

Capítulo 2

Señales y Sistemas

2.1 Introducción

Como se indicó en el primer capítulo, una forma de estudiar los sistemas es observar las relaciones entre las variables de entrada y salida asociadas a dicho sistema. Generalmente los valores de estas variables dependen del tiempo y podemos, por tanto, considerarlas como funciones del tiempo.

Definición 2.1 *Una señal es una magnitud física que varía con el tiempo, el espacio o cualquier otra variable o variables independientes.*

Matemáticamente una señal es una función de una o más variables independientes.

Por ejemplo, una señal acústica puede expresarse como la variación de la presión con el tiempo, una imagen en blanco y negro puede considerarse como una función de intensidad en dos variables espaciales y también podemos considerar señales de la forma

$$\begin{aligned}s_1(t) &= 5t \\ s_2(t) &= 20t^2 \\ s(x, y) &= 3x + 2xy + 10y^2\end{aligned}$$

En estos casos existe una expresión explícita que relaciona la o las variables independientes con la o las variables dependientes, sin embargo, existen casos donde esta relación no es conocida o es demasiado complicada, por ejemplo, una señal de habla, un electrocardiograma (ECG), un electroencefalograma (EEG), etc.

Las señales están asociadas a sistemas que responden ante un estímulo o fuerza. Podemos decir que el sistema actúa sobre las señales, por ejemplo, un sistema de filtrado que actúe sobre una señal de habla grabada con ruido para obtener como respuesta la señal sin ruido.

2.2 Clasificación de señales

2.2.1 Señales multicanal y multidimensionales

Dependiendo del número de variables dependientes e independientes implicadas en la caracterización de la señal, podemos distinguir entre señales *unidimensionales*, que depende de una sola variable independiente, generalmente el tiempo, o *multidimensionales*, que dependen de dos o más variables independientes. En el primer grupo se encuentran por ejemplo señales descritas explícitamente como

$$s_1(t) = 5t$$

y

$$s_2(t) = 20t^2$$

o señales obtenidas al observar la variación de una única magnitud en el tiempo como las señales procedentes del habla, señales sísmicas, etc. En el segundo grupo podríamos considerar como señal multidimensional el nivel de gris de una fotografía en blanco y negro en la posición (x, y) : $I(x, y)$.

Teniendo en cuenta el número de variables dependientes, podemos distinguir señales *monocanal*, donde solamente se utiliza una y señales *multicanal* donde habría más de una. Podemos considerar que las señales monocanal son funciones reales de una o más variables, mientras que las señales multicanal serían funciones vectoriales de una o más variables.

En general, durante este curso consideraremos señales monocanal y unidimensionales.

2.2.2 Señales en tiempo continuo y en tiempo discreto

Como se ha indicado en el párrafo anterior, al considerar señales unidimensionales, supondremos que la variable independiente es el tiempo. En este caso, según el conocimiento que tengamos del valor de la señal con el tiempo, tendremos señales en tiempo continuo y señales en tiempo discreto.

Las señales en *tiempo continuo* (o *analógicas*) están definidas para cualquier valor en el intervalo (a, b) donde esta señal esté definida; podemos obtener el valor de la señal en cualquier instante. Este intervalo puede ser finito o infinito: $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$. Cuando el intervalo de definición de la señal es finito, se dice que la señal es de duración finita y siempre podemos extender este intervalo a uno de duración infinita asignando un valor nulo a la señal fuera del intervalo donde está definida. Estas señales son funciones continuas de variable continua, como las señales de voz, $\cos(\pi t)$, etc.

Las señales en *tiempo discreto* (o *discretas*) están definidas solamente para ciertos valores de la variable independiente; estos valores pueden ser o no equidistantes. En este caso, el valor de la señal, solamente se conoce en instantes de tiempo determinados: $\{t_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Por ejemplo

$$x(t_n) = e^{-|t_n|} \quad n \in \mathbb{Z}$$

Si los valores t_k , donde es conocido el valor de la señal, son equidistantes, es decir $|t_{k+1} - t_k| = T$, constante, podemos utilizar el índice n para representar una señal en tiempo discreto y esta será sucesión de números que podemos representar como

$$x[n] \text{ o } x[nT]$$

por ejemplo

$$x[n] = \begin{cases} 0.8^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Las señales en tiempo discreto de este tipo suelen denominarse *secuencias en tiempo discreto*. Una señal en tiempo discreto $x[n]$ puede representar un fenómeno que puede o no ser de tipo discreto. Por ejemplo, la señal de habla es continua, sin embargo, es necesario utilizar una secuencia para procesarla por ordenador.

En general estas señales en tiempo discreto se originan de 2 formas:

1. Eligiendo valores de una señal continua en instantes de tiempo determinados (*muestreo*)
2. Acumulando una variable a lo largo de un periodo de tiempo. Por ejemplo el número de coches que pasa por una calle en una hora.

2.2.3 Señales continuas y discretas

Los valores que puede tomar una señal en tiempo continuo o en tiempo discreto pueden ser a su vez continuos o discretos. Si una señal puede tomar todos los valores posibles en un rango dado (finito o infinito) entonces es una señal continua. Si por el contrario, solamente puede tomar valores concretos dentro de un rango dado entonces la señal será discreta.

Una señal en tiempo discreto que toma valores en un conjunto discreto se denomina *señal digital*. Para procesar una señal analógica se debe discretizar mediante muestreo y después *cuantificarla*.

2.2.4 Señales deterministas y aleatorias

Una señal es *determinista* si está definida mediante una regla, fórmula matemática o conjunto de datos. Conocemos los valores de la señal en el pasado, presente y futuro y sin indeterminaciones. Por otra parte una señal es *aleatoria* si no puede describirse con un grado de precisión razonable mediante fórmulas o también cuando la descripción es demasiado complicada. Para el estudio de estas señales se utilizan técnicas estadísticas.

2.3 Transformaciones de la variable independiente

Consideremos una señal en tiempo continuo $x(t)$ o en tiempo discreto $x[n]$. Podemos realizar transformaciones sobre la variable temporal para obtener modificaciones de la señal original. Veamos algunas de estas posibles modificaciones.

1. **Reflexión.** A partir de $x(t)$ o $x[n]$ definimos la *señal reflejada* como

$$\begin{aligned} x_R(t) &= x(-t) \\ \text{ó} \\ x_R[n] &= x[-n] \end{aligned}$$

Podemos ver un ejemplo de esta transformación en la figura 2.1

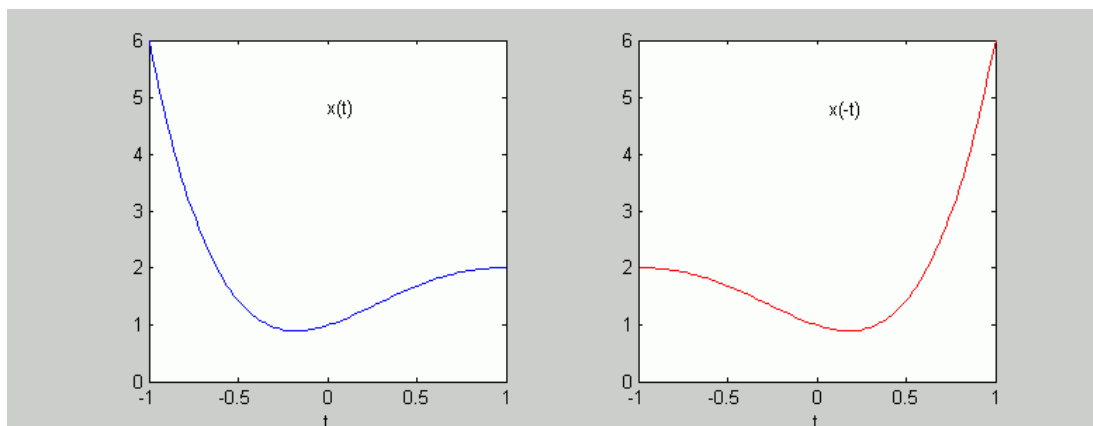


Figura 2.1: Reflejo de una señal.

