



1. Sean $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, vectores propios de una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ asociados a valores propios distintos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Razona si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

- Cada vector propio de A tiene asociado un único valor propio.
- Para todo $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\alpha\vec{u}$ es un vector propio asociado al mismo valor propio λ .
- \vec{u} y \vec{v} son vectores linealmente independientes.
- Una matriz tiene el valor propio 0 si y sólo si su determinante es 0.
- $\vec{u} + \vec{v}$ es un vector propio de A .
- Si $n \in \mathbb{N}$, entonces λ^n es un valor propio de A^n y si A es regular, $1/\lambda$ es un valor propio de A^{-1} .
- Si A, C son semejantes entonces tienen el mismo determinante, el mismo polinomio característico y los mismos valores propios.
- Dos matrices diagonalizables son semejantes si y sólo si tienen los mismos valores propios con las mismas multiplicidades.

Solución:

a) Verdadera. Si (λ, \vec{u}) es el valor y vector propios asociados tendremos

$$A\vec{u} = \lambda\vec{u},$$

si u estuviera asociado también a μ , entonces debería cumplirse

$$A\vec{u} = \mu\vec{u}$$

e igualando obtenemos

$$\lambda\vec{u} = \mu\vec{u} \Rightarrow \lambda\vec{u} - \mu\vec{u} = 0 \Rightarrow (\lambda - \mu)u\vec{u} = 0$$

y como \vec{u} es un vector propio, entonces $\vec{u} \neq 0$ y por tanto

$$\lambda - \mu = 0 \Leftrightarrow \lambda = \mu.$$

b) Verdadera. Si (λ, \vec{u}) es el valor y vector propios asociados tendremos $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$

$$A(\alpha\vec{u}) = \alpha A\vec{u} = \alpha\lambda\vec{u} = \lambda(\alpha\vec{u})$$

luego $\alpha\vec{u}$ es un vector propio asociado al valor propio λ .

c) Verdadero. Si \vec{u} y \vec{v} fueran linealmente dependientes, entonces debería existir $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que $\vec{v} = \alpha\vec{u}$, y por el apartado anterior ambos vectores serían vectores propios del valor propio λ , lo que contradice el enunciado.

d) Verdadero. Suponiendo que 0 es un valor propio de A entonces, debe existir $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$, con $\vec{u} \neq 0$, vector propio asociado de forma que

$$A\vec{u} = 0\vec{u} = 0$$

es decir, el sistema

$$A\vec{x} = 0$$

tiene como solución no nula a \vec{u} y por tanto es un sistema compatible indeterminado y por el teorema de Rouché-Frobenius eso implica que $\det(A) = 0$ y viceversa.

e) Falso. Suponiendo que $\vec{u} + \vec{v}$ fuera un vector propio de A , entonces debería existir un $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que

$$A(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha(\vec{u} + \vec{v})$$

pero si aplicamos la propiedad distributiva tendremos

$$A\vec{u} + A\vec{v} = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}.$$

Ahora bien, \vec{u} es un vector propio de A con valor propio asociado λ y \vec{v} es un vector propio de A con valor propio asociado μ , por tanto

$$\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$$

de donde

$$(\lambda - \alpha)\vec{u} + (\mu - \alpha)\vec{v} = 0,$$

como por el apartado c, los vectores \vec{u} y \vec{v} son linealmente independientes, debe cumplirse

$$\lambda - \alpha = \mu - \alpha = 0$$

que conduce a

$$\lambda = \mu,$$

lo que contradice el enunciado del problema.

f) Ambas son verdaderas. Lo hacemos por inducción en n . Supongamos que $n = 2$, entonces

$$A^2\vec{u} = A(A\vec{u})$$

como \vec{u} es un vector propio de A , con valor propio asociado λ , tendremos $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$, luego

$$A(A\vec{u}) = A(\lambda\vec{u}) = \lambda(A\vec{u}) = \lambda(\lambda\vec{u}) = \lambda^2\vec{u}$$

luego λ^2 es un valor propio de A^2 asociado al vector propio \vec{u} . Suponiendo ahora que la propiedad es cierta para $n \in \mathbb{N}$, es decir λ^n es un valor propio de A^n , demostraremos a continuación que λ^{n+1} es un valor propio de A^{n+1} :

$$A^{n+1}\vec{u} = A(A^n\vec{u}) = A(\lambda^n\vec{u}) = \lambda^n(A\vec{u}) = \lambda^n(\lambda\vec{u}) = \lambda^{n+1}\vec{u}.$$

Para la segunda afirmación suponemos que A es regular, es decir, A es invertible, existe A^{-1} y $\det(A) \neq 0$. Supongamos que \vec{u} es un vector propio de A asociado al valor propio λ , es decir

$$A\vec{u} = \lambda\vec{u}$$

Multiplicamos a izquierda por A^{-1}

$$A^{-1}(A\vec{u}) = A^{-1}(\lambda\vec{u})$$

por tanto

$$A^{-1}A\vec{u} = \lambda(A^{-1}\vec{u}) \Rightarrow I_n\vec{u} = \lambda(A^{-1}\vec{u}) \Rightarrow \lambda(A^{-1}\vec{u}) = \vec{u}$$

Como A es regular, entonces por el apartado d, $\lambda \neq 0$ y podemos dividir por este valor

$$(A^{-1}\vec{u}) = \frac{1}{\lambda}\vec{u}$$

de modo que $\frac{1}{\lambda}$ es un valor propio de A^{-1} asociado al vector propio \vec{u} .

g) Verdadero. Si A y C son semejantes, entonces $\exists Q \in M_n(\mathbb{R})$, matriz invertible tal que

$$A = Q^{-1}CQ$$

Está claro que

$$\det(A) = \det(Q^{-1}CQ) = \det(Q^{-1}) \det(C) \det(Q)$$

y como y como

$$\det(Q^{-1}) = \frac{1}{\det(Q)}$$

está claro que

$$\det(A) = \det(C).$$

El polinomio característico de A es

$$\phi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

o bien, por la semejanza de matrices

$$\phi_A(\lambda) = \det(Q^{-1}CQ - \lambda I)$$

Por otra parte, podemos poner

$$I = Q^{-1}Q$$

para obtener

$$\phi_A(\lambda) = \det(Q^{-1}CQ - \lambda Q^{-1}Q)$$

que se puede expresar como

$$\phi_A(\lambda) = \det(Q^{-1}(C - \lambda I)Q)$$

finalmente por las propiedades de los determinantes

$$\phi_A(\lambda) = \det(Q^{-1}(C - \lambda I)Q) = \phi_A(\lambda) = \det(Q^{-1}) \det(C - \lambda I) \det(Q)$$

y se deduce

$$\phi_A(\lambda) = \det(C - \lambda I) = \phi_C(\lambda)$$

Obviamente al ser el mismo polinomio característico, sus raíces serán las mismas y por tanto los valores propios de ambas matrices coinciden.

h) Verdadero. Si A y C son semejantes, entonces por el apartado anterior tienen el mismo polinomio característico y por tanto tienen las mismas raíces con las mismas multiplicidades.

Supongamos ahora que A y C son diagonalizables y tienen los mismos valores propios con las mismas multiplicidades. Como A y C son diagonalizables, entonces son semejantes a la misma matriz diagonal, puesto que esta matriz está formada por los valores propios, incluidas multiplicidades que, en ambas matrices, son iguales. Luego A y C son semejantes a cierta matriz diagonal D , es decir, existen matrices P y Q tal que

$$\begin{aligned} A &= P^{-1}DP \Leftrightarrow PAP^{-1} = D \\ C &= Q^{-1}DP \Leftrightarrow QCQ^{-1} = D \end{aligned}$$

es decir

$$PAP^{-1} = QCQ^{-1}$$

multiplicando a la izquierda por P^{-1} y a la derecha por P ambos miembros de la igualdad tendremos

$$P^{-1}PAP^{-1}P = P^{-1}QCQ^{-1}P$$

y podemos escribir

$$A = P^{-1}QCQ^{-1}P$$

Si ahora usamos que

$$(Q^{-1}P)^{-1} = P^{-1} \cdot (Q^{-1})^{-1} = P^{-1}Q$$

entonces

$$A = (Q^{-1}P)^{-1} C (Q^{-1}P)$$

es decir existe una matriz $R = Q^{-1}P$ tal que

$$A = R^{-1}CR$$

luego A y C son semejantes.

