



1. Dados los números complejos $z_1 = 1 - i$ y $z_2 = 4 + 4\sqrt{3}i$, realiza las siguientes operaciones

- a) Halla sus módulos y argumentos
 b) Calcula

(i) $\bar{z}_1 + 6z_2$ (ii) $3z_1\bar{z}_2$ (iii) $z_1|z_2|i$ (iv) z_1^3 (v) $\frac{2z_2}{-z_1}$

2. Dados los números complejos $z_1 = 2 + i$ y $z_2 = 3 - 2i$, calcula:

a) $z_1 + z_2$ b) $3z_1 - 2z_2$ c) z_1z_2 d) $(z_2)^{-1}$ e) $\frac{z_1}{z_2}$

3. Determina los valores de x e y para que se cumpla la igualdad $(1 + i)(x + iy) = i$.

4. Calcula el módulo de los números complejos:

a) $3 + 4i$ b) $\frac{1+i}{1-i}$ c) $i^7 + i^{10}$ d) $1 + i + i^2$

5. Expresa en forma polar o exponencial los siguientes números complejos:

a) $2i$ b) $-3i$ c) -1 d) 3 e) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$
 f) $-3 + i\sqrt{3}$ g) $\frac{1+i}{1-i}$ h) $i^7 + i^{10}$ i) $3 + 3i$ j) $1 + i + i^2$

6. Expresa los siguientes números complejos en forma binómica:

a) $(1 + i)^3$ b) $\frac{2+3i}{3-4i}$ c) $i^5 + i^{16}$ d) $1 + i + i^2 + i^3$ e) $\frac{1}{i}$
 f) $(1 + i\sqrt{3})^3$ g) $2_{\pi/2}$ h) $1_{\pi/4}$ i) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$ j) $(2 + 2i)^2$
 k) $(2 - 2i)^2$ l) $(2 + 2i)(2 - 2i)$ m) $e^{-i\pi/2}$ n) $2e^{-i\pi}$ ñ) $3e^{-i\pi/2}$
 o) $2e^{-i\pi/4}$ p) $i + 3e^{i2\pi}$ q) $e^{i\pi/4} - 2e^{-i\pi/4}$ r) $\frac{1}{e^{-i\pi/4}}$ s) $\sqrt{2}e^{i\pi/3}$

7. Representa gráficamente los conjuntos dados por las expresiones siguientes:

a) $|z| \leq 1$ b) $z + \bar{z} \geq |z|^2$ c) $z + \bar{z} \leq 1$ d) $z - \bar{z} = i$
 e) $\text{Im}(z) < 0$ f) $|\text{Re}(z)| < 1$ g) $\text{Re}(z) + \text{Im}(z) = z\bar{z}$ h) $|z|^{-1} \leq 1, (z \neq 0)$
 i) $|z - 5i| = 8$ j) $\text{Im}(z^2) > 2$ k) $\text{Re}\left(\frac{\bar{z}-1}{z-1}\right) = 1$ l) $\text{Re}(z^2 - z) = 0$
 m) $|z - 1| = |1 - 2\bar{z}|$ n) $2 < |z| < 3$ ñ) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \leq 1$ o) $\text{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 1$

8. Calcula las siguientes potencias de números complejos:

a) $(1+i)^{100}$ b) $(-1+\sqrt{3}i)^{30}$ c) $(\sqrt{1-i})^{10}$ d) $\frac{1}{(1-i)^5}$

9. Deduce una fórmula para calcular cualquier potencia de i^n con $n \in \mathbb{N}$.

10. Calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt[3]{1}$ b) $\sqrt[3]{i}$ c) $\sqrt[6]{-8}$ d) $\sqrt[4]{-1}$ e) $\sqrt[8]{1}$ f) $\sqrt[4]{-81}$ g) $\sqrt{1-i}$

h) $\sqrt{3+3i}$ i) $\sqrt[3]{-2+2i}$ j) $\sqrt[3]{-1+i}$ k) $\sqrt[4]{-8(1-\sqrt{3}i)}$ l) $\sqrt[4]{1}$ m) $\sqrt[6]{1}$ n) $\sqrt[4]{-1+\sqrt{3}i}$

