

Capítulo 3

Ecuaciones y sistemas de ecuaciones no lineales

3.1. Ecuaciones no lineales

Denominamos *ecuación no lineal* a una ecuación del tipo

$$f(x) = 0$$

donde f es una función real de variable real no lineal. La función f puede ser polinomial, trascendente (aparecen en su expresión funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas) e incluso puede ocurrir que no se disponga de una expresión explícita de $f(x)$, pero que se conozcan las reglas para su cálculo, por ejemplo, una función descrita mediante una ecuación diferencial.

Definición 3.1 Llamamos **raíz** o **solución** de una ecuación no lineal $f(x) = 0$ a un valor r tal que $f(r) = 0$. En este caso se dice también que r es un **cerro** de f .

En general, las raíces de una ecuación no lineal no pueden ser calculadas de forma exacta. El objetivo de este capítulo consiste en ofrecer métodos numéricos que permitan obtener aproximaciones numéricas de las mismas.

En un proceso de cálculo de raíces de una ecuación no lineal pueden distinguirse tres fases:

1. Localización

Interesa conocer la zona en la que se encuentran las raíces. En general, podemos obtener esta información bien a partir de una tabla de valores de la función, bien mediante un estudio analítico, o incluso mediante una representación gráfica aproximada cuando la función sea demasiado compleja. En la mayoría de los casos las ecuaciones provienen de un problema técnico o científico, cuyo conocimiento nos puede ayudar en la localización de las raíces.

2. Separación

A veces dos raíces diferentes de una ecuación están muy próximas. En estos casos, antes de aplicar un método numérico, conviene separar las raíces; es decir, determinar intervalos que contengan una y sólo una raíz de la ecuación.

3. Aproximación numérica

El objetivo de esta fase es construir una sucesión de valores que converja hacia la raíz buscada. Esta sucesión se construye normalmente de forma iterativa a partir de valores iniciales que supondremos están suficientemente cerca de la raíz buscada: a partir de los valores $x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-m}$, obtenemos el valor de x_{k+1} , mediante una expresión del tipo $x_{k+1} = G(x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-m})$.

Uno de los teoremas más importantes utilizados en esta parte del cálculo numérico es el teorema de Bolzano que nos da condiciones suficientes para la existencia de una raíz en un intervalo.

Teorema 3.1 (Teorema de los ceros de Bolzano) Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}([a, b])$ con $f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists r \in [a, b]$ donde $f(r) = 0$.

El siguiente resultado nos proporciona la unicidad de la solución en un intervalo (separación de raíces).

Teorema 3.2 Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ con $f(a) \cdot f(b) < 0$, si además $f'(x) > 0$ (o $f'(x) < 0$); $\forall x \in (a, b) \Rightarrow \exists^{\circ} r \in (a, b)$ con $f(r) = 0$.

Demostración: Como $f(a) \cdot f(b) < 0$, por el teorema de Bolzano, debe existir un $r \in [a, b]$, tal que $f(r) = 0$, en este caso $r \in (a, b)$ puesto que la desigualdad es estricta y por tanto ni $f(a)$, ni $f(b)$ pueden ser 0.

Vamos a demostrar ahora la unicidad. Para ello, supongamos que $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a, b)$ (se procedería de forma análoga si $f'(x) < 0$, $\forall x \in [a, b]$), la función será por tanto creciente en (a, b) .

Supongamos ahora que existe otro punto $s \in (a, b)$, con $r \neq s$ y $f(s) = 0 \Rightarrow$ Suponiendo $s > r$ y usando el teorema de Rolle, puesto que $f(r) = f(s) = 0 \Rightarrow \exists \xi \in [r, s] : f'(\xi) = 0$, pero como $\xi \in [r, s] \Rightarrow \xi \in (a, b)$ y llegamos a una contradicción con la hipótesis inicial.

Proposición 3.3 Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ y supongamos que $\exists m > 0 \in \mathbb{R}$, con $|f'(x)| \geq m \forall x \in [a, b]$. Entonces si r es una raíz de $f(x)$ en $[a, b]$ y α es una aproximación de r , se cumple

$$|r - \alpha| \leq \frac{|f(\alpha)|}{m}$$

Demostración: Como $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, utilizando el teorema de los incrementos finitos de Lagrange, $\exists \xi \in [a, b]$:

$$f(\alpha) - f(r) = f'(\xi)(\alpha - r)$$

como r es una raíz, entonces $f(r) = 0$

$$f(\alpha) = f'(\xi)(\alpha - r),$$

tomando valores absolutos

$$|f(\alpha)| = |f'(\xi)| |\alpha - r|$$

y utilizando la cota inferior m

$$|f(\alpha)| = |f'(\xi)| |\alpha - r| \geq m |\alpha - r|$$

de donde se obtiene el resultado indicado.