2. Estudiar los valores propios de las siguientes matrices, decir si son diagonalizables y en caso afirmativo obtener la matriz de paso y la potencia n -ésima, siendo $n \in \mathbb{N}$.

$$(a) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \quad (b) B = \begin{pmatrix} -26 & -15 \\ 50 & 29 \end{pmatrix} \quad (c) C = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad (d) D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(e) E = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad (f) F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (g) G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (h) H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(i) J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ -6 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

a)

$$\phi_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 6 & -3-\lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 + \lambda,$$

$$\phi_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0 \text{ y } \lambda_2 = -1$$

Como los valores propios son reales y distintos, la matriz es diagonalizable. A continuación los vectores propios correspondientes. Para el autovalor $\lambda_1 = 0$

$$\ker(A - \lambda_1 I) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 6x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 2x,$$

los autovectores son de la forma $(x, 2x) \Rightarrow N_{\lambda_1} = \langle (1, 2) \rangle$.

Para el autovalor $\lambda_2 = -1$

$$\ker(A - \lambda_2 I) \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 0 \\ 6x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 3x,$$

los autovectores son de la forma $(x, 3x) \Rightarrow N_{\lambda_2} = \langle (1, 3) \rangle$. Por tanto

$$D_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P_A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow P_A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^n \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

b)

$$\phi_B(\lambda) = |B - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} -26 - \lambda & -15 \\ 50 & 29 - \lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 - 3\lambda - 4,$$

$$\phi_B(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \Leftrightarrow \lambda_1 = 4 \text{ y } \lambda_2 = -1$$

Como los valores propios son reales y distintos, la matriz es diagonalizable. A continuación los vectores propios correspondientes. Para el autovalor $\lambda_1 = 4$

$$\ker(B - \lambda_1 I) \Rightarrow \begin{pmatrix} -30 & -15 \\ 50 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -30x - 15y = 0 \\ 50x + 25y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -2x,$$

los autovectores son de la forma $(x, -2x) \Rightarrow N_{\lambda_1} = \langle (1, -2) \rangle$.

Para el autovalor $\lambda_2 = -1$

$$\ker(B - \lambda_2 I) \Rightarrow \begin{pmatrix} -25 & -15 \\ 50 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -25x - 15y = 0 \\ 50x + 30y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -\frac{5}{3}x,$$

los autovectores son de la forma $(x, -\frac{5}{3}x) \Rightarrow N_{\lambda_2} = \langle (1, -\frac{5}{3}) \rangle = \langle (3, -5) \rangle$. Por tanto

$$D_B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow P_B = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} B^n &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 \times 4^n - 6 & -3 \times 4^n - 3 \\ 10 \times 4^n + 10 & 6 \times 4^n + 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c)

$$\phi_C(\lambda) = |C - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} -2 - \lambda & -1 \\ 4 & 2 - \lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda^2,$$

$$\phi_C(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0 \text{ y } m(\lambda_1) = 2$$

Calculamos el subespacio propio asociado a $\lambda_1 = 0$

$$\ker(C - \lambda_1 I) \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - y = 0 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -2x,$$

los autovectores son de la forma $(x, -2x) \Rightarrow N_{\lambda_1} = \langle (1, -2) \rangle$, que tiene dimensión 1, como la multiplicidad de λ_1 es $2 \neq 1$, la matriz no es diagonalizable.

d)

$$\phi_D(\lambda) = |D - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 5 \\ -1 & -2 - \lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 + 1,$$

$$\phi_D(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = i \text{ y } \lambda_2 = -i.$$

Como los valores propios son complejos la matriz no es diagonalizable sobre \mathbb{R} .

e)

$$\phi_E(\lambda) = |E - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 5 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 5 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 5 - \lambda \end{pmatrix} \right| = -\lambda^3 + 15\lambda^2 - 72\lambda + 112$$

$$\phi_E(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 15\lambda^2 - 72\lambda + 112 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 4 \text{ con } m(\lambda_1) = 2 \text{ y } \lambda_2 = 7 \text{ con } m(\lambda_2) = 1$$

Calculamos los subespacios propios. Para el autovalor $\lambda_1 = 4$

$$\ker(E - \lambda_1 I) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = -x - y,$$

los autovectores son de la forma $(x, y, -x - y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1) \Rightarrow N_{\lambda_1} = \langle \{(1, 0, -1); (0, 1, -1)\} \rangle$.

Para el autovalor $\lambda_2 = 7$

$$\ker(E - \lambda_2 I) \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z,$$

los autovectores son de la forma $(x, x, x) \Rightarrow N_{\lambda_2} = \langle (1, 1, 1) \rangle$ Por tanto

$$D_E = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$P_E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P_E = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} E^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 7^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}4^n + \frac{1}{3}7^n & \frac{1}{3}7^n - \frac{1}{3}4^n & \frac{1}{3}7^n - \frac{1}{3}4^n \\ \frac{1}{3}7^n - \frac{1}{3}4^n & \frac{2}{3}4^n + \frac{1}{3}7^n & \frac{1}{3}7^n - \frac{1}{3}4^n \\ \frac{1}{3}7^n - \frac{1}{3}4^n & \frac{1}{3}7^n - \frac{1}{3}4^n & \frac{2}{3}4^n + \frac{1}{3}7^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

f)

$$\phi_F(\lambda) = |F - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 & 3 \\ 0 & 1 - \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \right| = (1 - \lambda)^3$$

$$\phi_F(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1 \text{ con } m(\lambda_1) = 3$$

Calculamos el subespacios propios para el autovalor $\lambda_1 = 1$

$$\ker(F - \lambda_1 I) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y + 3z = 0 \\ 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = z = 0,$$

los autovectores son de la forma $(x, 0, 0) = x(1, 0, 0) \Rightarrow N_{\lambda_1} = \langle \{(1, 0, 0)\} \rangle$. Como $\dim(N_{\lambda_1}) = 1 \neq m(\lambda_1)$ la matriz no es diagonalizable.

g)

$$\phi_G(\lambda) = |G - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 & 3 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \right| = (1 - \lambda)^3$$

$$\phi_G(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1 \text{ con } m(\lambda_1) = 3.$$

Calculamos el subespacio propio para el autovalor $\lambda_1 = 1$

$$\ker(G - \lambda_1 I) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y + 3z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = -\frac{2}{3}y,$$

los autovectores son de la forma $(x, y, -\frac{2}{3}y) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, -\frac{2}{3}) \Rightarrow N_{\lambda_1} = \langle \{(1, 0, 0); (0, 1, -\frac{2}{3})\} \rangle$.
Como $\dim(N_{\lambda_1}) = 2 \neq m(\lambda_1)$, la matriz no es diagonalizable.

h)

$$\phi_H(\lambda) = |H - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 & 3 \\ 3 & -1 - \lambda & 3 \\ 0 & 0 & -2 - \lambda \end{pmatrix} \right| = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda + 8$$

$$\phi_H(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2 \text{ con } m(\lambda_1) = 1 \text{ y } \lambda_2 = -2 \text{ con } m(\lambda_2) = 2$$

Calculamos los subespacios propios. Para el autovalor $\lambda_1 = 2$

$$\ker(H - \lambda_1 I) \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + 3z = 0 \\ 3x - 3y + 3z = 0 \\ -4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = 0; x = y,$$

los autovectores son de la forma $(x, x, 0) = x(1, 1, 0) \Rightarrow N_{\lambda_1} = \langle \{(1, 1, 0)\} \rangle$.