Por ejemplo si $x(t)$ representa la reproducción de una señal grabada en una cinta de audio, $x_R(t)$ representará la reproducción al revés de esa grabación.

2. **Desplazamiento.** A partir de $x(t)$ o $x[n]$ definimos la *señal desplazada* un tiempo $t_0 \in \mathbb{R}$, o $n_0 \in \mathbb{Z}$, respectivamente a:

$$x_D(t) = x(t - t_0)$$

ó

$$x_D[n] = x[n - n_0]$$

Si t_0 (o n_0 , respectivamente para tiempo discreto) es positivo el desplazamiento es un *retardo* o *retraso*, mientras que si es negativo el desplazamiento representa un *adelanto*. Podemos ver ambas situaciones en la figura 2.2

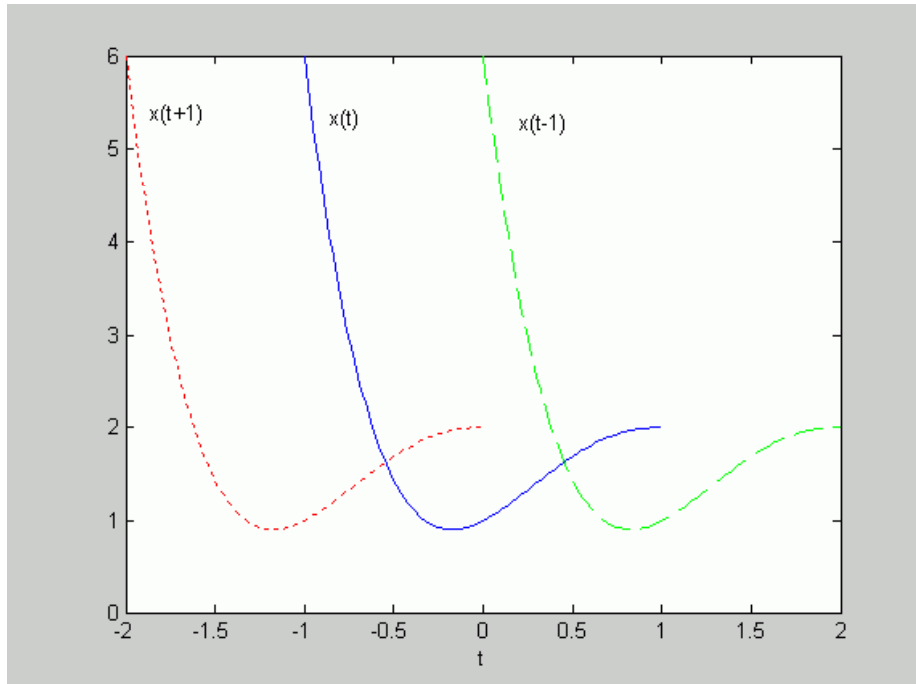


Figura 2.2: Desplazamiento de una señal.

Estas modificaciones se emplean por ejemplo en señales de radar o sonar para determinar una posición, y también en señales de origen sísmico. En general esta transformación es útil cuando la señal atraviesa diferentes medios hasta llegar al destino (generalmente un dispositivo receptor).

3. **Escalado.** A partir de $x(t)$ o $x[n]$ definimos la *señal escalada* mediante un factor $\lambda \in \mathbb{R}^+$ o $M \in \mathbb{Z}^+$, respectivamente, como

$$x_\lambda(t) = x(\lambda t)$$

$$x_M[n] = x[Mn]$$

Esta transformación tiene diferente sentido para señales en tiempo continuo y señales en tiempo discreto. Para el caso de una señal en tiempo continuo $x(t)$, como en el caso de una señal acústica grabada, esta transformación estaría relacionada con la reproducción a mayor ($\lambda > 1$) o menor ($\lambda < 1$) velocidad (Ver figura 2.3)

Figura 2.3: Cambio de escala de una señal en tiempo continuo.

Mientras que el caso de una señal en tiempo discreto el significado de esta transformación sería diferente y estaría relacionada con la decimación ($M > 0$); ya que a partir de una señal en tiempo discreto $x[n]$, la señal escalada $x_M[n]$, sería la señal obtenida utilizando los valores de $x[n]$ situados en los instantes múltiplos de M .

Para el caso $\lambda < 1$ en tiempo continuo, no hay ninguna equivalencia en tiempo discreto, ya que para una señal en tiempo discreto una transformación del tipo

$$\hat{x}[n] = x[n/2]$$

solamente tendría sentido para valores pares del entero n , y no estaría definida para valores impares de n . Podemos, no obstante, construir una señal que en cierto modo consigue representar el comportamiento para $\lambda < 1$ de las señales en tiempo continuo. A partir de $x[n]$ podemos construir una señal en tiempo discreto definida por:

$$\hat{x}[n] = \begin{cases} x[n/2] & n \text{ par} \\ 0 & n \text{ impar} \end{cases}$$

Esta construcción se denomina en terminología inglesa *zero padding*; se realiza una interpolación, insertando 0 en las posiciones no definidas de $x[n]$.

2.4 Propiedades de las señales

Las señales en tiempo continuo o discreto pueden caracterizarse mediante sus propiedades, entre las que destacamos: simetría y periodicidad.

Definición 2.2 Diremos que una señal en tiempo continuo $x(t)$ o tiempo discreto $x[n]$ es par \iff

$$x(-t) = x(t)$$

$$x[-n] = x[n]$$

Esta propiedad implica que la señal correspondiente es simétrica respecto al eje OY.

Por ejemplo, son señales pares: $\cos(t)$, t^2 , e^{-t^2} .

Definición 2.3 Diremos que una señal en tiempo continuo $x(t)$ o tiempo discreto $x[n]$ es impar \iff

$$x(-t) = -x(t)$$

$$x[-n] = -x[n]$$

Esta propiedad implica que la señal correspondiente tiene simetría invertida respecto al eje OY.

Por ejemplo, son señales impares: $\sin(t)$, t^3 .

Teorema 2.4 Cualquier señal en tiempo continuo o discreto, puede ponerse como combinación lineal de dos señales, una par y una impar. Es decir, si $x(t)$ es una señal en tiempo continuo ($x[n]$ en tiempo discreto), entonces

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

o

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$$

Demostración: Se puede comprobar fácilmente que las señales definidas como

$$x_e(t) = \frac{1}{2} \{x(t) + x(-t)\}$$

$$x_o(t) = \frac{1}{2} \{x(t) - x(-t)\}$$

y respectivamente

$$x_e[n] = \frac{1}{2} \{x[n] + x[-n]\}$$

$$x_o[n] = \frac{1}{2} \{x[n] - x[-n]\}$$

para el caso discreto, cumplen las condiciones exigidas.