3.2. Método de aproximaciones sucesivas

Supongamos $f(x) \in \mathcal{C}([a, b])$ y supongamos que $\exists^{\circ} r \in [a, b]$ tal que $f(r) = 0$. Definimos la función $g(x)$ como

$$g(x) = x - f(x)$$

entonces, siendo r una raíz de $f(x)$, se cumple

$$g(r) = r - f(r) = r - 0 = r$$

lo que hace que r sea un punto fijo de la función $g(x)$.

Tomamos $x_0 \in [a, b]$ y construimos la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definida como

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n - f(x_n)$$

Nos preguntamos en primer lugar si la sucesión así construida será convergente y en caso afirmativo, cuál será su límite. Supongamos que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene límite, como $g(x)$ es continua (ya que está definida a partir de $f(x)$ que lo es por hipótesis) se cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right)$$

Si la sucesión tuviera límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = s$$

entonces como cualquier subsucesión suya tendría ese mismo límite, se cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = s$$

pero si tenemos en cuenta la construcción de la sucesión

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n)$$

que por continuidad

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = g(s)$$

luego s es un punto fijo de la función $g(x)$, y por tanto también ocurrirá

$$g(s) = s - f(s) = s \Rightarrow f(s) = 0$$

es decir, s será una raíz de la función $f(x)$. Si $f(x)$ solamente tuviera una raíz, entonces está claro que $r = s$ y habríamos resuelto el problema inicial.

El método de aproximaciones sucesivas se basa en la construcción de forma recursiva de una sucesión $\{x_n\}$. A partir de un cierto $x_0 \in [a, b]$, calculamos el siguiente elemento de la sucesión como $x_1 = g(x_0)$, y en general se calculará x_{n+1} a partir de x_n utilizando la función $g(x)$: $x_{n+1} = g(x_n)$. Si la sucesión así construida es convergente, lo hará a un punto fijo de la función $g(x)$, es decir, a una raíz de la función $f(x)$. No obstante la sucesión $\{x_n\}$ puede ser no convergente y en este caso hay que detener la producción de valores de la sucesión según un determinado criterio. El algoritmo del método se podría desarrollar como sigue:

1. Tomamos $k = 0$, $\varepsilon > 0$ y $x_0 \in [a, b]$ y un valor máximo, N , para el número máximo de iteraciones.
2. Calculamos $x_{k+1} = g(x_k) = x_k - f(x_k)$
3. Si la diferencia entre x_{k+1} y x_k es suficientemente pequeña, es decir, si $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$, entonces x_{k+1} será solución aproximada, en caso contrario procedemos a comprobar si el número de iteraciones, es decir, si el número de términos de la sucesión excede un valor prefijado. Si $k + 1 > N$ entonces hemos superado el número máximo permitido de términos de la sucesión y el algoritmo se detiene. Si $k + 1 \leq N$ entonces cambiamos k por $k + 1$ y volvemos al punto 2.

La superación del número máximo de iteraciones suele ocurrir por dos motivos: primero, puede suceder que el número máximo de iteraciones sea insuficiente; en este caso podemos solucionar el problema aumentando el valor de ese número máximo. En segundo lugar puede ocurrir que la sucesión no converja a ningún punto fijo, en este caso la solución de este problema pasa por la existencia o no de la raíz. Si se ha demostrado la existencia de la raíz, podemos intentar cambiar el valor del término inicial x_0 , y comprobar si la sucesión iniciada en ese punto es ahora convergente o no.

Los siguientes resultados garantizan el éxito del método de aproximaciones sucesivas.

Definición 3.2 Sea $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, diremos que g es lipschitziana si y sólo si $\exists 0 < L < 1 \in \mathbb{R}$, llamada constante de Lipschitz de f , tal que

$$\forall x, y \in [a, b] \Rightarrow |g(x) - g(y)| \leq L|x - y|$$

También se dice que g es contractiva.

Ejemplo 3.1 Vamos a demostrar, usando la definición, que la función $g(x) = x^2$ es lipschitziana en el intervalo $[0, \frac{1}{4}]$. Para ello tomamos $x, y \in [0, \frac{1}{4}]$, es decir, se cumple

$$0 \leq x, y \leq \frac{1}{4}$$

Entonces

$$|g(x) - g(y)| = |x^2 - y^2| = |(x - y)(x + y)| = |x - y| \cdot |x + y|$$

usando la desigualdad triangular

$$|x^2 - y^2| \leq |(x - y)| \cdot (|x| + |y|)$$

pero como $x, y \geq 0$

$$|x^2 - y^2| \leq |(x - y)| \cdot (x + y)$$

y como $x, y \leq \frac{1}{4}$, entonces $x + y \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, luego

$$|x^2 - y^2| \leq \frac{1}{2} |(x - y)|$$

y la constante de Lipschitz es $\frac{1}{2}$.