Para el autovalor $\lambda_2 = -2$

$$|H - \lambda_2 I| = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y + 3z = 0 \\ 3x + y + 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -3(x + z),$$

los autovectores son de la forma

$$(x, -3(x + z), z) = x(1, -3, 0) + z(0, -3, 1) \Rightarrow N_{\lambda_2} = \langle \{(1, -3, 0); (0, -3, 1)\} \rangle.$$

Por tanto

$$D_H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P_H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P_H = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
H^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(-2)^n + \frac{3}{4}2^n & \frac{1}{4}2^n - \frac{1}{4}(-2)^n & \frac{3}{4}2^n - \frac{3}{4}(-2)^n \\ \frac{3}{4}2^n - \frac{3}{4}(-2)^n & \frac{3}{4}(-2)^n + \frac{1}{4}2^n & \frac{3}{4}2^n - \frac{3}{4}(-2)^n \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

i)

$$\phi_J(\lambda) = |J - \lambda I_n| = \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda & -1 \\ -6 & 3 & 3 & 4-\lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda^4 - 5\lambda^3 + 9\lambda^2 - 7\lambda + 2 = (\lambda - 1)^3(\lambda - 2)$$

$$\phi_J(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^4 - 5\lambda^3 + 9\lambda^2 - 7\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1 \text{ con } m(\lambda_1) = 3 \text{ y } \lambda_2 = 2 \text{ con } m(\lambda_2) = 1$$

Calculamos los subespacios propios. Para el autovalor $\lambda_1 = 1$

$$\ker(J - \lambda_1 I) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ -6 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 2x - y - z - t = 0 \\ 2x - y - z - t = 0 \\ -6x + 3y + 3z + 3t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2x - y - z,$$

los autovectores son de la forma $(x, y, z, 2x - y - z) = x(1, 0, 0, 2) + y(0, 1, 0, -1) + z(0, 0, 1, -1) \Rightarrow N_{\lambda_1} = \langle \{(1, 0, 0, 2); (0, 1, 0, -1); (0, 0, 1, -1)\} \rangle$.

Para el autovalor $\lambda_2 = 2$

$$|J - \lambda_2 I| = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ -6 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = 0 \\ 2x - 2y - z - t = 0 \\ 2x - y - 2z - t = 0 \\ -6x + 3y + 3z + 2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = y \\ t = -3y \end{cases},$$

los autovectores son de la forma $(0, y, y, -3y) = y(0, 1, 1, -3) \Rightarrow N_{\lambda_2} = \langle \{(0, 1, 1, -3)\} \rangle$. Por tanto

$$D_J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_J^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \Rightarrow P_J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
J^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 \times 2^n - 2 & 2 - 2^n & 1 - 2^n & 1 - 2^n \\ 2 \times 2^n - 2 & 1 - 2^n & 2 - 2^n & 1 - 2^n \\ 6 - 6 \times 2^n & 3 \times 2^n - 3 & 3 \times 2^n - 3 & 3 \times 2^n - 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

3. Estudiar según los valores de los parámetros, si son diagonalizables las siguientes matrices:

$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{(b) } B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad \text{(c) } C = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

a)

$$\phi_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & \alpha-\lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda(\lambda-3)(\alpha-\lambda)$$

$$\phi_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-3)(\alpha-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = \alpha$$

Si $\alpha \notin \{0, 3\} \Rightarrow$ Todos los valores son reales y distintos, por tanto la matriz será diagonalizable.

Supongamos que $\alpha = 0$, entonces $\lambda_1 = 0$ es un valor propio con $m(\lambda_1) = 2$. Para que A sea diagonalizable en este caso $\dim(N_{\lambda_1}) = 2$

$$\ker(A - \lambda_1 I) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=0 \\ x+2y=0 \\ x+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2y,$$

los autovectores son de la forma $(-2y, y, z) = y(-2, 1, 0) + z(0, 0, 1) \Rightarrow N_{\lambda_1} = \{(-2, 1, 0); (0, 0, 1)\}$ y por tanto $\dim(N_{\lambda_1}) = 2$ y la matriz A será diagonalizable.

Supongamos que $\alpha = 3$, entonces $\lambda_2 = 3$ es un valor propio con $m(\lambda_2) = 2$. Para que A sea diagonalizable en este caso $\dim(N_{\lambda_2}) = 2$

$$\ker(A - \lambda_2 I) \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+2y=0 \\ x-y=0 \\ x+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0,$$

los autovectores son de la forma $(0, 0, z) = z(0, 0, 1) \Rightarrow N_{\lambda_2} = \{(0, 0, 1)\}$ Por tanto la matriz no será diagonalizable en este caso.

b)

$$\phi_B(\lambda) = |B - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & \alpha & 1 \\ 0 & 1-\lambda & \beta \\ 0 & 0 & \gamma-\lambda \end{pmatrix} \right| = (1-\lambda)^2(\gamma-\lambda)$$

$$\phi_B(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2(\gamma-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = \gamma$$

Distinguimos dos casos, si $\gamma = 1$ o si $\gamma \neq 1$.

Supongamos que $\gamma = 1$, entonces $\lambda_1 = 1$ es un valor propio con $m(\lambda_1) = 3$. Para que B sea diagonalizable en este caso $\dim(N_{\lambda_1}) = 3$

$$\ker(B - \lambda_1 I) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha y + z = 0 \\ \beta y = 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación tendremos dos opciones: $\beta \neq 0$ o $\beta = 0$. Si $\beta \neq 0 \Rightarrow y = 0$, y la primera ecuación nos daría $z = 0$, de modo que los autovectores son de la forma $(x, 0, 0) = x(1, 0, 0) \Rightarrow N_{\lambda_1} = \langle \{(1, 0, 0)\} \rangle$ y por tanto $\dim(N_{\lambda_1}) = 1$ y la matriz A no será diagonalizable. Para el caso $\beta = 0$, entonces sólo nos queda la ecuación $\alpha y + z = 0 \Rightarrow z = -\alpha y$, de modo que los autovectores son de la forma $(x, y, -\alpha y) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, -\alpha) \Rightarrow N_{\lambda_1} = \langle \{(1, 0, 0), (0, 1, -\alpha)\} \rangle$ y por tanto $\dim(N_{\lambda_1}) = 2$ y la matriz B no será diagonalizable

Supongamos ahora que $\gamma \neq 1$, entonces $\lambda_1 = 1$ es un valor propio con $m(\lambda_1) = 2$. Para que B sea diagonalizable en este caso $\dim(N_{\lambda_2}) = 2$

$$\ker(B - \lambda_2 I) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha y + z = 0 \\ \beta y = 0 \\ (\gamma - 1)z = 0 \end{cases}$$

Como $\gamma \neq 1$, la última ecuación nos da $z = 0$, así que nos queda

$$\begin{aligned} \alpha y &= 0 \\ \beta y &= 0 \end{aligned}$$

Para $\alpha \neq 0$ o $\beta \neq 0$ las ecuaciones nos dan $y = 0$ y los autovectores son de la forma $(x, 0, 0) = x(1, 0, 0) \Rightarrow N_{\lambda_1} = \langle \{(1, 0, 0)\} \rangle$, por tanto la matriz no sería diagonalizable en este caso. Si $\alpha = \beta = 0$, entonces los autovectores son de la forma $(x, y, 0) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) \Rightarrow N_{\lambda_1} = \langle \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\} \rangle$ y la matriz sí sería diagonalizable. En resumen

$$\begin{cases} \gamma = 1 \Rightarrow A \text{ no diagonalizable} \\ \gamma \neq 1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha \neq 0 \text{ o } \beta \neq 0 \Rightarrow B \text{ no diagonalizable} \\ \alpha = \beta = 0 \Rightarrow B \text{ diagonalizable} \end{cases} \end{cases}$$

o B es diagonalizable si $\gamma \neq 1$ y $\alpha = \beta = 0$.

c)

$$\phi_C(\lambda) = |C - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} \alpha - \lambda & 0 & 0 \\ -1 & 1 - \lambda & 2 \\ 1 & 3 & 2 - \lambda \end{pmatrix} \right| = (\alpha - \lambda)(\lambda - 4)(\lambda + 1)$$

$$\phi_C(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (\alpha - \lambda)(\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \alpha, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -1$$

Si $\alpha \notin \{4, -1\} \Rightarrow$ Todos los valores son reales y distintos, por tanto la matriz será diagonalizable.

