

- Sean $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, vectores propios de una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ asociados a valores propios distintos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Razona si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:
 - Cada vector propio de A tiene asociado un único valor propio.
 - Para todo $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\alpha \vec{u}$ es un vector propio asociado al mismo valor propio λ .
 - \vec{u} y \vec{v} son vectores linealmente independientes.
 - Una matriz tiene el valor propio 0 si y sólo si su determinante es 0.
 - $\vec{u} + \vec{v}$ es un vector propio de A .
 - Si $n \in \mathbb{N}$, entonces λ^n es un valor propio de A^n y si A es regular, $1/\lambda$ es un valor propio de A^{-1} .
 - Si A, C son semejantes entonces tienen el mismo determinante, el mismo polinomio característico y los mismos valores propios.
 - Dos matrices diagonalizables son semejantes si y sólo si tienen los mismos valores propios con las mismas multiplicidades.
- Estudiar los valores propios de las siguientes matrices, decir si son diagonalizables y en caso afirmativo obtener la matriz de paso y la potencia n -ésima, siendo $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} & B &= \begin{pmatrix} 26 & 15 \\ -50 & 29 \end{pmatrix} & C &= \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} & D &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \\
 E &= \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} & F &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & G &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & H &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\
 I &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

- Estudiar según los valores de los parámetros, si son diagonalizables las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & \alpha \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

- Sea f un endomorfismo diagonalizable de \mathbb{R}^3 con valores propios $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$ y subespacios propios $N_{\lambda_1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0\}$ y $N_{\lambda_2} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0, x + y = 0\}$. Calcula la expresión analítica de f .
- Sea f un endomorfismo diagonalizable de \mathbb{R}^3 con valores propios $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = 2$, y subespacios propios $N_{\lambda_1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0; x - z = 0\}$, $N_{\lambda_2} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, y + z = 0\}$ y $N_{\lambda_3} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0, 2x + y = 0\}$. Calcula la expresión analítica de f .

6. Hallar el polinomio característico, los valores propios y los subespacios propios de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

7. Consideremos el tensor $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido como $T(x, y) = (2x - y, x + 4y)$. Si consideramos el sistema de referencia¹ habitual en Física $B = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$, es decir la base canónica de \mathbb{R}^2 , entonces T está representado por la matriz

$$T_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

es decir, $T_1 = M_B(T)$. Si ahora consideramos un nuevo sistema de referencia dado por los vectores $B' = \{v_1 = (1, -1), v_2 = (3, 2)\}$, entonces el tensor T viene representado por la matriz

$$T_2 = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Comprueba que los autovalores de las matrices T_1 y T_2 son iguales y que los autovectores también son los mismos, sin embargo, las coordenadas de éstos últimos dependen del sistema de referencia que estemos usando. No podía ser de otra forma: los autovalores son independientes del sistema de referencia. Y los autovectores también, pero en el sentido de que dependen solamente del tensor aunque sus coordenadas cambien según la matriz que usemos para representar el tensor.

8. **Tensor de inercia de un sólido rígido.** En Mecánica del Sólido Rígido, el llamado *tensor de inercia* en un punto es una aplicación lineal que, como todas, se representa por medio de una matriz (en este caso simétrica) que denotaremos por T_i . Las llamadas *direcciones principales de inercia* se corresponden con los autovectores de T_i mientras que los *momentos principales de inercia* son los autovalores. Supongamos que el tensor de inercia en coordenadas cartesianas de un sólido bidimensional viene dado por

$$T_i = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calcula los momentos principales y las direcciones principales de inercia de I .

Interpretación geométrica: Consideremos la elipse de ecuación $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 1$. Dibuja, con MAXIMA, dicha elipse. Comprueba que, con la ayuda de la matriz T_i anterior, la ecuación de la elipse puede escribirse en la forma

$$(x, y) \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1.$$

Comprueba que los autovalores de T_i son $\lambda_1 = 9$ y $\lambda_2 = 1$ y que sus autovectores asociados (normalizados) son $\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ y $\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$. La matriz de cambio de base P que contiene los autovectores es ortogonal con lo que $P^{-1} = P^T$. Por tanto, se tiene la descomposición

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Si multiplicamos por la izquierda por (x, y) y por la derecha por $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ se tiene la identidad

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9 \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}} \right)^2 + 1 \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}} \right)^2$$

¹En este contexto un sistema de referencia es una base del espacio vectorial correspondiente.

lo que indica que con el cambio de variables $u = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$ e $v = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$, la ecuación de la elipse es $9u^2 + v^2 = 1$.
 Dibuja con MAXIMA esta nueva elipse.