Si la función fuera derivable, entonces podemos obtener una condición de tipo Lipschitz utilizando la primera derivada.

Teorema 3.4 Sea $g(x) \in \mathcal{C}^n([a, b])$

$$\text{Si } \exists L \text{ tal que } |g'(x)| \leq L < 1 \implies \forall x, y \in [a, b] : |g(x) - g(y)| \leq L|x - y|$$

es decir la función g es lipschitziana.

Demostración: Para demostrar esta implicación se utiliza el teorema del valor medio. Si tomamos $x, y \in [a, b]$, entonces utilizamos el teorema del valor medio

$$|g(x) - g(y)| = |g'(\xi)(x - y)| = |g'(\xi)| \cdot |(x - y)| \leq L|x - y|$$

Ejemplo 3.2 Vamos a demostrar, usando el teorema anterior, que la función $g(x) = x^2$ es lipschitziana en el intervalo $[0, \frac{1}{4}]$. Calculamos la derivada

$$g'(x) = 2x$$

que es una recta con pendiente positiva, luego la función es creciente y alcanza el máximo en el extremo superior del intervalo, es decir

$$g'(x) \leq g'\left(\frac{1}{4}\right) = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

como además $x \geq 0$, entonces $g'(x) = 2x > 0$ y por tanto $|g'(x)| = g'(x)$ para $x \in [0, \frac{1}{4}]$, luego se cumple

$$|g'(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

Teorema 3.5 Supongamos que $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, y que $g(x)$ verifica alguna condición de tipo Lipschitz con constante L y supongamos que se cumple

$$\left| g\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{a+b}{2} \right| \leq (1-L) \frac{b-a}{2}$$

entonces, $g(x)$ es una aplicación del intervalo en sí mismo, es decir,

$$g(x) \in [a, b] \quad \forall x \in [a, b]$$

Demostración: Sea $x \in [a, b]$, tenemos que comprobar que $g(x) \in [a, b]$, o equivalentemente que la distancia de $g(x)$ al punto medio del intervalo es menor que la longitud del intervalo partido por dos, es decir, dado $x \in [a, b]$ tendremos que demostrar que $|g(x) - \frac{a+b}{2}| \leq \frac{b-a}{2}$,

$$\begin{aligned} \left| g(x) - \frac{a+b}{2} \right| &= \left| g(x) - g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{a+b}{2} \right| \leq \text{(desigualdad triangular)} \\ &\leq \left| g(x) - g\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| + \left| g\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{a+b}{2} \right| \leq \text{(condición Lipschitz+hipótesis)} \\ &\leq L \left| x - \frac{a+b}{2} \right| + (1-L) \frac{b-a}{2} \leq \text{(Si } x \in [a, b] \Rightarrow d\left(x, \frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{b-a}{2}) \\ &\leq L \frac{b-a}{2} + (1-L) \frac{b-a}{2} = \frac{b-a}{2} \end{aligned}$$

Teorema 3.6 (Convergencia del método del punto fijo) Sea $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y supongamos que se cumplen las siguientes hipótesis

1.- La función $g(x)$ es una función del intervalo sobre sí mismo, es decir

$$\forall x \in [a, b] \implies g(x) \in [a, b]$$

2.- La función es lipchitziana con constante de Lipschitz L .

Entonces, bajo estas hipótesis se cumple:

a.- La función $g(x)$ tiene un único punto fijo, es decir

$$\exists^{\circ} r \in [a, b] : g(r) = r$$

b.- El punto fijo se puede obtener como el límite de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = r$$

siendo x_n la sucesión obtenida como

$$x_0 \in [a, b]$$

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

c.- Se cumplen las siguientes desigualdades

$$|x_n - r| \leq \frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}| \leq \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|$$

Demostración: Vamos a demostrar en primer lugar que, la sucesión $\{x_n\}$ construida es convergente, para ello, vamos a demostrar que es una sucesión de Cauchy, es decir, que se cumple

$$\forall \varepsilon > 0 \implies \exists n_0, \text{ tal que si } n, m \geq n_0, \text{ entonces } |x_m - x_n| \leq \varepsilon$$