Supongamos que $\alpha = 4$, entonces $\lambda_1 = 4$ es un valor propio con $m(\lambda_1) = 2$. Para que C sea diagonalizable en este caso $\dim(N_{\lambda_1}) = 2$

$$\ker(C - \lambda_1 I) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -x - 3y + 2z = 0 \\ x + 3y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2z - 3y,$$

los autovectores son de la forma $(2z - 3y, y, z) = y(-3, 1, 0) + z(2, 0, 1) \Rightarrow N_{\lambda_1} = \langle \{(-3, 1, 0), (2, 0, 1)\} \rangle$ y por tanto $\dim(N_{\lambda_1}) = 2$ y la matriz C será diagonalizable.

Supongamos que $\alpha = -1$, entonces $\lambda_3 = -1$ es un valor propio con $m(\lambda_3) = 2$. Para que C sea diagonalizable en este caso $\dim(N_{\lambda_3}) = 2$

$$\ker(C - \lambda_2 I) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -x + 2y + 2z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ y = -\frac{4}{5}z \\ x = \frac{2}{5}z \end{cases},$$

los autovectores son de la forma $(\frac{2}{5}z, -\frac{4}{5}z, z) = z(\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, 1) \Rightarrow N_{\lambda_2} = \langle \{(\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, 1)\} \rangle$ Por tanto la matriz no será diagonalizable en este caso.

4. Sea f un endomorfismo diagonalizable de \mathbb{R}^3 con valores propios $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$ y subespacios propios $N_{\lambda_1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0\}$ y $N_{\lambda_2} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0, x + y = 0\}$. Calcula la expresión analítica de f .

Solución: Como f es un endomorfismo diagonalizable, la matriz asociada las bases canónicas de \mathbb{R}^3 es diagonalizable, es decir, existe una matriz diagonal D y una matriz de paso (cambio de base) P , tal que

$$M_C(f) = P^{-1}DP$$

Como f es diagonalizable

$$\dim N_{\lambda_k} = m(\lambda_k)$$

Para N_{λ_1}

$$x + z = 0 \Leftrightarrow z = -x \Rightarrow (x, y, -x) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, 0) \Rightarrow N_{\lambda_1} = \langle \{(1, 0, -1); (0, 1, 0)\} \rangle \Rightarrow \dim N_{\lambda_1} = 2$$

mientras que para N_{λ_2}

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = 0; y = -x \Rightarrow (x, -x, 0) = x(1, -1, 0) \Rightarrow N_{\lambda_2} = \langle \{(1, -1, 0)\} \rangle \Rightarrow \dim N_{\lambda_2} = 1$$

por tanto $\lambda_1 = 1$ tiene multiplicidad 2 y $\lambda_2 = -1$ tiene multiplicidad 1, por tanto

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$M_C(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y la expresión analítica es

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x - 2z \\ 2x + y + 2z \\ z \end{pmatrix}$$

5. Sea f un endomorfismo diagonalizable de \mathbb{R}^3 con valores propios $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = 2$, y subespacios propios $N_{\lambda_1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0; x - z = 0\}$, $N_{\lambda_2} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, y + z = 0\}$ y $N_{\lambda_3} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0, 2x + y = 0\}$. Calcula la expresión analítica de f .

Solución: Como f es un endomorfismo diagonalizable, la matriz asociada las bases canónicas de \mathbb{R}^3 es diagonalizable, es decir, existe una matriz diagonal D y una matriz de paso (cambio de base) P , tal que

$$M_C(f) = P^{-1}DP$$

Para N_{λ_1}

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z \Rightarrow (x, x, x) = x(1, 1, 1) \Rightarrow N_{\lambda_1} = \langle \{(1, 1, 1)\} \rangle \Rightarrow \dim N_{\lambda_1} = 1$$

para N_{λ_2}

$$\begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0; z = -y \Rightarrow (0, y, -y) = y(0, 1, -1) \Rightarrow N_{\lambda_2} = \langle \{(0, 1, -1)\} \rangle \Rightarrow \dim N_{\lambda_2} = 1$$

para N_{λ_3}

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0 \Rightarrow (0, 0, z) = z(0, 0, 1) \Rightarrow N_{\lambda_3} = \langle \{(0, 0, 1)\} \rangle \Rightarrow \dim N_{\lambda_3} = 1$$

Como los valores propios son reales y distintos

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

: y

$$M_C(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

y la expresión analítica es

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x - y \\ 3y - 5x + 2z \end{pmatrix}.$$

6. Hallar el polinomio característico, los valores propios y los subespacios propios de las siguientes matrices:

$$(a) A = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (b) B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(c) C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (d) D = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

a)

$$\phi_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 9 \\ 4 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \right| = (1 - \lambda)^2 - 36 = \lambda^2 - 2\lambda - 35$$

$$\phi_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 35 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 7 \text{ con } m(\lambda_1) = 1 \text{ y } \lambda_2 = -5 \text{ con } m(\lambda_2) = 1$$

Calculamos los subespacios propios. Para el autovalor $\lambda_1 = 7$

$$\ker(A - \lambda_1 I) \Rightarrow \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x + 9y = 0 \\ 4x - 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x,$$

los autovectores son de la forma $(x, \frac{2}{3}x) = x(1, \frac{2}{3}) \implies N_{\lambda_1} = \langle \{(3, 2)\} \rangle$.

Para el autovalor $\lambda_2 = -5$

$$\ker(A - \lambda_2 I) \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 9y = 0 \\ 4x + 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x,$$

los autovectores son de la forma $(x, -\frac{2}{3}x) = x(1, -\frac{2}{3}) \implies N_{\lambda_1} = \langle \{(3, -2)\} \rangle$ Por tanto

$$D_A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$P_A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow P_A = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

b)

$$\phi_B(\lambda) = |B - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 4 & 2-\lambda & 0 \\ 3 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \right| = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 12\lambda = -\lambda(\lambda-4)(\lambda-3)$$

$$\phi_B(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\lambda(\lambda-4)(\lambda-3) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4 \text{ y } \lambda_3 = 3 \text{ con } m(\lambda_k) = 1.$$

Calculamos los subespacios propios. Para el autovalor $\lambda_1 = 0$

$$\ker(B - \lambda_1 I) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 4x + 2y = 0 \\ 3x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -2x, z = \frac{x}{3}$$

los autovectores son de la forma $(x, -2x, \frac{x}{3}) = x(1, -2, \frac{1}{3}) \implies N_{\lambda_1} = \langle \{(3, -6, 1)\} \rangle$.

Para el autovalor $\lambda_2 = 4$

$$\ker(B - \lambda_2 I) \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y = 0 \\ 4x - 2y = 0 \\ 3x + 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 2x, z = 7x,$$

los autovectores son de la forma $(x, 2x, 7x) = x(1, 2, 7) \implies N_{\lambda_2} = \langle \{(1, 2, 7)\} \rangle$.

Para el autovalor $\lambda_2 = 3$

$$\ker(B - \lambda_2 I) \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ 4x - y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0,$$

los autovectores son de la forma $(0, 0, z) = z(0, 0, 1) \implies N_{\lambda_3} = \langle \{(0, 0, 1)\} \rangle$.

$$D_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P_B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{11}{3} & -\frac{5}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$\phi_C(\lambda) = |C - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ 3 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \right| = (2-\lambda)(3-\lambda)^2$$

$$\phi_C(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)(3-\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2 \text{ con } m(\lambda_1) = 1 \text{ y } \lambda_2 = 3 \text{ con } m(\lambda_2) = 2$$

Calculamos los subespacios propios. Para el autovalor $\lambda_1 = 2$

$$\ker(C - \lambda_1 I) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ x + y = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -x, z = -x$$

los autovectores son de la forma $(x, -x, -x) = x(1, -1, -1) \Rightarrow N_{\lambda_1} = \langle \{(1, -1, -1)\} \rangle$.