11. Resuelve en \mathbb{C} las siguientes ecuaciones con coeficientes en \mathbb{R} :

a) $z^2 + 1 = 0$ b) $z^3 + 2 = 0$ c) $z^5 + 64 = 0$ d) $(z^2 + 4)(z - 1)^2 = 0$

12. Resuelve en \mathbb{C} las siguientes ecuaciones con coeficientes en \mathbb{C} :

a) $z^2 - (2+i)z + (9+i) = 0$ b) $z^2 - 2(2-i)z + 3(1-2i) = 0$ c) $z^4 + 64 = 0$

13. Expresa en forma binómica los siguientes números complejos:

a) $(1+i)^{2/3}$ b) $(1+\sqrt{3}i)^{3/4}$

14. Utiliza la fórmula de Moivre para obtener $\cos(3x)$ y $\sin(3x)$ en función de $\cos(x)$ y $\sin(x)$. ¿Cuál será la relación para $\cos(4x)$ y $\sin(4x)$?

15. Resuelve: $\bar{z} = z^{n-1}$, siendo $n \in \mathbb{N} - \{2\}$.

Soluciones:

1. a) $|z_1| = \sqrt{2}$, $\arg(z) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$; $|z_2| = 8$, $\arg(z) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$; b) (i) $25 + (1 + 24\sqrt{3})i$; (ii) $12(1 - \sqrt{3}) - 12(1 + \sqrt{3})i$; (iii) $8 + 8i$; (iv) $-2 - 2i$; (v) $4(\sqrt{3} - 1) - 4(\sqrt{3} + 1)i$.

2. a) $5 - i$; b) $7i$; c) $8 - i$; d) $\frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$; e) $\frac{4}{13} + \frac{7}{13}i$.

3. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

4. a) 5; b) 1; c) $\sqrt{2}$; d) 1.

5. a) $2e^{i\pi/2}$; b) $3e^{-i\pi/2}$; c) $e^{i\pi}$; d) $3e^{i2\pi}$; e) $e^{i\pi/4}$; f) $2\sqrt{3}e^{i5\pi/6}$; g) $e^{i\pi/2}$; h) $\sqrt{2}e^{i5\pi/4}$; i) $3\sqrt{2}e^{i\pi/4}$; j) $e^{i\pi/2}$.

6. a) $-2 + 2i$; b) $-\frac{6}{25} + \frac{17}{25}i$; c) $1 + i$; d) 0; e) $-i$; f) -8 ; g) $2i$; h) $\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$; i) $-i$; j) $8ivk$; $-8i$; l) 8; m) $-i$; n) -2 ; ñ) $-3i$; o) $\sqrt{2} - i\sqrt{2}$; p) $3 + i$; q) $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$; r) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$; s) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$.