Supongamos en primer lugar un número natural n , entonces teniendo en cuenta que $x_{n+1} = g(x_n)$, podemos poner

$$|x_{n+1} - x_n| = |g(x_n) - g(x_{n-1})|$$

aplicando la condición de Lipschitz obtenemos

$$|g(x_n) - g(x_{n-1})| \leq L |x_n - x_{n-1}|$$

el proceso se repite con x_n y x_{n-1}

$$L |x_n - x_{n-1}| = L |g(x_{n-1}) - g(x_{n-2})| \leq L (L |x_{n-1} - x_{n-2}|) = L^2 |x_{n-1} - x_{n-2}|$$

y sucesivamente hasta obtener

$$|x_{n+1} - x_n| \leq L^n |x_1 - x_0| \tag{3.1}$$

Supongamos ahora que $m > n$, entonces podemos poner

$$|x_m - x_n| = |x_m + (x_{m-1} - x_{m-1}) + (x_{m-2} - x_{m-2}) + \dots + (x_{n+1} - x_{n+1}) - x_n|$$

y reordenando

$$|x_m - x_n| = |(x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + x_{m-2} + \dots - x_{n+1} + (x_{n+1} - x_n)|$$

si aplicamos ahora la desigualdad triangular obtenemos

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n|$$

aplicando la desigualdad obtenida para dos términos consecutivos^{3.1}

$$|x_m - x_n| \leq L^{m-1} |x_1 - x_0| + L^{m-2} |x_1 - x_0| + \cdots + L^n |x_1 - x_0|$$

podemos sacar factor común $|x_1 - x_0|$

$$|x_m - x_n| \leq (L^{m-1} + L^{m-2} + \cdots + L^n) |x_1 - x_0|$$

sumando la progresión geométrica de razón L que hay entre paréntesis

$$|x_m - x_n| \leq \frac{L^n - L^m}{1 - L} |x_1 - x_0|$$

de esta forma si n y m , son suficientemente grandes y puesto que $0 < L < 1$

$$\frac{L^n - L^m}{1 - L} \longrightarrow 0$$

lo que demuestra que la sucesión $\{x_n\}$ es de Cuchy y por tanto convergente, es decir, existe un cierto $r \in \mathbb{R}$, tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = r$$

que por la construcción de la sucesión y por la continuidad de $g(x)$ se obtiene

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_{n-1}) = g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}\right) = g(r)$$

luego r es un punto fijo de $g(x)$.

Para demostrar la unicidad de este punto fijo, supondremos que existe otro punto fijo de $g(x)$, es decir, existe $s \in \mathbb{R}$ con $r \neq s$ y $g(s) = s$. Al aplicar la condición de Lipschitz

$$|r - s| = |g(r) - g(s)| \leq L|r - s|$$

y puesto que $r \neq s$ podemos dividir por $|r - s|$ para obtener

$$1 \leq L$$

desigualdad que es contradictoria con las hipótesis del enunciado puesto que $L < 1$, luego el punto fijo r es único.

Para demostrar el último apartado tomamos x_n , la condición de Lipschitz y que r es punto fijo de $g(x)$ para obtener

$$|x_n - r| \leq |g(x_{n-1}) - g(r)| \leq L|x_{n-1} - r| = L|x_{n-1} - x_n + x_n - r|$$

usando la desigualdad triangular

$$L|x_{n-1} - x_n + x_n - r| \leq L|x_{n-1} - x_n| + L|x_n - r|$$

de donde se obtiene la primera desigualdad

$$|x_n - r| - L|x_n - r| \leq L|x_{n-1} - x_n|$$

$$(1 - L)|x_n - r| \leq L|x_{n-1} - x_n|$$

$$|x_n - r| \leq \frac{L}{1 - L} |x_{n-1} - x_n|$$

Para demostrar la segunda de las desigualdades, hay que tener en cuenta que para dos términos consecutivos 3.1

$$|x_n - x_{n-1}| \leq L^{n-1} |x_1 - x_0|$$

y multiplicando ahora por $\frac{L}{1-L} > 0$, se obtiene el resultado buscado

$$\frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}| \leq \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|$$

Esta desigualdad nos proporciona una medida del error que se comete en la aproximación n -ésima

$$|x_n - r| \leq \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|$$

Observación 3.1 El teorema anterior es válido para intervalos abiertos de la forma: $(-\infty, b]$, $[a, \infty)$ o $(-\infty, \infty)$.