Para el autovalor $\lambda_2 = 3$

$$\ker(C - \lambda_2 I) \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = 0 \\ x = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0,$$

los autovectores son de la forma $(0, 0, x) = x(0, 0, 1) \Rightarrow N_{\lambda_2} = \langle \{(0, 0, 1)\} \rangle$ No es diagonalizable.

d)

$$\phi_D(\lambda) = |D - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 6 - \lambda & 1 & 0 \\ 3 & 8 - \lambda & 0 \\ 2 & 2 & 5 - \lambda \end{pmatrix} \right| = -\lambda^3 + 19\lambda^2 - 115\lambda + 225 = -(\lambda - 5)^2(\lambda - 9)$$

$$\phi_D(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -(\lambda - 5)^2(\lambda - 9) \Leftrightarrow \lambda_1 = 5 \text{ con } m(\lambda_1) = 2 \text{ y } \lambda_2 = 9 \text{ con } m(\lambda_2) = 1$$

Calculamos los subespacios propios. Para el autovalor $\lambda_1 = 5$

$$\ker(D - \lambda_1 I) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 3x + 3y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -x$$

los autovectores son de la forma $(x, -x, z) = x(1, -1, 0) + z(0, 0, 1) \Rightarrow N_{\lambda_1} = \langle \{(1, -1, 0); (0, 0, 1)\} \rangle$.

Para el autovalor $\lambda_2 = 9$

$$\ker(D - \lambda_2 I) \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + y = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 2x + 2y - 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 3x, z = 2x$$

los autovectores son de la forma $(x, 3x, 2x) = x(1, 3, 2) \Rightarrow N_{\lambda_2} = \langle (1, 3, 2) \rangle$. Por tanto

$$D_D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$P_D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow P_D = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

7. Consideremos el tensor¹ $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido como $T(x, y) = (2x - y, x + 4y)$. Si consideramos el sistema de referencia² habitual en Física $B = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$, es decir la base canónica de \mathbb{R}^2 , entonces T está representado por la matriz

$$T_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

es decir, $T_1 = M_{B \rightarrow B}(T)$. Si ahora consideramos un nuevo sistema de referencia dado por los vectores $B' = \{v_1 = (1, -1), v_2 = (3, 2)\}$, entonces el tensor T viene representado por la matriz

$$T_2 = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

¹En este contexto el tensor es sinónimo de endomorfismo sobre \mathbb{R}^2 .

²En este contexto un sistema de referencia en el es una base del espacio vectorial correspondiente.

Comprueba que los autovalores de las matrices T_1 y T_2 son iguales y que los autovectores también son los mismos, sin embargo, las coordenadas de éstos últimos dependen del sistema de referencia que estemos usando. No podía ser de otra forma: los autovalores son independientes del sistema de referencia. Y los autovectores también, pero en el sentido de que dependen solamente del tensor aunque sus coordenadas cambien según la matriz que usemos para representar el tensor.

Solución: Cálculo del polinomio característico y de los valores propios para T_1

$$p_{T_1}(\lambda) = |T_1 - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ 1 & 4 - \lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 - 6\lambda + 9,$$

$$p_{T_1}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 3.$$

Cálculo del polinomio característico y de los valores propios para T_2

$$p_{T_2}(\lambda) = |T_2 - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -5 \\ 0 & 3 - \lambda \end{pmatrix} \right| = (3 - \lambda)^2,$$

$$p_{T_2}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 3.$$

Cálculo de los autovectores de T_1 para el único autovalor $\lambda = 3$

$$\ker(T_1 - 3I) \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -x,$$

los autovectores, expresados en la base B , son de la forma

$$v_B = (x, -x)_B.$$

Cálculo de los autovectores para T_2 para el único autovalor $\lambda = 3$

$$\ker(T_2 - 3I) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -5y = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

los autovectores, expresados en la base B' , son de la forma

$$v_{B'} = (x, 0)_{B'}.$$

Aunque tengan expresiones distintas, hay que tener en cuenta que los vectores están expresados en bases distintas; si expresamos este vector en la base canónica (base B) se obtiene

$$(x, 0)_{B'} = x(1, -1) + 0(3, 2) = (x, -x)$$

que vemos que coincide con la expresión obtenida para los autovalores de T_1 .

8. **Tensor de inercia de un sólido rígido.** En Mecánica del Sólido Rígido, el llamado *tensor de inercia* en un punto es una aplicación lineal que, como todas, se representa por medio de una matriz (en este caso simétrica) que denotaremos por T_i . Las llamadas *direcciones principales de inercia* se corresponden con los autovectores de T_i mientras que los *momentos principales de inercia* son los autovalores. Supongamos que el tensor de inercia en coordenadas cartesianas de un sólido bidimensional viene dado por

$$T_i = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calcula los momentos principales y las direcciones principales de inercia de I .

Interpretación geométrica: Consideremos la elipse de ecuación $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 1$. Dibuja, con MAXIMA, dicha elipse. Comprueba que, con la ayuda de la matriz T_i anterior, la ecuación de la elipse puede escribirse en la forma

$$(x, y) \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1.$$

Comprueba que los autovalores de T_i son $\lambda_1 = 9$ y $\lambda_2 = 1$ y que sus autovectores asociados (normalizados) son $\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ y $\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$. La matriz de cambio de base P que contiene los autovectores es ortogonal con lo que $P^{-1} = P^T$. Por tanto, se tiene la descomposición

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si multiplicamos por la izquierda por (x, y) y por la derecha por $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ se tiene la identidad

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9 \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}} \right)^2 + 1 \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}} \right)^2$$

lo que indica que con el cambio de variables $u = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$ e $v = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$, la ecuación de la elipse es $9u^2 + v^2 = 1$.

Dibuja con MAXIMA esta nueva elipse.

Solución: Como se ha indicado en el texto, los momentos y direcciones principales de inercia son los valores y vectores propios del tensor de inercia. Calculamos los valores propios mediante el polinomio característico:

$$p_i(\lambda) = |T_i - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 5 - \lambda & 4 \\ 4 & 5 - \lambda \end{pmatrix} \right| = (5 - \lambda)(5 - \lambda) - 16 = \lambda^2 - 10\lambda + 9,$$

$$p_i(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 9.$$

Y a continuación los vectores propios correspondientes. Para el autovalor $\lambda_1 = 1$

$$\ker(T_i - I) \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 4y = 0 \\ 4x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -x,$$

los autovectores son de la forma $(x, -z)$ y tomaremos como base $v_1 = (1, -1)$.

Para el autovalor $\lambda_2 = 9$

$$\ker(T_i - 9I) \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ 4x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = x,$$

los autovectores son de la forma (x, x) y tomamos como base $v_2 = (1, 1)$.

Notar que la base B de \mathbb{R}^2 , definida como $B = \{(1, -1), (1, 1)\}$ es ortogonal para el producto escalar euclídeo usual. Entonces dividiendo cada vector por su respectiva norma, obtendremos la base ortonormal buscada.

$$v_1 = (1, -1) \Rightarrow \|v_1\| = \sqrt{2} \Rightarrow v'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1),$$

$$v_2 = (1, 1) \Rightarrow \|v_2\| = \sqrt{2} \Rightarrow v'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1).$$

El resto se obtiene sustituyendo directamente en las expresiones.

9. **Elasticidad Lineal.** Se supone que el tensor de pequeñas deformaciones ε en un entorno de un punto de un sólido elástico trabajando a deformación plana viene dado por la matriz

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 120 & -80 \\ -80 & 100 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6}.$$

Calcula las deformaciones principales (autovalores) y direcciones principales de deformación (autovectores normalizados³).

³De módulo 1.

Interpretación geométrica: la misma que en el ejercicio anterior pero cambiando la palabra inercia por deformación.