7. (a) $x^2 + y^2 \leq 1$: Ecuación del círculo de centro $(0, 0)$ y radio 1. (b) $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$: Ecuación del círculo de centro $(1, 0)$ y radio 1. (c) $x \leq \frac{1}{2}$: Semiplano a la izquierda de abscisa $\frac{1}{2}$. (d) $y = \frac{1}{2}$: Recta horizontal $(x, \frac{1}{2})$. (e) $y < 0$: Semiplano abierto de ordenadas negativas. (f) $-1 < x < 1$: Banda vertical simétrica de anchura 2. (g) $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$: Ecuación de la circunferencia de centro $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y radio $\frac{1}{\sqrt{2}}$. (h) $x^2 + y^2 \geq 1$: Exterior del círculo de centro $(0, 0)$ y radio 1. (i) $x^2 + (y - 5)^2 = 64$: Ecuación de la circunferencia de centro $(0, 5)$ y radio 8. (j) $xy > 1$: La frontera del conjunto es la hipérbola de ecuación $y = \frac{1}{x}$. (k) $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$: Ecuación de la circunferencia de centro $(\frac{1}{2}, 0)$ y radio $\frac{1}{2}$. (l) $\frac{(x - \frac{1}{4})^2}{1/4} - \frac{y^2}{1/4} = 1$: Ecuación de la hipérbola centrada en $(\frac{1}{4}, 0)$ y semiejes $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$. (m) $(x - \frac{1}{3})^2 + y^2 = \frac{1}{9}$: Circunferencia de centro $(\frac{1}{3}, 0)$ y radio $\frac{1}{3}$. (n) $x^2 + y^2 < 9$: Anillo (o corona circular) de centro $(0, 0)$ y radios 2 y 3. (o) $x \geq 0$: Semiplano a la derecha de la abscisa $x = 0$. (p) $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$: Circunferencia de centro $(\frac{1}{2}, 0)$ y radio $\frac{1}{2}$, menos el punto $(0, 0)$, ya que no tiene inverso.

8. a) $-2^{50} = 1125\ 899\ 906\ 842\ 624$; b) $2^{30} = 1073741824$; c) $-4 + 4i$; d) $-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}i$.

9. $n = 4c + r$; $i^n = i^r$ es decir, i^n tiene el mismo valor que i^r con r el resto de la división por 4 de n .

10. a) $w_0 = 1$; $w_1 = e^{i2\pi/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $w_2 = e^{i4\pi/3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; b) $w_0 = e^{i\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$; $w_1 = e^{i5\pi/6} = \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}$; $w_2 = e^{i9\pi/6} = -i$; c) $w_0 = \sqrt{2}e^{i\pi/6} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $w_1 = \sqrt{2}e^{i\pi/2} = \sqrt{2}i$; $w_2 = \sqrt{2}e^{i5\pi/6} = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $w_3 = \sqrt{2}e^{i7\pi/6} = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $w_4 = \sqrt{2}e^{i3\pi/2} = -\sqrt{2}i$; $w_5 = \sqrt{2}e^{i11\pi/6} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$; d) $w_0 = e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $w_1 = e^{i3\pi/4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $w_2 = e^{i5\pi/4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $w_3 = e^{i7\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$; e) $w_0 = 1$; $w_1 = e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $w_2 = e^{i\pi/2} = i$; $w_3 = e^{i3\pi/4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $w_4 = e^{i\pi} = -1$; $w_5 = e^{i5\pi/4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $w_6 = e^{i3\pi/2} = -i$; $w_7 = e^{i7\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$; f) $w_0 = 3e^{i\pi/4} = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$; $w_1 = 3e^{i3\pi/4} = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$; $w_2 = 3e^{i5\pi/4} = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$; $w_3 = 3e^{i7\pi/4} = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$; g) $w_0 = \sqrt[4]{2}e^{-i\pi/8} = \sqrt[4]{2} \left(\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2} - \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}i \right)$; $w_1 = \sqrt[4]{2}e^{i7\pi/8} = \sqrt[4]{2} \left(-\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2} + \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}i \right)$; h) $w_0 = \sqrt{3}\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8} = \sqrt{3}\sqrt[4]{2} \left(\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2} + \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}i \right)$; $w_1 = \sqrt{3}\sqrt[4]{2}e^{i9\pi/8} = -\sqrt{3}\sqrt[4]{2} \left(\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2} + \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}i \right)$; i) $w_0 = \sqrt{2}e^{i\pi/4} = 1 + i$; $w_1 = \sqrt{2}e^{i11\pi/12} = -\frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i$; $w_2 = \sqrt{2}e^{i19\pi/12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\sqrt{3}+1}{2}i$; j) $w_0 = \sqrt[6]{2}e^{i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}(1+i)$; $w_1 = \sqrt[6]{2}e^{i11\pi/12} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left(-\frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i \right)$; $w_2 = \sqrt[6]{2}e^{i19\pi/12} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\sqrt{3}+1}{2}i \right)$; k) $w_0 = 2e^{i\pi/6} = \sqrt{3}+i$; $w_1 = 2e^{i2\pi/3} = -1+i\sqrt{3}$; $w_2 = 2e^{i7\pi/6} = -\sqrt{3}-i$; $w_3 = 2e^{i5\pi/3} = 1-i\sqrt{3}$; l) $w_0 = 1$; $w_1 = e^{i\pi/2} = i$; $w_2 = e^{i\pi} = -1$; $w_3 = e^{i3\pi/2} = -i$; m) $w_0 = 1$; $w_1 = e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $w_2 = e^{i2\pi/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $w_3 = e^{i\pi} = -1$; $w_4 = e^{i4\pi/3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $w_5 = e^{i5\pi/3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; n) $w_0 = \sqrt[4]{2}e^{i\pi/6} = \sqrt[4]{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$; $w_1 = \sqrt[4]{2}e^{i2\pi/3} = \sqrt[4]{2} \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$; $w_2 = \sqrt[4]{2}e^{i7\pi/6} = \sqrt[4]{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)$; $w_3 = \sqrt[4]{2}e^{i5\pi/3} = \sqrt[4]{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$.