Ejercicio 2.4.1 Realiza la descomposición en su parte par e impar de la siguiente señal:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Definición 2.5 Diremos que una señal en tiempo continuo $x(t)$ es periódica de periodo $T \Leftrightarrow$

$$\exists T > 0 \in \mathbb{R} : x(t+T) = x(t) \forall t \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

Definición 2.6 Diremos que una señal en tiempo discreto $x[n]$ es periódica de periodo $N \Leftrightarrow$

$$\exists N \in \mathbb{N} : x[n+N] = x[n] \forall n \in \mathbb{Z} \quad (2.2)$$

Obviamente si una señal en tiempo continuo es periódica de periodo T (o periodo N en tiempo discreto), también será periódica de periodo mT con $m \in \mathbb{N}$ (mN , respectivamente para el caso de tiempo discreto).

Definición 2.7 El periodo fundamental de una señal periódica en tiempo continuo, que denominamos T_0 , es el valor más pequeño de T para el que se cumple la relación de periodicidad 2.1. Análogamente, para el caso discreto, definimos el periodo fundamental por N_0 .

Definición 2.8 Llamamos frecuencia fundamental, f_0 a la inversa del periodo fundamental, es decir

$$f_0 = \frac{1}{T_0}$$

Una señal no periódica, se dice *aperiódica*.

2.5 Señales en tiempo discreto

Una señal en tiempo discreto puede presentarse de 3 formas:

1. *Representación funcional*: Mediante su definición explícita

$$x[n] = \begin{cases} 1 & n = 1, 3 \\ 4 & n = 2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

2. *Representación tabular*: Mediante una tabla de datos

n	\dots	-2	-1	0	1	2	3	4	\dots
$x[n]$	\dots	0	0	0	1	4	1	0	\dots

3. *Representación secuencial*: Mediante una sucesión de valores:

$$x[n] = \left\{ \dots, 0, 0, 0, \underset{\uparrow}{1}, 4, 1, 0, \dots \right\}$$

donde el símbolo \uparrow indica el instante $n = 0$.

Cuando $x[n] = 0$, para $n < 0$, la representación secuencial suele indicarse como:

$$x[n] = \{0, 1, 4, 1, 0, \dots\}$$

2.5.1 Señales básicas en tiempo discreto

Las siguientes señales son las más usuales en la descripción de los sistemas:

1. *Función impulso unitario:* La función impulso unitario en tiempo discreto, $\delta[n]$, se define como:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

cuya representación gráfica viene dada en la figura 2.4

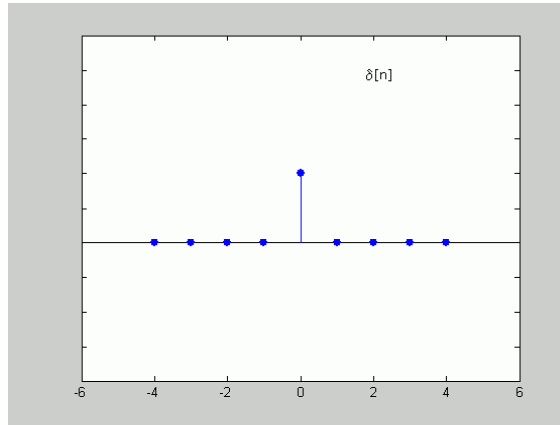


Figura 2.4: Impulso unitario en tiempo discreto, $\delta[n]$.

2. *Función escalón unitario:* La función escalón unitario en tiempo discreto, $u[n]$, se define como:

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Como $\delta[n] = 0, \forall n \neq 0 \Rightarrow x[n] \cdot \delta[n] = x[0] \cdot \delta[n]$.

La relación entre el impulso y el escalón unitario se obtiene directamente de su definición

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

En la figura 2.5 se puede ver una representación gráfica de esta función

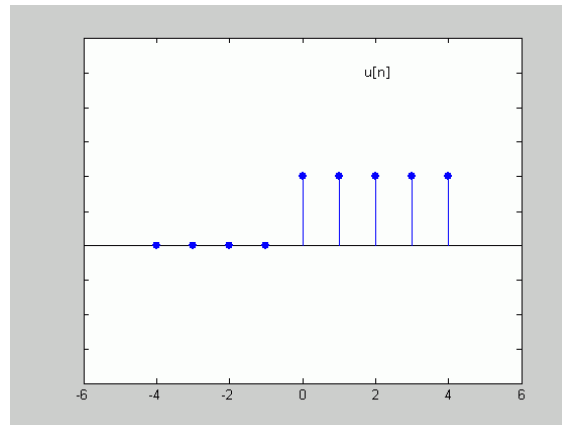


Figura 2.5: Escalón unitario en tiempo discreto, $u[n]$.

3. *Función rampa unidad:* La función rampa unidad o unitaria en tiempo discreto, $u_r[n]$, se define como:

$$u_r[n] = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

cuya representación gráfica viene dada por la figura

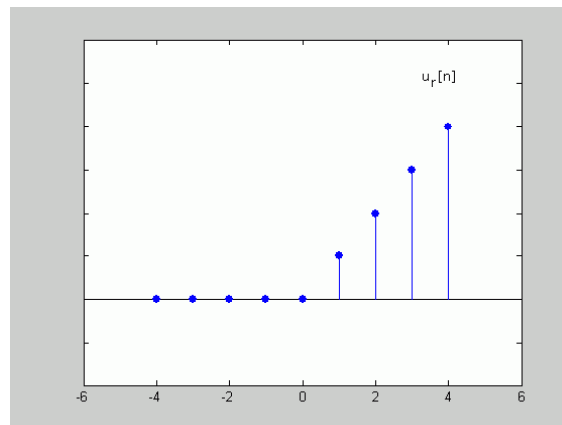


Figura 2.6: Rampa unitaria en tiempo discreto, $u_r[n]$.

4. *Función exponencial compleja*

$$x[n] = C\alpha^n \quad C, \alpha \in \mathbb{C}$$

o alternativamente

$$x[n] = Ce^{\beta n} \quad (\alpha = e^{\beta})$$

La figura 2.7 muestra la representación gráfica de la exponencial compleja para diferentes valores de C y α .

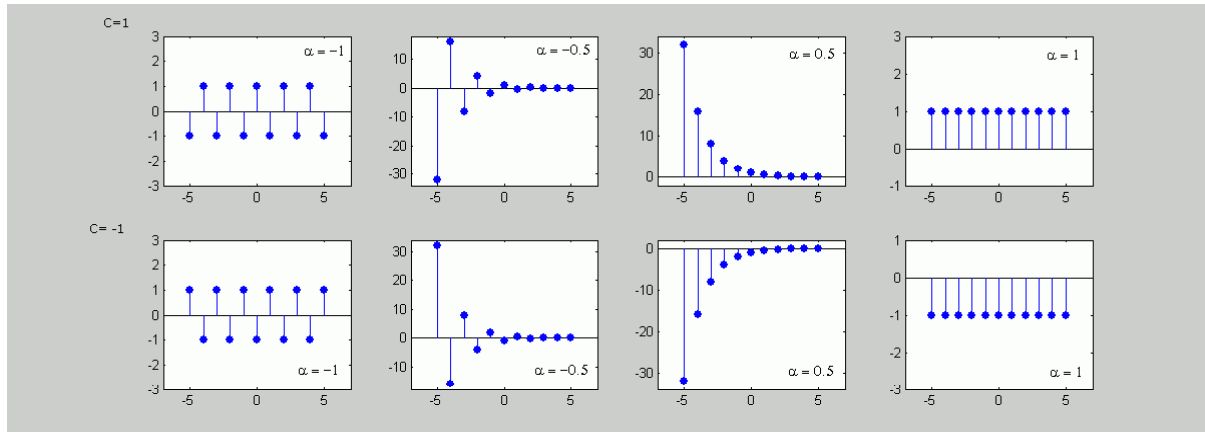


Figura 2.7: Exponencial compleja en tiempo discreto, $C\alpha^n$.