9. **Elasticidad Lineal.** Se supone que el tensor de pequeñas deformaciones ε en un entorno de un punto de un sólido elástico trabajando a deformación plana viene dado por la matriz

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 120 & -80 \\ -80 & 100 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6}.$$

Calcula las deformaciones principales (autovalores) y direcciones principales de deformación (autovectores normalizados²).

Interpretación geométrica: la misma que en el ejercicio anterior pero cambiando la palabra inercia por deformación.

10. La **teoría de Hückel en Química Orgánica** analiza la posibilidad para algunos tipos de moléculas de tener propiedades aromáticas. Aplicada al ciclobutadieno C_4H_4 , aparece asociado el problema de autovalores definido por la ecuación

$$\mathbf{H}\mathbf{C} = E\mathbf{C}$$

donde \mathbf{H} representa el Hamiltoniano efectivo de un π electrón del sistema, los autovalores E de \mathbf{H} son la energías orbitales de los π electrones, y los autovectores \mathbf{C} representan las correspondientes orbitales moleculares. En concreto,

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

donde α, β son números reales negativos.

Comprueba que los autovalores de \mathbf{H} son $E_1 = \alpha + 2\beta$, $E_2 = E_3 = \alpha$, $E_4 = \alpha - 2\beta$, y que $C_1 = (1, 1, 1, 1)$, $C_2 = (0, 1, 0, -1)$, $C_3 = (1, 0, -1, 0)$, $C_4 = (1, -1, 1, -1)$ son autovectores asociados.

11. Responde a las siguientes cuestiones:

- Sea $f : V \rightarrow V$ una aplicación lineal y supongamos que $\lambda = 0$ es un autovalor de f . ¿Es f inyectiva? ¿Por qué?
- Sea A una matriz invertible y sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ los autovalores de A . ¿Cuáles son los autovalores de A^{-1} ? ¿Qué relación existe entre los autovectores de A y los de A^{-1} ?

12. **Algunos tipos destacados de matrices.** Recogemos en la siguiente tabla algunos tipos de matrices importantes

²De módulo 1.

en las aplicaciones junto con las propiedades de sus autovalores y autovectores

Matriz	Definición	Autovalores	Autovectores
Simétrica	$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$	$\lambda \in \mathbb{R}$	$\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}$ (si son ortogonales)
Definida Positiva	$x^T \mathbf{A} x > 0$	$\lambda > 0$	
de Markov	$m_{ij} > 0, \sum_{i=1}^n m_{ij} = 1$	$\lambda_{\text{máx}} = 1$	$v_j(\lambda_{\text{máx}}) > 0$
Tridiagonal Tipo 1	$\begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ b & a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b & a \end{pmatrix}$	$\lambda_k = a + 2b \cos \frac{k\pi}{n+1}$	
Ejemplo $a = 2, b = -1$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\lambda_k = 2 - 2 \cos \frac{k\pi}{n+1}$	$v_k = \left(\text{sen } \frac{k\pi}{n+1}, \text{sen } \frac{2k\pi}{n+1}, \dots \right)$

Determina de qué tipo son cada una de las siguientes matrices y calcula sus autovalores y autovectores:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad M_4 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- 13. Calcula la potencia n -ésima de las matrices M_1 y M_4 del ejercicio anterior.
- 14. Estudia para qué valores de los parámetros a y b es diagonalizable la matriz M .

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 4 & 0 & a \end{pmatrix}$$

15. **Teorema de Perron-Frobenius.** El teorema que sigue es una pieza clave en el algoritmo *PageRank* que usa Google para ordenar las búsquedas de las páginas de Internet. En su versión más sencilla el Teorema de Perron-Frobenius se enuncia así: "Sea A una matrix cuadrada con entradas positivas, es decir, $a_{ij} > 0$. Entonces existe un autovalor simple (es decir, de multiplicidad 1) cuyo autovector asociado tiene todas sus componentes estrictamente positivas". Calcula los autovalores y autovectores de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

y comprueba que se satisface el Teorema de Perron-Frobenius.

El secreto de Google y el Álgebra Lineal. Se recomienda la lectura de este artículo profesor de la Universidad Autónoma de Madrid, Pablo Fernández Gallardo, a aquellos alumnos que tengan curiosidad por saber las Matemáticas usadas en el algoritmo PageRank de Google. En particular, se podrá apreciar el papel destacado del Teorema de Perron-Frobenius.