Teorema 3.7 (Convergencia local) Sean $g, g' \in \mathcal{C}[a, b]$ y supongamos que $g(x)$ tiene un punto fijo r en $[a, b]$. Entonces si $|g'(r)| < 1 \Rightarrow$

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall x_0 \in [r - \varepsilon, r + \varepsilon] \Rightarrow \{Si\} x_n = g(x_{n-1}) \Rightarrow \{x\}_{n=0}^{\infty} \text{ converge a } r$$

Ejemplo 3.3 Consideremos la función $f(x) = x^2 - e^x$ en el intervalo $[-1, 0]$. Vamos a comprobar que existe una única raíz de $f(x)$ en ese intervalo, para ello evaluamos la función en los extremos del intervalo

$$f(-1) = -1 + e^{-1} = -1 + \frac{1}{e} \simeq -0,63212... < 0$$

$$f(1) = 0 + e^0 = 0 + 1 = 1 > 0$$

puesto que toma valores de signo contrario en los extremos del intervalo y la función es claramente continua, el teorema de Bolzano nos garantiza la existencia de una raíz de $f(x)$ en ese intervalo. Por otra parte, la derivada de la función es

$$f'(x) = 1 + e^x > e^x > 0$$

luego $f(x)$ es creciente y la raíz es única.

3.2.1. Orden de convergencia

Sea $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, supongamos que r es la solución de $x = g(x)$ y construimos la sucesión $x_{n+1} = g(x_n)$. Definimos el error e_n como

$$e_n = x_n - r$$

El método $x_{n+1} = g(x_n)$ se dice convergente de orden p (con $p \geq 1$) si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = k > 0$$

con $0 < k < 1$, en el caso $p = 1$.

Supongamos que $g(x) \in \mathcal{C}^{k+1}(I)$, entonces por una parte el error $(n+1)$ -ésimo viene dado por

$$e_{n+1} = x_{n+1} - r = g(x_n) - g(r)$$

y por otra parte, si utilizamos el desarrollo de Taylor hasta el orden k centrado en r y evaluado en x_n , podemos poner

$$g(x_n) = g(r) + g'(r)(x_n - r) + \frac{g''(r)}{2!}(x_n - r)^2 + \dots + \frac{g^{(k)}(r)}{k!}(x_n - r)^k + R_k(\xi_k)$$

donde

$$R_k(\xi_k) = \frac{g^{(k+1)}(\xi_k)}{(k+1)!}(x_n - r)^{k+1}$$

es el resto de Lagrange. Empleando ambas expresiones de forma conjunta, se obtiene

$$e_{n+1} = g(x_n) - g(r) = g'(r)(x_n - r) + \frac{g''(r)}{2!}(x_n - r)^2 + \dots + \frac{g^{(k)}(r)}{k!}(x_n - r)^k + R_k(\xi_k)$$

y al dividir por $e_n = x_n - r$

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{g(x_n) - g(r)}{x_n - r} = g'(r) + \frac{g''(r)}{2!}(x_n - r) + \dots + \frac{g^{(k)}(r)}{k!}(x_n - r)^{k-1} + \frac{g^{(k+1)}(\xi_n)}{(k+1)!}(x_n - r)^k$$

Usando la expresión anterior y haciendo $n \rightarrow \infty$, teniendo en cuenta que el límite de x_n es r , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{e_{n+1}}{e_n} \right| = |g'(r)| \Rightarrow \text{Si } 0 < |g'(r)| < 1 \Rightarrow \text{Tenemos convergencia lineal}$$

En el caso de que $g'(r) = 0$ entonces podemos volver a dividir por $(x_n - r)$ y tomando límites cuando $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = \frac{|g''(r)|}{2} \Rightarrow \text{Si } |g''(r)| \neq 0 \Rightarrow \text{Tenemos convergencia cuadrática}$$

En general si $g'(r) = g''(r) = \dots = g^{(k-1)}(r) = 0$, $g^{(k)}(r) \neq 0$, el método es de orden k .

3.2.2. Método de Whittaker

El método de Whittaker consiste en elegir la función $g(x)$ de forma que se cumpla alguna condición de convergencia, por ejemplo podemos elegir $g(x)$ como

$$g_k(x) = x - kf(x)$$

y por tanto si r es un punto fijo de $g(x) = x - f(x)$, también lo será de $g_k(x)$ con

$$g'(x) = 1 - kf'(x)$$

y elegir el valor de k de forma que se cumpla

$$|g'(r)| = |1 - kf'(r)| < 1$$

Otra variación de este método consiste en elegir $\alpha(x)$, una función no nula definida en $[a, b]$ y construir la ecuación

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{\alpha(x)}$$

de nuevo un punto fijo de $g(x)$ es un cero de $f(x)$

$$g(r) = r \iff r - \frac{f(r)}{\alpha(r)} = r \iff \frac{f(r)}{\alpha(r)} = 0 \iff f(r) = 0$$