5. *Función sinusoidal:*

$$x[n] = A \cdot \cos(\Omega_0 n + \varphi) \quad n \in \mathbb{Z}$$

donde

A : Amplitud

Ω_0 : Frecuencia en radianes

φ : Fase en radianes.

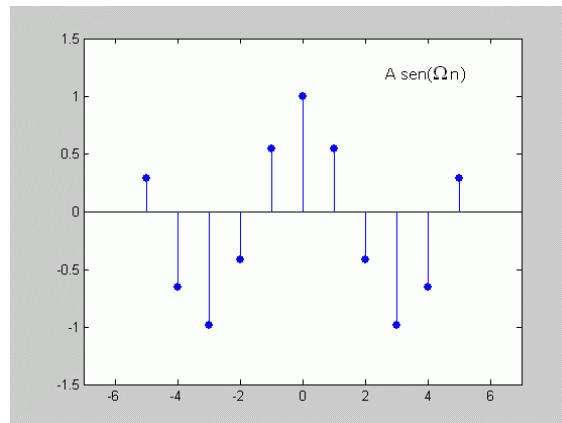


Figura 2.8: Señal sinusoidal compleja en tiempo discreto.

Mientras que si definimos

$$f = \frac{\Omega_0}{2\pi}$$

$$x[n] = A \cos(2\pi n f + \varphi) \quad n \in \mathbb{Z}$$

y f tiene dimensiones de *ciclos por muestra*.

Definición 2.9 Definimos la energía, E , de una señal $x[n]$ en tiempo discreto a

$$E(x[n]) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

Definición 2.10 Definimos la Potencia Media, P_M , de una señal $x[n]$ en tiempo discreto a:

$$P_M(x[n]) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2$$

Si definimos la energía de $x[n]$ sobre un intervalo $-N \leq n \leq N$, como

$$E_N(x[n]) = \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2$$

entonces

$$E(x[n]) = \lim_{N \rightarrow \infty} E_N(x[n])$$

mientras que

$$P(x[n]) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} E_N(x[n])$$

Teorema 2.11 Si la energía de una señal en tiempo discreto, E , es finita, entonces su potencia media P , es 0.

Demostración: No hay nada más que calcular el límite.

Algunas propiedades de la exponencial compleja en tiempo discreto

Sea la exponencial compleja en tiempo discreto

$$x[n] = Ce^{\beta n}$$

Si $C = re^{i\Omega_c}$, y $\beta = x + iy$, entonces

$$x[n] = re^{i\Omega_c} e^{n(x+iy)} = re^{nx} e^{i(\Omega_c+y)n} = R[n] e^{i\Omega_0 n}$$

y todas las exponenciales complejas se pueden representar de la forma anterior.

Supongamos ahora que $R[n] = 1 \forall n$ y consideremos la señal:

$$x[n] = e^{i\Omega_0 n}$$

Vamos a estudiar su periodicidad. Para ello, tenemos que encontrar un $N \in \mathbb{N}$ de forma que

$$x[n] = x[n+N]$$

y utilizando la expresión de $x[n]$

$$e^{i\Omega_0 n} = e^{i\Omega_0(n+N)} \Leftrightarrow e^{i\Omega_0 n} = e^{i\Omega_0 n} e^{i\Omega_0 N} \Leftrightarrow 1 = e^{i\Omega_0 N}$$

luego $\Omega_0 N$ debe ser un múltiplo entero de 2π , es decir:

$$\Omega_0 N = 2\pi m \quad \text{con } m \in \mathbb{Z}$$

y por tanto la función $x[n] = e^{i\Omega_0 n}$, solamente será periódica cuando

$$\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N} \in \mathbb{Q}$$

El cociente entre Ω_0 y 2π debe ser un número racional. La frecuencia fundamental será

$$\frac{2\pi}{N}$$

con N el periodo fundamental.

Además las señales $e^{i\Omega_0 n}$ se repiten periódicamente ya que si tomamos $\Omega_0 + 2\pi$ entonces

$$x_1[n] = e^{i\Omega_0 n}$$

$$x_2[n] = e^{i(\Omega_0 + 2\pi)n} = e^{i\Omega_0 n} e^{i2\pi n} = e^{i\Omega_0 n} = x_1[n]$$

y de la misma forma las señales con frecuencias $\Omega_0 + 2\pi k$, con $k \in \mathbb{Z}$, son todas iguales y solamente es necesario considerar las señales cuya frecuencia Ω_0 está dentro de un intervalo de longitud 2π , generalmente $[0, 2\pi]$ o $[-\pi, \pi]$.

Debido a esta propiedad las señales $e^{i\Omega_0 n}$ no incrementan continuamente su oscilación al aumentar Ω_0 . Si Ω_0 crece desde 0 hasta 2π , crecen las oscilaciones hasta un máximo en $\Omega_0 = \pi$, y desde donde decrecen hasta llegar a $\Omega_0 = 2\pi$.

Exponenciales complejas en tiempo discreto relacionadas armónicamente

Dentro del conjunto de las señales exponenciales complejas en tiempo discreto y para cada $N \in \mathbb{N}$, se define la familia de funciones

$$\phi_k[n] = e^{ik\frac{2\pi}{N}n}, k \in \mathbb{Z}$$

Podemos comprobar rápidamente que estas señales son periódicas para cualquier valor de $k \in \mathbb{Z}$, puesto que

$$\Omega_0 = \frac{2\pi k}{N} \Rightarrow \frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{2\pi k}{N \cdot 2\pi} = \frac{k}{N} \in \mathbb{Q}$$

Además todas ellas tienen a N , por periodo común.

Teorema 2.12 Para cualquier $N \in \mathbb{N}$,

$$\phi_k[n] = \phi_{k+N}[n]$$

Demostración: Simplemente utilizando la definición.

Este teorema indica que la familia de funciones es finita y solamente es necesario considerar $\phi_k[n]$ para los valores de k comprendidos entre 0 y $N - 1$, es decir, la familia de funciones

$$\{\phi_0[n], \phi_1[n], \dots, \phi_{N-1}[n]\}$$

es una familia finita de exponenciales complejas relacionadas armónicamente; como se verá con posterioridad, esto no sucederá para señales en tiempo continuo.

2.6 Señales en tiempo continuo

Definiremos en primer lugar algunas de las señales en tiempo continuo más utilizadas.

2.6.1 Señales básicas en tiempo continuo

Las siguientes señales son las más usuales en la descripción de los sistemas continuos:

1. *Función escalón unitario*: La función escalón unidad o unitario en tiempo continuo, $u(t)$, se define como:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

que es una función discontinua en $t = 0$ y cuya representación gráfica puede verse en la figura 2.9

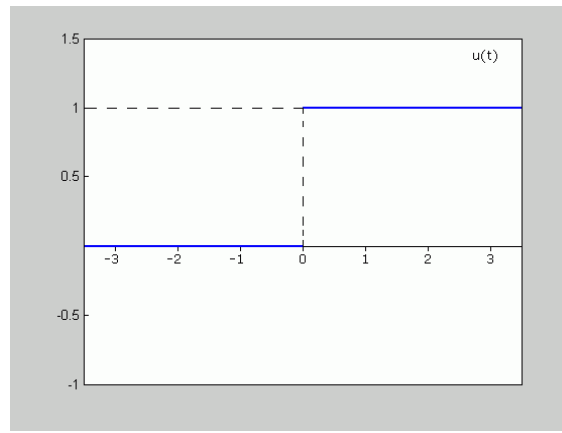


Figura 2.9: Escalón unitario en tiempo continuo, $u(t)$.

