega) + 3}\right) = \frac{i\omega + 2}{(i\omega + 1)^2(i\omega + 3)}$$

y desarrollando en fracciones simples obtenemos

$$Y(\omega) = \frac{1/4}{i\omega + 1} + \frac{1/2}{(i\omega + 1)^2} + \frac{-1/4}{i\omega + 3}$$

y podemos obtener la transformada inversa de Fourier por inspección.

$$y(t) = \left(\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t} - \frac{1}{4}e^{-3t}\right)u(t)$$

donde se ha tenido en cuenta que

$$\frac{1}{(i\omega + 1)^2} = \left(\frac{i}{i\omega + 1}\right)'$$

y se han aplicado las propiedades de Fourier con la derivación.