Solución: Valores propios de ε

$$\begin{aligned} p_\varepsilon(\lambda) &= |\varepsilon - \lambda I| = \begin{vmatrix} 120 \cdot 10^{-6} - \lambda & -80 \cdot 10^{-6} \\ -80 \cdot 10^{-6} & 100 \cdot 10^{-6} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 220 \cdot 10^{-6} \lambda + 5600 \cdot 10^{-12} \\ &= \lambda^2 - \frac{11}{50000} \lambda + \frac{7}{1250000000} \end{aligned}$$

$$p_\varepsilon(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 220 \cdot 10^{-6} \lambda + 5600 \cdot 10^{-12} = 0 \Leftrightarrow \lambda = (110 \pm 10\sqrt{65}) \cdot 10^{-6}.$$

Calculamos los vectores propios. Para $\lambda_1 = (110 + 10\sqrt{65}) \cdot 10^{-6}$

$$\begin{aligned} |\varepsilon - \lambda I| &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \begin{pmatrix} 120 \cdot 10^{-6} - \lambda_1 & -80 \cdot 10^{-6} \\ -80 \cdot 10^{-6} & 100 \cdot 10^{-6} - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \begin{pmatrix} (10 - 10\sqrt{65}) \cdot 10^{-6} & -80 \cdot 10^{-6} \\ -80 \cdot 10^{-6} & (-10 - 10\sqrt{65}) \cdot 10^{-6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \begin{cases} (10 - 10\sqrt{65}) \cdot 10^{-6} x - 80 \cdot 10^{-6} y = 0 \\ -80 \cdot 10^{-6} x + (-10 - 10\sqrt{65}) \cdot 10^{-6} y = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} (10 - 10\sqrt{65}) x - 80 y = 0 \\ -80 x + (-10 - 10\sqrt{65}) y = 0 \end{cases}, \end{aligned}$$

Sistema cuya solución general es

$$\left(x, \frac{1}{8} (1 - \sqrt{65}) x \right).$$

El subespacio propio asociado a λ_1 será

$$N_{\lambda_1} = \left\langle \left(1, \frac{1}{8} (1 - \sqrt{65}) \right) \right\rangle$$

Para $\lambda_2 = (110 - 10\sqrt{65}) \cdot 10^{-6}$

$$\begin{aligned} |\varepsilon - \lambda I| &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \begin{pmatrix} 120 \cdot 10^{-6} - \lambda & -80 \cdot 10^{-6} \\ -80 \cdot 10^{-6} & 100 \cdot 10^{-6} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \begin{pmatrix} (10 + 10\sqrt{65}) \cdot 10^{-6} & -80 \cdot 10^{-6} \\ -80 \cdot 10^{-6} & (-10 + 10\sqrt{65}) \cdot 10^{-6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \begin{cases} (10 + 10\sqrt{65}) \cdot 10^{-6} x - 80 \cdot 10^{-6} y = 0 \\ -80 \cdot 10^{-6} x + (-10 + 10\sqrt{65}) \cdot 10^{-6} y = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} (10 + 10\sqrt{65}) x - 80 y = 0 \\ -80 x + (-10 + 10\sqrt{65}) y = 0 \end{cases}, \end{aligned}$$

Sistema cuya solución general es

$$\left(x, \frac{1}{8} (1 + \sqrt{65}) x \right)$$

y el subespacio propio asociado a λ_2 será

$$N_{\lambda_2} = \left\langle \left(1, \frac{1}{8} (1 + \sqrt{65}) \right) \right\rangle$$

Los vectores normalizados son

$$n_1 = \left(\frac{2^{5/2}}{\sqrt{65 - \sqrt{65}}}, \frac{1 - \sqrt{65}}{\sqrt{2}\sqrt{65 - \sqrt{65}}} \right)$$

$$n_2 = \left(\frac{2^{5/2}}{\sqrt{65 + \sqrt{65}}}, \frac{1 + \sqrt{65}}{\sqrt{2}\sqrt{65 + \sqrt{65}}} \right)$$

o numéricamente

$$\vec{n}_1 = (\mp 0,7497, \mp 0,6618),$$

$$\vec{n}_2 = (\mp 0,6618, \mp 0,7497).$$

10. La **teoría de Hückel en Química Orgánica** analiza la posibilidad para algunos tipos de moléculas de tener propiedades aromáticas. Aplicada al ciclobutadieno C_4H_4 , aparece asociado el problema de autovalores definido por la ecuación

$$\mathbf{HC} = E\mathbf{C}$$

donde \mathbf{H} representa el Hamiltoniano efectivo de un π electrón del sistema, los autovalores E de \mathbf{H} son la energías orbitales de los π electrones, y los autovectores \mathbf{C} representan las correspondientes orbitales moleculares. En concreto,

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

donde α, β son números reales negativos.

Comprueba que los autovalores de \mathbf{H} son $E_1 = \alpha + 2\beta$, $E_2 = E_3 = \alpha$, $E_4 = \alpha - 2\beta$, y que $C_1 = (1, 1, 1, 1)$, $C_2 = (0, 1, 0, -1)$, $C_3 = (1, 0, -1, 0)$, $C_4 = (1, -1, 1, -1)$ son autovectores asociados.

Solución: Construimos el polinomio característico:

$$p_H(\lambda) = |H - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} \alpha - \lambda & \beta & 0 & \beta \\ \beta & \alpha - \lambda & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha - \lambda & \beta \\ \beta & 0 & \beta & \alpha - \lambda \end{pmatrix} \right|$$

$$= (\alpha - \lambda) \left| \begin{pmatrix} \alpha - \lambda & \beta & 0 \\ \beta & \alpha - \lambda & \beta \\ 0 & \beta & \alpha - \lambda \end{pmatrix} \right| - \beta \left| \begin{pmatrix} \beta & \beta & 0 \\ 0 & \alpha - \lambda & \beta \\ \beta & \beta & \alpha - \lambda \end{pmatrix} \right| - \beta \left| \begin{pmatrix} \beta & \alpha - \lambda & \beta \\ 0 & \beta & \alpha - \lambda \\ \beta & 0 & \beta \end{pmatrix} \right|$$

$$= (\alpha - \lambda) \left((\alpha - \lambda)^3 - 2\beta^2(\alpha - \lambda) \right) - \beta^2(\alpha - \lambda)^2 - \beta^2(\alpha - \lambda)^2$$

$$= (\alpha - \lambda)^2 \left((\alpha - \lambda)^2 - 2\beta^2 \right) - 2\beta^2(\alpha - \lambda)^2$$

$$= (\alpha - \lambda)^2 \left((\alpha - \lambda)^2 - 4\beta^2 \right)$$

Calculamos los valores propios:

$$P_H(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha - \lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \alpha \text{ (doble)} \\ (\alpha - \lambda)^2 - 4\beta^2 = 0 \Leftrightarrow (\alpha - \lambda)^2 = 4\beta^2 \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha - \lambda) = 2\beta \Rightarrow \lambda = \alpha - 2\beta \\ (\alpha - \lambda) = -2\beta \Rightarrow \lambda = \alpha + 2\beta \end{cases} \end{cases}$$

Luego los valores propios son $E_1 = \alpha + 2\beta, E_2 = E_3 = \alpha$ y $E_4 = \alpha - 2\beta$. Calcularemos ahora los autovectores para cada autovalor.

Para $E_1 = \alpha + 2\beta$

$$\begin{pmatrix} \alpha - E_1 & \beta & 0 & \beta \\ \beta & \alpha - E_1 & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha - E_1 & \beta \\ \beta & 0 & \beta & \alpha - E_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -2\beta & \beta & 0 & \beta \\ \beta & -2\beta & \beta & 0 \\ 0 & \beta & -2\beta & \beta \\ \beta & 0 & \beta & -2\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -2\beta x + \beta y + \beta t = 0 \\ \beta x - 2\beta y + \beta z = 0 \\ \beta y - 2\beta z + \beta t = 0 \\ \beta x + \beta z - 2\beta t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (\beta \neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + t = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ y - 2z + t = 0 \\ x + z - 2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = t$$

Los autovalores son de la forma (x, x, x, x) , con base $(1, 1, 1, 1)$

Para $E_2 = E_3 = \alpha$

$$\begin{pmatrix} \alpha - E_2 & \beta & 0 & \beta \\ \beta & \alpha - E_2 & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha - E_2 & \beta \\ \beta & 0 & \beta & \alpha - E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 & \beta \\ \beta & 0 & \beta & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \beta \\ \beta & 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \beta y + \beta t = 0 \\ \beta x + \beta z = 0 \\ \beta y + \beta t = 0 \\ \beta x + \beta z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (\beta \neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} y + t = 0 \\ x + z = 0 \\ y + t = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -y \\ z = -x \end{cases}$$

Los autovalores son de la forma $(x, y, -x, -y) = x(1, 0, -1, 0) + y(0, 1, 0, -1)$, con base $\{(1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1)\}$.