2. *Función impulso unitario*: La función impulso unitario en tiempo discreto, $\delta(t)$, se define a partir del escalón unitario $u(t)$ a través de la expresión

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(s) ds = \int_0^{\infty} \delta(t-s) ds$$

o en un sentido no “formal”

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

donde hay que tener en cuenta que $u(t)$ es discontinua en $t = 0$ y por tanto no derivable.

Podemos tener una idea del significado de $\delta(t)$ a través de su construcción a partir del escalón unitario. Definamos en primer lugar la función $u_{\Delta}(t)$ como sigue

$$u_{\Delta}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t/\Delta & 0 \leq t \leq \Delta \\ 1 & t > \Delta \end{cases}$$

cuya representación gráfica está dada por 2.10

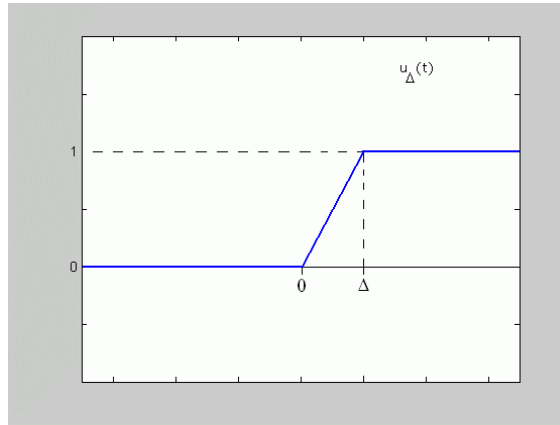


Figura 2.10: Función rampa, $u_{\Delta}(t)$.

Es fácil comprobar que

$$u(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} u_{\Delta}(t)$$

y podemos definir entonces la función $\delta_{\Delta}(t)$ como

$$\delta_{\Delta}(t) = \frac{du_{\Delta}(t)}{dt} = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1/\Delta & 0 < t < \Delta \\ 0 & t > \Delta \end{cases}$$

cuya representación gráfica es

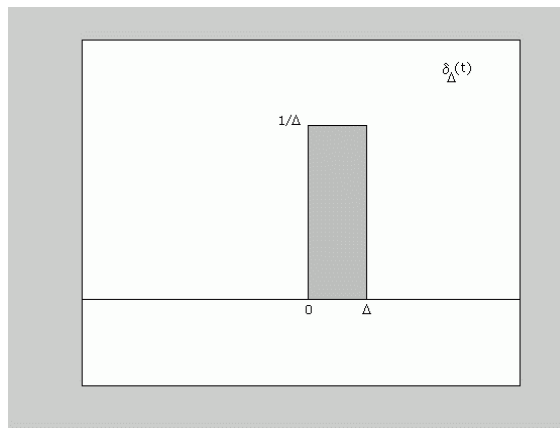


Figura 2.11: Impulso cuadrado, $\delta_{\Delta}(t)$.

y comprobamos además que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\Delta}(t) dt = 1$$

Si ahora $\Delta \rightarrow 0$, la función $\delta_\Delta(t)$ aumenta en altura y disminuye en la base pero manteniendo el área unidad, de forma que en el límite

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_\Delta(t)$$

De esta forma la función impulso unitario en tiempo continuo es una función que cumple las siguientes propiedades:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta(t) = 0 \quad \forall t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \end{array} \right.$$

que tiene mucha importancia en la teoría de distribuciones.

Del mismo modo un impulso de amplitud k , $k\delta(t)$, tendrá un área k y además

$$\int_{-\infty}^t k\delta(s) ds = ku(t)$$

Aunque según la construcción, el valor de $\delta(t)$ en 0 es infinito, el módulo del vector usado para indicar la función impulso unidad puede considerarse como representativo de su área.

También es importante considerar el producto de una señal $\delta(t)$ con cualquier otra señal en tiempo continuo, para ello consideramos el mismo mecanismo que se ha empleado en su definición. Si $x(t)$ es una señal en tiempo continuo, consideramos la construcción de una nueva función $x_\Delta(t)$, definida como

$$x_\Delta(t) = x(t) \delta_\Delta(t)$$

y $x_\Delta(t) = 0$, para cualquier $t \notin [0, \Delta]$. Si tomamos ahora Δ , suficientemente pequeño, podemos considerar $x_\Delta(t)$ constante en $[0, \Delta]$

$$x_\Delta(t) = x(t) \delta_\Delta(t) \cong x(0) \delta_\Delta(t)$$

y si tomamos $\Delta \rightarrow 0$, entonces

$$\delta_\Delta(t) \rightarrow \delta(t)$$

y por tanto

$$x(t) \delta(t) \approx x(0) \delta(t)$$

Del mismo modo podemos escribir

$$x(t) \delta(t - t_0) \approx x(t_0) \delta(t - t_0)$$

3. Función exponencial compleja

$$x(t) = Ce^{\alpha t} \quad C, \alpha \in \mathbb{C}$$

4. Función sinusoidal:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \phi) \quad t \in \mathbb{R}$$

donde si t está en segundos:

A : Amplitud

ω_0 : Frecuencia en radianes/segundo

ϕ : Fase en radianes.

mientras que si definimos

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi) \quad t \in \mathbb{R}$$

y f_0 tiene dimensiones de *ciclos por segundo o Herzios*.

La exponencial compleja y la sinusoidal se utilizan para representar la respuesta de muchos fenómenos físicos como un circuito LC o un sistema mecánico formado por una masa y un muelle, o representar una nota musical.. La relación entre ambas señales está clara a través de la relación de Euler

$$e^{i\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + i \sin(\omega_0 t)$$

Teorema 2.13 Definimos la energía, E , de una señal $x(t)$ en tiempo continuo a

$$E(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

Algunas propiedades de la exponencial compleja en tiempo continuo

Sea la exponencial compleja en tiempo continuo

$$x(t) = e^{i\omega_0 t}$$

Vamos a estudiar su periodicidad. Para ello, tenemos que encontrar un $T \in \mathbb{R}^+$, de forma que

$$x(t) = x(t + T)$$

y utilizando la expresión de $x(t)$

$$e^{i\omega_0 t} = e^{i\omega_0(t+T)} \Leftrightarrow e^{i\omega_0 t} = e^{i\omega_0 t} e^{i\omega_0 T} \Leftrightarrow 1 = e^{i\omega_0 T}$$

luego $\omega_0 T$ debe ser un múltiplo entero de 2π , es decir:

$$\omega_0 T = 2\pi m \quad \text{con } m \in \mathbb{Z}$$

y el periodo será por tanto

$$T = \frac{2\pi m}{|\omega_0|}$$

de forma que para $m = 1$, obtenemos el periodo fundamental:

$$T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$$

que está definido para cualquier valor de $\omega_0 \neq 0$, y por tanto todas las señales exponenciales complejas son periódicas (cuando $\omega_0 \neq 0$)

De la expresión anterior podemos comprobar que si ω_0 decrece, entonces disminuye la proporción de oscilaciones por unidad de tiempo y el periodo aumenta. Por el contrario T_0 disminuye cuando ω_0 crece. Para el caso particular en el que $\omega_0 = 0$, ocurre

$$x(t) = e^{i\omega_0 t} = 1$$

la función es constante y el periodo puede ser cualquier valor > 0 , T_0 estará indefinido.