El método converge globalmente si $|g'(x)| < 1$, es decir

$$|g'(x)| = \left| 1 - \frac{f'(x)\alpha(x) - \alpha'(x)f(x)}{[\alpha(x)]^2} \right| < 1; \forall x \in [a, b]$$

o localmente si $|g'(r)| < 1$

$$|g'(r)| = \left| 1 - \frac{f'(r)}{\alpha(r)} \right| < 1$$

Para obtener la convergencia cuadrática, entonces debe ocurrir $g'(r) = 0$

$$1 - \frac{f'(r)}{\alpha(r)} = 0 \Rightarrow \alpha(r) = f'(r)$$

Por ejemplo, si $\alpha(x) = f'(x)$ obtenemos

$$\alpha(x) = f'(x) \Rightarrow g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

que como veremos posteriormente es el método de Newton-Raphson.

3.3. Método de bipartición

El teorema de Bolzano asegura que, si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y $f(a)f(b) < 0$, entonces existe un punto $r \in (a, b)$ que verifica $f(r) = 0$. En principio, podría existir más de una raíz dentro del intervalo $[a, b]$, pero supondremos que sólo existe una, entendiendo que previamente se habrán efectuado procesos de localización y separación.

El método de bipartición construye una sucesión de intervalos encajados

$$(a_0, b_0) \supset (a_1, b_1) \supset \dots \supset (a_k, b_k) \supset \dots$$

de manera que cada intervalo contenga a la raíz buscada, mientras que la amplitud de cada uno de ellos es la mitad de la del anterior. Cuando la amplitud del intervalo sea suficientemente pequeña como para satisfacer la precisión con la que queremos hallar la raíz, podremos considerar como una buena aproximación de ésta, el punto medio de dicho intervalo.

La construcción del método consiste en dividir en cada iteración el intervalo por la mitad. Tomemos $p = \frac{a+b}{2}$ y calculemos el valor de la función en ese punto. Puede ocurrir que $f(p) = 0$, en tal caso habremos encontrado el punto fijo. Por el contrario si $f(p) \neq 0$, entonces o bien $f(a)f(p) < 0$ y elegimos como nuevo intervalo $[a_1, b_1] = [a, p]$, o bien $f(b)f(p) < 0$ y en este caso elegimos como nuevo intervalo $[a_1, b_1] = [p, b]$. En cualquiera de estos dos casos se habrá reducido la longitud del nuevo intervalo a la mitad. Este mecanismo se repite con el nuevo intervalo, se construye así la sucesión de intervalos indicada al principio de la sección.

El algoritmo sería el siguiente: A partir de una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$; con $f \in \mathcal{C}([a, b])$ y $f(a)f(b) < 0$ y con una única raíz en el intervalo $[a, b]$, llamamos $a_0 = a$ y $b_0 = b$

1. Tomamos $k = 0$, $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$
2. Es $k > N$, el algoritmo termina indicando que se han superado el número de iteraciones máximas.
3. Elegimos

$$p = \frac{a_k + b_k}{2}$$

4. Si $f(p) = 0 \Rightarrow p$ es la raíz de $f(x)$
5. Si $f(p) \neq 0 \Rightarrow$

- a) Si $f(a)f(p) < 0 \Rightarrow [a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, p]$
- b) Si $f(p)f(b) < 0 \Rightarrow [a_{k+1}, b_{k+1}] = [p, b_k]$

6. Si la longitud del intervalo es suficientemente pequeña, es decir, si $|b_{k+1} - a_{k+1}| < \varepsilon \Rightarrow$ Podemos tomar como raíz de la función f , cualquiera de los puntos: a_{k+1}, b_{k+1} o $p = \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}$. En caso contrario se cambia k por $k + 1$ y volvemos al punto 2.

Mediante este algoritmo se construyen dos sucesiones de puntos $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$. Por construcción, la sucesión $\{a_n\}$ es creciente y está acotada superiormente, por cualquiera de los elementos b_n , mientras que la sucesión $\{b_n\}$ es decreciente y acotada inferiormente por cualquiera de los elementos a_n , por tanto, ambas sucesiones tienen límite: α y β , respectivamente. También por la construcción de los diferentes intervalos tenemos que la longitud del intervalo $[a_n, b_n]$ es $\frac{b-a}{2^n}$. Por una parte tenemos

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \\ \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha - \beta = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$$

y por tanto $\alpha = \beta$. Teniendo en cuenta que se han elegido los extremos del intervalo de forma que la función $f(x)$ tome valores de signo contrario en ellos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)f(b_n) \leq 0$$