Para $E_4 = \alpha - 2\beta$

$$\begin{pmatrix} \alpha - E_4 & \beta & 0 & \beta \\ \beta & \alpha - E_4 & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha - E_4 & \beta \\ \beta & 0 & \beta & \alpha - E_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2\beta & \beta & 0 & \beta \\ \beta & 2\beta & \beta & 0 \\ 0 & \beta & 2\beta & \beta \\ \beta & 0 & \beta & 2\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\beta x + \beta y + \beta t = 0 \\ \beta x + 2\beta y + \beta z = 0 \\ \beta y + 2\beta z + \beta t = 0 \\ \beta x + \beta z + 2\beta t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (\beta \neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + t = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ y + 2z + t = 0 \\ x + z + 2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = x \\ t = -x \end{cases}$$

Los autovalores son de la forma $(x, -x, x, -x) = x(1, -1, 1, -1)$, con base $\{(1, -1, 1, -1)\}$.

11. Responde a las siguientes cuestiones:

- a) Sea $f : V \rightarrow V$ una aplicación lineal y supongamos que $\lambda = 0$ es un autovalor de f . ¿Es f inyectiva? ¿Por qué?
- b) Sea A una matriz invertible y sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ los autovalores de A . ¿Cuáles son los autovalores de A^{-1} ? ¿Qué relación existe entre los autovectores de A y los de A^{-1} ?

Solución:

- a) No, puesto que si $\lambda = 0$, es un autovalor entonces, existe un vector $v \in V$ con $v \neq 0$ con

$$f(v) = 0 \cdot v$$

es decir $v \in \ker f$ y por tanto no es inyectiva.

- b) Supongamos que $p_A(\lambda)$ y $p_{A^{-1}}(\lambda)$ son los polinomios característicos de A y A^{-1} , respectivamente, entonces, por definición

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I|$$

$$P_{A^{-1}}(\lambda) = |A^{-1} - \lambda I|$$

Como A es invertible, entonces ninguno de los valores propios de A puede ser nulo, ya que en caso contrario

$$P_A(0) \Rightarrow |A - 0I| = 0 \Leftrightarrow |A| = 0 \Rightarrow A \text{ no es invertible } \#$$

Por otra parte sabemos que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, luego

$$P_{A^{-1}}(\lambda) = |A^{-1} - \lambda I| = |A^{-1} - \lambda A^{-1}A| = |A^{-1}(I - \lambda A)| = |A^{-1}| \cdot |I - \lambda A|$$

como hemos visto $\lambda \neq 0$ entonces, podemos sacar factor común λ , para poner

$$P_{A^{-1}}(\lambda) = |A^{-1}| \cdot \left| \lambda \left(\frac{1}{\lambda} I - A \right) \right| = \lambda |A^{-1}| \cdot \left| \left(\frac{1}{\lambda} I - A \right) \right|$$

o de forma equivalente

$$P_{A^{-1}}(\lambda) = \lambda |A^{-1}| \cdot \left| - \left(A - \frac{1}{\lambda} I \right) \right| = (-1)^n \lambda |A^{-1}| \left| A - \frac{1}{\lambda} I \right| = (-1)^n \lambda |A^{-1}| P_A \left(\frac{1}{\lambda} \right)$$

donde hemos hecho uso de las propiedades de los determinantes. De este modo si tomamos $\mu_k = \frac{1}{\lambda_k}$ para $k = 1, \dots, n$, entonces

$$P_{A^{-1}}(\mu_k) = P_{A^{-1}} \left(\frac{1}{\lambda_k} \right) = (-1)^n \lambda_k |A^{-1}| P_A(\lambda_k) = (-1)^n \lambda_k |A^{-1}| \cdot 0 = 0.$$

12. Algunos tipos destacados de matrices. Recogemos en la siguiente tabla algunos tipos de matrices importantes

en las aplicaciones junto con las propiedades de sus autovalores y autovectores

Matriz	Definición	Autovalores	Autovectores
Simétrica	$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$	$\lambda \in \mathbb{R}$	$\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}$ (si son ortogonales)
Definida Positiva	$x^T \mathbf{A} x > 0$	$\lambda > 0$	
de Markov	$m_{ij} > 0, \sum_{i=1}^n m_{ij} = 1$	$\lambda_{\text{máx}} = 1$	$v_j(\lambda_{\text{máx}}) > 0$
Tridiagonal Tipo 1	$\begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b & a & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b & a \end{pmatrix}$	$\lambda_k = a + 2b \cos \frac{k\pi}{n+1}$	
Ejemplo $a = 2, b = -1$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\lambda_k = 2 - 2 \cos \frac{k\pi}{n+1}$	$v_k = \left(\text{sen} \frac{k\pi}{n+1}, \text{sen} \frac{2k\pi}{n+1}, \dots \right)$

Determina de qué tipo son cada una de las siguientes matrices y calcula sus autovalores y autovectores:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad M_4 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

- M_1 es definida positiva y de Markov (por columnas). El polinomio característico y los valores propios son:

$$p_{M_1}(\lambda) = |M_1 - \lambda I| = \begin{vmatrix} 0,8 - \lambda & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1,5\lambda + 0,5$$

$$p_{M_1}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1,5\lambda + 0,5 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1; \lambda_2 = \frac{1}{2};$$

Los vectores propios son:

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} -0,2 & 0,3 \\ 0,2 & -0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -0,2x + 0,3y = 0 \\ 0,2x - 0,3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x \Rightarrow N_{\lambda_1} = \left\langle \left(1, \frac{2}{3} \right) \right\rangle$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,3x + 0,3y = 0 \\ 0,2x + 0,2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -x \Rightarrow N_{\lambda_2} = \langle (1, -1) \rangle$$

- M_2 es definida positiva. El polinomio característico y los valores propios son:

$$p_{M_2}(\lambda) = |M_2 - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

$$p_{M_2}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1.$$

Los vectores propios son:

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow N_{\lambda_1} = \langle (1, 0) \rangle.$$

- M_3 es tridiagonal, simétrica y definida positiva, por tanto las raíces serán reales. El polinomio característico y los valores propios son:

$$p_{M_3}(\lambda) = |M_3 - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \right| = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 10\lambda + 4$$

$$p_{M_3}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 10\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2 - \sqrt{2}, \lambda_2 = 2 + \sqrt{2}, \lambda_3 = 2.$$

Y los vectores propios para cada valor propio.

Para $\lambda_1 = 2 - \sqrt{2}$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x - y = 0 \\ -x + \sqrt{2}y - z = 0 \\ -y + \sqrt{2}z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{2}x \\ y = \sqrt{2}z \end{cases}$$

cuya solución es

$$(x, \sqrt{2}x, -x) \Rightarrow N_{\lambda_1} = \langle (1, \sqrt{2}, 1) \rangle$$

Para $\lambda_2 = 2 + \sqrt{2}$

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2}x - y = 0 \\ -x - \sqrt{2}y - z = 0 \\ -y - \sqrt{2}z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\sqrt{2}x \\ y = -\sqrt{2}z \end{cases}$$

cuya solución es

$$(x, \sqrt{2}x, -x) \Rightarrow N_{\lambda_2} = \langle (1, -\sqrt{2}, 1) \rangle$$

Para $\lambda_3 = 2$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -y = 0 \\ -x - z = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases},$$

cuya solución es

$$(x, 0, -x) \Rightarrow N_{\lambda_3} = \langle (1, 0, -1) \rangle$$

- M_4 es simétrica. El polinomio característico y los valores propios son:

$$p_{M_4}(\lambda) = |M_4 - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 5-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ -4 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} \right| = -\lambda^3 + 7\lambda^2 + 9\lambda - 63$$

$$p_{M_4}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 7\lambda^2 + 9\lambda - 63 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -3, \lambda_2 = 7, \lambda_3 = 3.$$

Y los vectores propios

$$\lambda_1 = -3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 4z = 0 \\ 6y = 0 \\ -4x + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2x \\ y = 0 \\ z = 2x \end{cases} \Rightarrow N_{\lambda_1} = \langle (1, 0, 2) \rangle.$$

$$\lambda_2 = 7 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 4z = 0 \\ -4y = 0 \\ -4x - 8z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\frac{x}{2} \\ y = 0 \\ z = -\frac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow N_{\lambda_2} = \left\langle \left(1, 0, -\frac{1}{2} \right) \right\rangle.$$

$$\lambda_3 = 3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4z = 0 \\ 0 = 0 \\ -4x - 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y \text{ libre} \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow N_{\lambda_3} = \langle (0, 1, 0) \rangle.$$