Exponenciales complejas en tiempo continuo relacionadas armónicamente

Como en el caso discreto, definimos la familia de exponenciales complejas armónicamente relacionadas en tiempo continuo como la familia de funciones:

$$\phi_k(t) = e^{ik\omega_0 t}, k \in \mathbb{Z}$$

Podemos comprobar fácilmente que $\phi_k(t)$ tiene como periodo fundamental

$$T_{0,k} = \frac{2\pi}{|k\omega_0|}$$

siendo el periodo común a todas ellas el periodo fundamental de $\phi_1(t)$, $T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$.

Otra diferencia fundamental entre esta familia de funciones y las correspondientes en el caso de tiempo discreto es que mientras que esta última tiene una cantidad finita de elementos, la familia de funciones continuas tiene un cardinal infinito, puesto que

$$\phi_k(t) = \phi_l(t) \Leftrightarrow e^{ik\omega_0 t} = e^{il\omega_0 t} \Leftrightarrow e^{i(k-l)\omega_0 t} = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

pero la última igualdad implica que k debe ser igual a l , ya que por una parte $(k-l)\omega_0 t$ debe ser un múltiplo de 2π

$$(k-l)\omega_0 t = 2\pi m$$

pero entonces

$$t = \frac{2\pi m}{(k-l)\omega_0}$$

y solamente puede tomar valores discretos, como $t \in \mathbb{R}$, esto no puede pasar, salvo que $k = l$ y en este caso se da la igualdad entre las señales.

La siguiente tabla muestra el resumen de las diferencias entre las exponenciales complejas en tiempo continuo y en tiempo discreto:

	$e^{i\omega_0 t}$	$e^{i\Omega_0 n}$
Igualdad	$e^{i\omega_0 t} \neq e^{i\hat{\omega}_0 t} \Leftrightarrow \omega_0 \neq \hat{\omega}_0$	$e^{i\Omega_0 n} = e^{i\hat{\Omega}_0 n} \Leftrightarrow \Omega_0 = \hat{\Omega}_0 + 2\pi k$
Periodicidad	Periódica $\forall \omega_0$	Periódica $\Leftrightarrow \Omega_0 = \frac{2\pi m}{N}, m, N \in \mathbb{Z}$
Frecuencia Fundamental	ω_0	$\frac{\Omega_0}{m}$
Periodo Fundamental	$\begin{cases} \omega_0 = 0 \Rightarrow T_0 \text{ indefinido} \\ \omega_0 \neq 0 \Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{ \omega_0 } \end{cases}$	$\begin{cases} \Omega_0 = 0 \Rightarrow N_0 \text{ indefinido} \\ \Omega_0 \neq 0 \Rightarrow N_0 = \frac{2\pi}{ \Omega_0 } \end{cases}$

A partir de la señal exponencial compleja en tiempo continuo

$$x(t) = e^{i\omega_0 t}$$

podemos construir una versión en tiempo discreto tomando muestras de $x(t)$ en instantes de tiempo predeterminados $t_n = nT$, $n \in \mathbb{Z}$, $T \in \mathbb{R}$ (discretización de la señal):

$$x[n] = x(nT) = e^{i\omega_0(nT)} = e^{i(\omega_0 T)n}$$

es decir

$$\Omega_0 = \omega_0 T$$

Para que esta señal conserve las propiedades de periodicidad de la señal original debe ocurrir que

$$\frac{2\pi}{\Omega_0} \in \mathbb{Q}$$

es decir

$$\frac{2\pi}{\omega_0 T} = \frac{m}{N}$$

con $m, N \in \mathbb{Z}$. Lo que ocurre cuando elegimos T como

$$T = \frac{2\pi N}{\omega_0 m}$$

2.7 Sistemas discretos y continuos

2.7.1 Introducción

Consideraremos un sistema como un conjunto de elementos que admite una señal de entrada, que puede ser en tiempo discreto o continuo y devuelve una respuesta que es de nuevo otra señal en tiempo discreto o continuo. Un sistema es un proceso que transforma una señal de entrada en una señal de salida, es decir, la salida se relaciona con la entrada a través de las transformaciones que introduce el sistema.

Un sistema será discreto si las señales de entrada y salida son en tiempo discreto, mientras que un sistema es continuo si estas mismas señales están definidas en tiempo continuo.

Esquemáticamente podemos representarlo mediante la siguiente figura 2.12

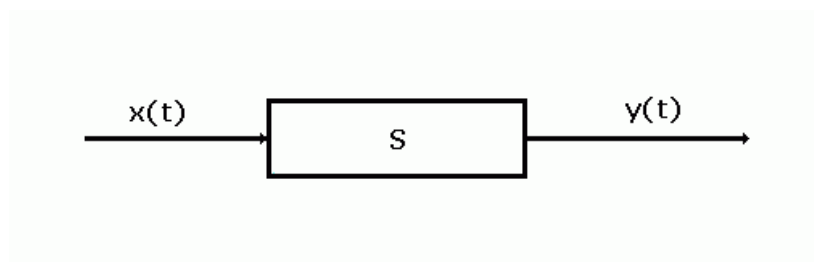


Figura 2.12: Representación en bloques de un sistema.

donde S representa el sistema y $x(t)$ e $y(t)$ la entrada y salida del sistema respectivamente.

Varios sistemas pueden combinarse para formar un único sistema, siendo las combinaciones en serie y paralelo las más utilizadas.

La *conexión en serie* de varios sistemas es equivalente a la composición de funciones. Dos sistemas S_1 y S_2 estarán conectados en serie si la respuesta $y_0(t)$ del primer sistema para una entrada $x(t)$, se utiliza como entrada en el segundo sistema. Podemos ilustrar este mecanismo en la figura

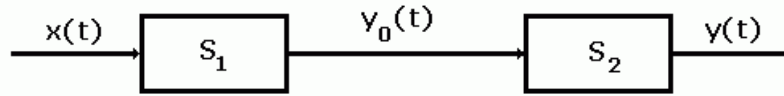


Figura 2.13: Conexión de sistemas en serie.

En la *conexión en paralelo* se utiliza una misma entrada $x(t)$ para todos los sistemas que han sido combinados mediante esta forma (S_1, S_2, \dots) , posteriormente la respuesta que da cada uno de ellos $(y_1(t), y_2(t), \dots)$ a esta entrada es combinada mediante una operación matemática, O , para conseguir la respuesta total del sistema, tal y como se puede observar en la figura 2.14

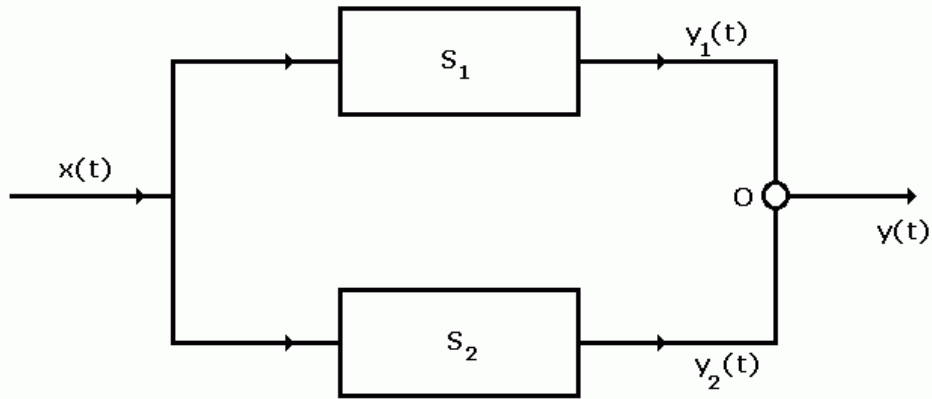


Figura 2.14: Sistemas conectados en paralelo.