Por otra parte como $f(x) \in \mathcal{C}([a, b])$ y $\alpha = \beta$

$$0 \geq \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \cdot f(b_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) \cdot f(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n) = f(\alpha) \cdot f(\beta) = f(\alpha)^2 \geq 0$$

expresión de la que se extrae

$$f(\alpha) = 0$$

Análisis del error en el método de bipartición

En este algoritmo podemos determinar la cota de error absoluto que cometeremos al elegir un punto como aproximación de la solución de la ecuación. Si r es la raíz de la función f en el intervalo $[a, b]$, entonces el error cometido según el punto elegido será

$$\left. \begin{array}{l} r - a_n \leq b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \\ b_n - r \leq b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \end{array} \right\} \iff \text{Si elegimos como solución algún extremo del intervalo}$$

$$\left| r - \frac{a_n + b_n}{2} \right| \leq \frac{b_n - a_n}{2} \leq \frac{b-a}{2^{n+1}} \iff \text{Si elegimos como solución el punto medio del intervalo}$$

Si queremos determinar el número de iteraciones necesarias para alcanzar una precisión predeterminada $\varepsilon > 0$, bastará con elegir la longitud del intervalo final de forma que

$$|r - x_n| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}} < \varepsilon \implies 2^{n+1} > \frac{b-a}{\varepsilon}$$

y tomando logaritmos en ambos lados

$$(n+1) \log 2 = \log \frac{b-a}{\varepsilon} \implies n \geq \frac{\log(b-a) - \log(\varepsilon)}{\log 2}$$

3.3.1. Método de Lagrange o de la *regula falsi*

Un defecto del método de bipartición es que al dividir el intervalo $[a, b]$ en dos mitades iguales, no se tienen en cuenta las magnitudes de $f(a)$ y $f(b)$. Por ejemplo, si $f(a)$ es, en valor absoluto, mucho menor que $f(b)$, es lógico pensar que la raíz se encuentre más cerca de a que de b .

Este método alternativo intenta aprovechar esta idea. Al igual que el método de bipartición, este método trata de hallar la única raíz de la ecuación $f(x)$ en $[a, b]$, siendo $f(a) \cdot f(b) < 0$. El método consiste en sustituir la curva $f(x)$ por la cuerda que une los extremos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ cuya ecuación es

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Si llamamos x_1 al punto intersección de esta curva con el eje \overline{OX} tendremos

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ -f(a) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x_1 - a) \end{aligned}$$

y despejando x_1

$$x_1 = a - f(a) \frac{b - a}{f(b) - f(a)} = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

A continuación se determina en cuál de los intervalos $[a, x_1]$ o $[x_1, b]$ se encuentra la raíz r , comprobando dónde la función cambia de signo. Llamamos a ese intervalo $[a_1, b_1]$ y volvemos a repetir el razonamiento anterior.

Análisis del error en el método de Lagrange

Supongamos que los subintervalos obtenidos con el método de la Regula Falsi son de la forma

$$[a, b_k]$$

entonces el cálculo de la raíz se realiza a partir de la sucesión

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= b \\ x_{n+1} &= \frac{af(x_n) - x_n f(a)}{f(x_n) - f(a)} \end{aligned} \right\}$$

Definiendo $g(x)$ como

$$g(x) = \frac{af(x) - xf(a)}{f(x) - f(a)}$$

y si $f(x)$ es derivable

$$g'(x) = \frac{(af'(x) - f(a))(f(x) - f(a)) - (af(x) - xf(a))f'(x)}{(f(x) - f(a))^2}$$

Si r es la raíz de $f(x) = 0$

$$\begin{aligned} g'(r) &= \frac{(af'(r) - f(a))(-f(a)) + rf(a)f'(r)}{(-f(a))^2} = \\ &= \frac{rf'(r) - (af'(r) - f(a))}{f(a)} = \\ &= \frac{f(a) + (r - a)f'(r)}{f(a)} \end{aligned}$$

Si $f \in \mathcal{C}^2$ en un intervalo que contenga al intervalo $[a, r]$, entonces usando el desarrollo de Taylor de orden 1

$$f(a) = f(r) + f'(r)(a - r) + \frac{f''(\xi)}{2!}(a - r)^2$$

siendo ξ un punto intermedio entre a y r , o

$$f(a) = f'(r)(a - r) + \frac{f''(\xi)}{2!}(a - r)^2$$

Sustituyendo en la expresión de $g'(r)$

$$g'(r) = \frac{f''(\xi)}{2}(a - r)^2$$

Por tanto habrá convergencia local si

$$\left| \frac{f''(\xi)}{2}(a - r)^2 \right| < 1$$

que será en general, lineal o de orden 1.