13. Calcula la potencia n -ésima de las matrices M_1 y M_4 del ejercicio anterior.

Solución: La matriz M_1 tiene dos valores propios reales y distintos, luego será diagonalizable. Usamos los dos autovalores y los autovectores correspondientes para expresar

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{10} & \frac{7}{10} \end{pmatrix} = P_1^{-1} D_1 P_1$$

donde

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$P_1^{-1} = M_{D_1 \rightarrow C_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow P_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

por tanto

$$\begin{aligned} M_1^n &= (P_1^{-1} D_1 P_1)^n = P_1^{-1} D_1^n P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} (\frac{1}{2})^n & -\frac{3}{5} (\frac{1}{2})^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{5} (3 + \frac{1}{2^{n-1}}) & \frac{3}{5} (1 - \frac{1}{2^n}) \\ \frac{2}{5} (1 - \frac{1}{2^n}) & \frac{3}{5} (2 + \frac{3}{2^n}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matriz M_4 tiene tres valores propios reales y distintos, luego también será diagonalizable. Usamos los dos autovalores y los autovectores correspondientes para expresar

$$M_4 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix} = P_4^{-1} D_4 P_4$$

donde

$$D_4 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P_4^{-1} = M_{D_4 \rightarrow C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

por tanto

$$\begin{aligned}
 M_4^n &= (P_4^{-1}D_4P_4)^n = P_4^{-1}D_4^nP_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 7^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5}(-3)^n & 0 & \frac{2}{5}(-3)^n \\ \frac{4}{5}7^n & 0 & -\frac{2}{5}7^n \\ 0 & 3^n & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{5}(4 \cdot 7^n + (-3)^n) & 0 & \frac{2}{5}((-3)^n + 7^n) \\ 0 & 3^n & 0 \\ \frac{2}{5}((-3)^n - 7^n) & 0 & \frac{1}{5}(4 \cdot (-3)^n + 7^n) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

14. Estudia para qué valores de los parámetros a y b es diagonalizable la matriz M .

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 4 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Solución: El polinomio característico y los valores propios son:

$$p_M(\lambda) = |M - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 - \lambda & b \\ 4 & 0 & a - \lambda \end{vmatrix} = (5 - \lambda)(-1 - \lambda)(a - \lambda)$$

$$p_M(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (5 - \lambda)(-1 - \lambda)(a - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = a.$$

Luego si $a \notin \{-1, 5\}$, los 3 valores propios son reales y distintos y por tanto M será diagonalizable.

Caso $a = 5$, los valores propios son $\lambda_1 = 5$, con multiplicidad $m(\lambda_1) = 2$ y $\lambda_2 = -1$, con multiplicidad $m(\lambda_2) = 1$. Para saber si es diagonalizable tendremos que estudiar qué ocurre con la dimensión del subespacio propio asociado a $\lambda_1 = 5$. La matriz es

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

y los autovectores de λ_1 serán

$$\lambda_1 = 5 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & b \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -6y + bz = 0 \\ 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6y = bz \\ x = 0 \end{cases}$$

Se distinguen dos casos según b sea o no un valor nulo. Para $b = 0$

$$6y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow N_{\lambda_1} = \{(0, 0, z)\} = \langle (0, 0, 1) \rangle \Rightarrow \dim(N_{\lambda_1}) = 1 \neq m(\lambda_2),$$

la matriz no es diagonalizable.

Si $b \neq 0$, entonces

$$z = \frac{6}{b}y \Rightarrow N_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ \frac{6}{b}y \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{6}{b} \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \dim(N_{\lambda_1}) = 1 \neq m(\lambda_2)$$

y de nuevo, tampoco M es diagonalizable.

Para el caso $a = -1$, los valores propios son $\lambda_1 = 5$ con multiplicidad $m(\lambda_1) = 1$ y $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ que tiene multiplicidad $m(\lambda_2)$. Como en el caso anterior, sólo hace falta comprobar que la dimensión del subespacio propio asociado al valor propio múltiple. Para $\lambda_2 = -1$, la matriz es

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

y los autovectores correspondientes

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 0 \\ bz = 0 \\ 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Distinguimos dos caso. Si $b = 0$, entonces tanto y como z quedan libres

$$N_{\lambda_2} = \{(0, y, z)\} = \langle (0, 0, 1); (0, 1, 0) \rangle$$

y la matriz es diagonalizable. Si $b \neq 0$

$$z = 0 \Rightarrow N_{\lambda_2} = \{(0, y, 0)\} = \langle (0, 1, 0) \rangle$$

y M no será es diagonalizable.

En resumen M es diagonalizable para $a \notin \{-1, 5\}$, siendo en este caso cualquiera el valor de b , si $a = 5$, no es diagonalizable para ningún valor de b y si $a = -1$, entonces sólo es diagonalizable cuando $b = 0$.

15. **Teorema de Perron-Frobenius.** El teorema que sigue es una pieza clave en el algoritmo *PageRank* que usa Google para ordenar las búsquedas de las páginas de Internet. En su versión más sencilla el Teorema de Perron-Frobenius se enuncia así: "Sea A una matrix cuadrada con entradas positivas, es decir, $a_{ij} > 0$. Entonces existe un autovalor simple (es decir, de multiplicidad 1) cuyo autovector asociado tiene todas sus componentes estrictamente positivas". Calcula los autovalores y autovectores de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

y comprueba que se satisface el Teorema de Perron-Frobenius.

El polinomio característico es:

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 1 \\ 3 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} \right| = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 8\lambda - 8.$$

Calculamos los valores propios

$$p_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 8\lambda - 8 = 0 \Leftrightarrow -(\lambda + 2)(\lambda^2 - 6\lambda + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 - \sqrt{5} \\ \lambda_2 = 3 + \sqrt{5} \\ \lambda_3 = -2 \end{cases}.$$

Y los vectores propios para cada valor propio:

Valor propio $\lambda_1 = 3 - \sqrt{5}$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{5}-2 & 3 & 1 \\ 3 & \sqrt{5}-2 & 1 \\ 1 & 3 & \sqrt{5}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{5}-2)x + 3y + z = 0 \\ 3x + (\sqrt{5}-2)y + z = 0 \\ x + 3y + (\sqrt{5}-1)z = 0 \end{cases}$$

sistema cuya solución se obtiene restando las dos primeras ecuaciones y es

$$(x, x, (-1 - \sqrt{5})x) \Rightarrow N_{\lambda_1} = \langle (1, 1, -1 - \sqrt{5}) \rangle$$

Valor propio $\lambda_2 = 3 + \sqrt{5}$

$$\begin{pmatrix} -2 - \sqrt{5} & 3 & 1 \\ 3 & -2 - \sqrt{5} & 1 \\ 1 & 3 & -1 - \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (-\sqrt{5} - 2)x + 3y + z = 0 \\ 3x + (-\sqrt{5} - 2)y + z = 0 \\ x + 3y + (-\sqrt{5} - 1)z = 0 \end{cases}$$

sistema cuya solución se obtiene restando las dos primeras ecuaciones y es

$$(x, x, (-1 + \sqrt{5})x) \Rightarrow N_{\lambda_2} = \left\langle (1, 1, -1 + \sqrt{5}) \right\rangle$$

Valor propio $\lambda_3 = -2$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 3y + z = 0 \\ 3x + 3y + z = 0 \\ x + 3y + 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 3y + z = 0 \\ x + 3y + 4z = 0 \end{cases},$$

sistema cuya solución se obtiene restando las dos ecuaciones y es

$$\left(x, -\frac{11}{9}x, \frac{2x}{3}\right) \Rightarrow N_{\lambda_3} = \left\langle \left(1, -\frac{11}{9}, \frac{2}{3}\right) \right\rangle.$$

El secreto de Google y el Álgebra Lineal. Se recomienda la lectura de este artículo profesor de la Universidad Autónoma de Madrid, Pablo Fernández Gallardo, a aquellos alumnos que tengan curiosidad por saber las Matemáticas usadas en el algoritmo PageRank de Google. En particular, se podrá apreciar el papel destacado del Teorema de Perron-Frobenius.