Por ejemplo, dados los sistemas

$$y_1(t) = x(t)^2 \quad (S_1)$$

$$y_2(t) = 2x(t) \quad (S_2)$$

la combinación en serie de S_1 y S_2 proporciona

$$y_3(t) = S_2(S_1(x(t))) = 2 * S_1(x(t)) = 2x(t)^2$$

mientras que la combinación en serie de S_2 y S_1 nos daría

$$y_4(t) = S_1(S_2(x(t))) = S_2(x(t))^2 = 4x(t)^2$$

Este ejemplo nos prueba que en general la combinación en serie de dos sistemas no es conmutativo.

Podemos obtener una combinación en paralelo de S_1 y S_2 , si las respectivas salidas se suman para obtener la señal total

$$S(x(t)) = S_1(x(t)) + S_2(x(t)) = x(t)^2 + 2x(t)$$

Estas combinaciones pueden mezclarse para construir sistemas mixtos más complicados. Por ejemplo, podemos conectar dos sistemas en paralelo (S_1 y S_2) y estos con un tercer sistema en serie (S_3) como en la figura 2.15.

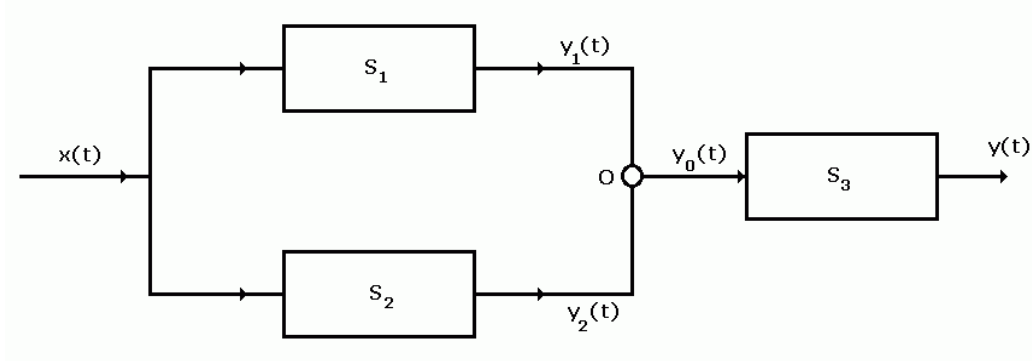


Figura 2.15: Conexión Paralelo-Serie.

Por ejemplo, dados los sistemas

$$y_1(t) = x(t)^2 \quad (S_1)$$

$$y_2(t) = 2x(t) \quad (S_2)$$

$$y_3(t) = x(t)^3 \quad (S_3)$$

la combinación en paralelo de S_1 y S_2 con el operador suma, junto con la combinación en serie de S_3 , nos daría el sistema mixto

$$y(t) = \left(x(t)^2 + 2x(t) \right)^3$$

Otro concepto interesante en la teoría de sistemas es la *retroalimentación* (feedback), en el que la respuesta $y(t)$ de un sistema para una entrada $x(t)$ se vuelve a utilizar como entrada en ese mismo sistema, se ilustra este concepto en la figura 2.16.

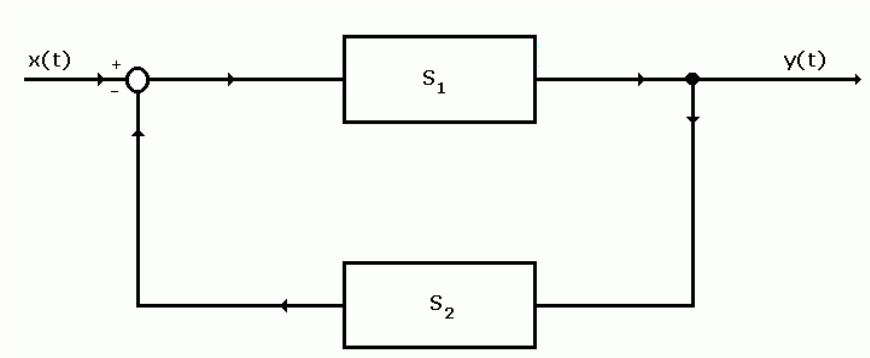


Figura 2.16: Retroalimentación.

Ejemplos físicos de retroalimentación serían por ejemplo un regulador de velocidad en un vehículo o el mecanismo de llenado de una cisterna. Se utiliza el estado actual del sistema para realizar las correcciones adecuadas.

2.7.2 Propiedades de los sistemas

Definición 2.14 *Un sistema S , en tiempo discreto o continuo, se dice sin memoria si su respuesta para cada valor de la variable independiente, sólo depende de la entrada para ese mismo valor de la variable independiente. Es decir, si la variable independiente es el tiempo t (o n para tiempo discreto), entonces un sistema es sin memoria, si la respuesta del sistema en un instante t (o n respectivamente) solamente depende de la entrada al sistema en ese mismo instante. Son sistemas de la forma*

$$y(t) = f(x(t))$$

Por ejemplo

$$y(t) = Rx(t)$$

$$y[n] = x[n] \quad (\text{Sistema Identidad})$$

y en general cualquier sistema descrito mediante una ecuación del tipo

$$y(t) = f(x(t))$$

son sistemas sin memoria; mientras que

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \quad (\text{Acumulador})$$

$$y(t) = x(t-1) \quad (\text{Retraso})$$

$$y(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t x(s) ds \quad (\text{Condensador})$$

son sistemas con memoria.

Definición 2.15 *Un sistema S , en tiempo discreto o continuo es causal si la respuesta del sistema en un instante t (o n), depende sólo de la entrada en ese instante y anteriores. Es decir, un sistema es causal si la respuesta en un instante dado no depende de instantes futuros. A estos sistemas también se les denomina no anticipativos, ya que su respuesta no anticipa valores futuros de la entrada.*

Por ejemplo los sistemas

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

$$y(t) = x(t-1)$$

$$y(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t x(s) ds$$

son causales; mientras que los sistemas

$$y[n] = x[n] - x[n+1]$$

$$y(t) = x(t+1) \quad (\text{Adelanto})$$

$$y[n] = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^M x[n-k] \quad (\text{Media Móvil})$$

son no causales.

Proposición 2.16 *Todos los sistemas sin memoria son causales.*

Demostración: Trivial utilizando la definición.

La causalidad no tiene mucha importancia en aplicaciones como el procesamiento de imágenes donde la variable independiente no es el tiempo. Por otro lado para el procesamiento de datos en los que la variable independiente es t , pero han sido grabados (habla, ECG, EEG, geofísicos, etc..) no estamos restringidos a procesarlos de forma causal.

Definición 2.17 *Un sistema S , en tiempo discreto o continuo, es invertible si existe otro sistema, que denominamos S^{-1} o sistema inverso, de forma que al combinarlo en serie con el primero y utilizar la respuesta del primero (S) como entrada del segundo (S^{-1}) obtenemos la entrada inicial del sistema.*

Por ejemplo si

$$S(x(t)) = 2 * x(t) \Rightarrow S^{-1}(x(t)) = \frac{1}{2}x(t)$$

$$S(x[n]) = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \Rightarrow S^{-1}(x[n]) = x[n] - x[n-1]$$

son sistemas invertibles; mientras que

$$S(x[n]) = 0$$

$$S(x(t)) = x(t)^2$$

no lo son.