11. a) $z_1 = i; z_2 = -i$; (b) $w_0 = \sqrt[3]{2}e^{i\pi/3} = \sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right); w_1 = \sqrt[3]{2}e^{i\pi} = -\sqrt[3]{2}; w_2 = \sqrt[3]{2}e^{i5\pi/3} = -\sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)$; c) $w_0 = 2\sqrt[5]{2}e^{i\pi/5}; w_1 = 2\sqrt[5]{2}e^{i3\pi/5}; w_2 = 2\sqrt[5]{2}e^{i\pi}; w_3 = 2\sqrt[5]{2}e^{i7\pi/5}; w_4 = 2\sqrt[5]{2}e^{i9\pi/5}$; d) $z_1 = 2i; z_2 = -2i; z_3 = 1; z_4 = 1$.
12. a) $w_0 = 1 + i\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right); w_1 = 1 + i\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$; b) $w_0 = 3; w_1 = 1 - 2i$; c) $w_0 = 2\sqrt{2}e^{i\pi/4} = 2 + 2i; w_1 = 2\sqrt{2}e^{i3\pi/4} = -2 + 2i; w_2 = 2\sqrt{2}e^{i5\pi/4} = -2 - 2i; w_3 = 2\sqrt{2}e^{i7\pi/4} = 2 - 2i$.
13. a) $w_0 = \sqrt[3]{2}e^{i\pi/6} : \sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i\right); w_1 = \sqrt[3]{2}e^{i5\pi/6} = \sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right); w_2 = \sqrt[3]{2}e^{i3\pi/2} = -i\sqrt[3]{2}$; b) $w_0 = \sqrt[4]{8}e^{i\pi/4} = \sqrt[4]{8}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right); w_1 = \sqrt[4]{8}e^{i3\pi/4} = \sqrt[4]{8}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right); w_2 = \sqrt[4]{8}e^{i5\pi/4} = \sqrt[4]{8}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right); w_3 = \sqrt[4]{8}e^{i7\pi/4} = \sqrt[4]{8}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$.
14. $\cos(3x) = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x; \sin(3x) = 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x; \cos(4x) = \cos^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x; \sin(4x) = 4\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin^3 x$.
15. $z_0 = 0$; si $n \neq 2 \Rightarrow w_k = e^{i2k\pi/n}, k = 0, \dots, n-1$; si $n = 2 \Rightarrow w_k = r \in \mathbb{R}$.

©Silvestre Paredes Hernández[®]