Para determinar si un sistema, en tiempo discreto o continuo, es invertible, el camino a seguir es la búsqueda de su sistema inverso; mientras que demostrar que un sistema no es invertible se puede lograr utilizando dos entradas en el sistema que proporcionen la misma respuesta.

Definición 2.18 *Un sistema S , en tiempo discreto o continuo, es estable, si la respuesta del sistema para cualquier entrada acotada es acotada, es decir:*

$$x(t) \xrightarrow{S} y(t) \text{ es estable} \Leftrightarrow \forall x(t) : \exists M > 0 \quad |x(t)| \leq M \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists K > 0 : |y(t)| \leq K \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$x[n] \xrightarrow{S} y[n] \text{ es estable} \Leftrightarrow \forall x[n] : \exists M > 0 \quad |x[n]| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \exists K > 0 : |y[n]| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Ejemplos de sistemas estables son los circuitos RC, un sistema amortiguado y otros, mientras que un sistema inestable puede ser representado por una reacción en cadena, crecimientos de poblaciones sin factores limitantes, etc. Esta propiedad ha de estudiarse para cada sistema.

Los sistemas

$$y[n] = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^M x[n-k]$$

$$y[n] = x[n]$$

son estables, mientras que

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(s) ds$$

no lo es.

Definición 2.19 *Un sistema S , en tiempo discreto o continuo, es invariante en el tiempo, si un desplazamiento temporal en la entrada causa un desplazamiento temporal equivalente en la señal de salida:*

$$x(t) \xrightarrow{S} y(t) \text{ es invariante en el tiempo} \Leftrightarrow \forall t_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow x(t - t_0) \xrightarrow{S} y(t - t_0)$$

$$x[n] \xrightarrow{S} y[n] \text{ es invariante en el tiempo} \Leftrightarrow \forall n_0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x[n - n_0] \xrightarrow{S} y[n - n_0]$$

Por ejemplo los sistemas

$$y(t) = \sin(x(t))$$

$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

son invariantes en el tiempo; mientras que

$$y[n] = nx[n]$$

no lo es.

Definición 2.20 *Un sistema S , en tiempo discreto o continuo, es lineal si tiene la propiedad de superposición; es decir, un sistema es lineal si tiene las dos propiedades siguientes: Si $x_1(t)$, $x_2(t)$ son dos entradas en tiempo continuo de un sistema S :*

$$\left. \begin{array}{l} x_1(t) \xrightarrow{S} y_1(t) \\ x_2(t) \xrightarrow{S} y_2(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \{x_1(t) + x_2(t)\} \xrightarrow{S} \{y_1(t) + y_2(t)\} \quad (\text{Aditividad})$$

$$x_1(t) \xrightarrow{S} y_1(t) \Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{C}, \alpha x_1(t) \xrightarrow{S} \alpha y_1(t) \quad (\text{Homogeneidad})$$

Ambas propiedades se pueden resumir en la propiedad de superposición siguiente:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1(t) \xrightarrow{S} y_1(t) \\ x_2(t) \xrightarrow{S} y_2(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\} \xrightarrow{S} \{\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)\} \quad (\text{Superposición})$$

que indica que un sistema será lineal si cualquier entrada que sea combinación lineal de entradas individuales produce una respuesta que es combinación lineal de las respuestas a cada una de las entradas individuales.

De la definición obtenemos que si

$$x_k(t) \quad k = 1, 2, \dots,$$

es un conjunto de entradas cuyas respuestas son respectivamente

$$y_k(t) \quad k = 1, 2, \dots$$

entonces la señal

$$x(t) = \sum_{k=1} \alpha_k x_k(t) \quad \alpha_k \in \mathbb{C}$$

tiene como respuesta

$$y(t) = \sum_{k=1} \alpha_k y_k(t)$$

Los siguientes son ejemplos de sistemas lineales:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y(t) = \alpha x(t), \alpha \in \mathbb{R} & \text{e) } y(t) = x(t) - x(t-1) \\ \text{b) } y(t) = \sum_{k=-\infty}^n x[k] & \text{f) } y[n] = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^M x[n-k] \\ \text{c) } y(t) = x(t-1) & \text{g) } nx[n] \\ \text{d) } y(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t x(s) ds & \end{array}$$

mientras que los siguientes sistemas son no lineales:

$$\text{h) } y(t) = x^2(t) \quad \text{i) } y(t) = \sin(t)$$

Notar que pueden existir sistemas lineales no invariantes, como el sistema g de la tabla, y sistemas invariantes no lineales como el sistema i , también de la misma tabla.

Observación 2.21 *Del mismo modo podemos definir la linealidad para sistemas y señales en tiempo discreto.*

Teorema 2.22 *Todo sistema lineal tiene respuesta nula a entrada nula.*

Demostración: Trivial tomando $\alpha = 0$, en la propiedad de Homogeneidad.

El recíproco en general no es cierto, es decir, un sistema que tenga respuesta nula a entrada nula no tiene porqué ser lineal; consideremos por ejemplo el sistema

$$y[n] = x[n]^2$$

Sistemas de incremento lineal

Definición 2.23 *Un sistema de incremento lineal en tiempo discreto o continuo es aquel que responde de forma lineal a los cambios en las entradas, es decir, la diferencia entre la respuesta debido a dos entradas diferentes es función lineal de la diferencia entre dichas entradas. Ilustraremos esta definición con un ejemplo.*

Ejemplo 2.24 *Sea el sistema definido como*

$$y[n] = 2x[n] + 3$$

observamos que aunque la definición del sistema implica una función lineal como $2x + 3$, el sistema no es lineal porque para una entrada nula $x[n] = 0, \forall n$; el sistema responde con

$$y_0[n] = 3$$

que no es nula para ningún n . Este hecho resulta paradójico con la expresión lineal del sistema. Si ahora tomamos dos entradas $x_1[n]$ y $x_2[n]$ y hacemos la diferencia entre sus respectivas respuestas

$$\left. \begin{array}{l} y_1[n] = 2x_1[n] + 3 \\ y_2[n] = 2x_2[n] + 3 \end{array} \right\} \Rightarrow y_1[n] - y_2[n] = 2 * (x_1[n] - x_2[n])$$

y el sistema

$$y[n] = 2x[n]$$

si es lineal.

Todos los sistemas de incremento lineal se pueden representar mediante el esquema dado en la figura 2.17

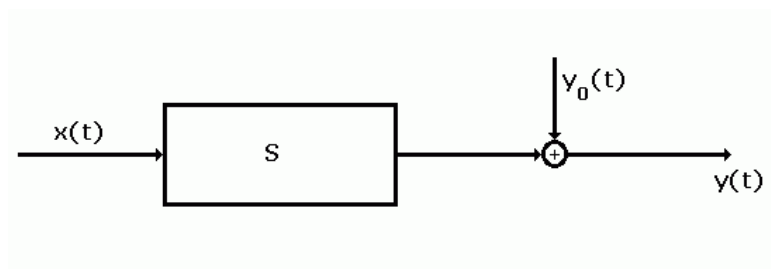


Figura 2.17: Sistema de incremento lineal

donde $y_0(t)$ es la respuesta del sistema lineal S , para una entrada nula y que no está afectada por el sistema.