3.4. Método de Newton-Raphson

Se trata de hallar la única raíz de $f(x) = 0$ en $[a, b]$ donde $f(a) \cdot f(b) < 0$, siendo $f(x)$ derivable en (a, b) . La idea de este método consiste en sustituir la función $f(x)$ por la tangente a la misma en uno de sus extremos. Si elegimos, por ejemplo, la tangente en el extremo superior, su ecuación toma la forma

$$y - f(b) = f'(b)(x - b)$$

Buscamos ahora el punto intersección entre esta recta y el eje \overline{OX} , donde $y = 0$, y lo llamamos x_1 .

$$-f(b) = f'(b)(x_1 - b)$$

despejando x_1

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

Tomamos ahora ese nuevo punto, como partida para obtener el siguiente elemento de la sucesión. De forma general si queremos calcular el punto x_{n+1} a partir de x_n utilizamos la expresión recursiva

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

En este caso la función $g(x)$ es

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Teorema 3.8 (Teorema de la convergencia local) *Si $f''(x)$ es continua y $f'(x)$ no se anula en algún intervalo que contenga a una raíz r de $f(x) = 0$, entonces $\exists \varepsilon > 0$ tal que el método de Newton es convergente $\forall x_0$ tal que $|x_0 - r| \leq \varepsilon$.*

Si $f'''(x)$ es continua, la convergencia es al menos cuadrática

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \Rightarrow g'(r) = 0 < 1 \Rightarrow \text{Hay convergencia local}$$

$$g''(x) = \frac{(f'(x)f''(x) + f(x)f'''(x))(f'(x))^2 - 2f(x)f''(x)f'(x)}{(f'(x))^4}$$

$$g''(r) = \frac{(f'(r))^3 f''(r)}{(f'(r))^4} = \frac{f''(r)}{f'(r)}$$

$$e_{n+1} = \frac{1}{2} e_n^2 g''(\xi_n) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = \frac{1}{2} |g''(s)| = \frac{1}{2} \left| \frac{f''(s)}{f'(s)} \right|$$

Teorema 3.9 (Teorema de la convergencia global) *Si $f(x) \in \mathcal{C}^2([a, b])$ verificando*

1. $f(a) \cdot f(b) < 0$
2. $\forall x \in [a, b] \implies f'(x) \neq 0$ (monótona estricta)
3. $\forall x \in [a, b] \implies f''(x)$ no cambia de signo

Entonces existe una única raíz r de $f(x) = 0$, $r \in [a, b]$ y la sucesión $\{x_n\}$, generada por el método de Newton-Raphson, converge hacia r , $\forall x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) \cdot f''(x_0) \geq 0$.

3.4.1. Método de la secante

Para el método de Newton-Raphson es preciso calcular el valor de la derivada de la función en cada punto $f'(x)$. Otra alternativa es que podemos aproximar el valor de esta derivada mediante la expresión

$$f'(x_n) \simeq \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

con lo que el cálculo de x_{n+1} queda como

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Esta expresión nos da el método de la *secante*, que como podemos comprobar se elabora a partir de 2 valores iniciales x_0 y x_1 para obtener el siguiente punto de la sucesión.

Teorema 3.10 *El orden de convergencia del método de la secante es la razón áurea*

$$\rho = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \simeq 1'618\dots$$

3.4.2. Aceleración de la convergencia. Método de Aitken

Observemos que los métodos anteriores para la resolución de ecuaciones no lineales consisten en la construcción de una sucesión de valores que, en el mejor de los casos, es convergente hacia la solución pedida. La rapidez de convergencia depende del método usado y de la propia ecuación. Los llamados *métodos de aceleración de convergencia* tienen como objetivo la obtención, a partir de la sucesión inicial $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, de otra sucesión $\{x_k^*\}_{k \in \mathbb{N}}$, que converge más rápidamente hacia la raíz. Veamos uno de esos métodos: el método de Aitken.

Supongamos que la sucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tiene como límite α , con $x_k \neq \alpha$, y tal que el error se comporta asintóticamente como una sucesión geométrica de razón menor que 1, en valor absoluto; es decir

$$x_{k+1} - \alpha = (L + \delta_k)(x_k - \alpha)$$

con

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = 0, |L| < 1$$

entonces, la sucesión $\{x_k^*\}_{k \in \mathbb{N}}$ dada por

$$x_k^* = x_k - \frac{(\Delta x_k)^2}{\Delta^2 x_k} = x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k} \quad (k \geq 0)$$

está bien definida para k suficientemente grande y cumple que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k^* - \alpha}{x_k - \alpha} = 0$$

Por tanto $\{x_k^*\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge hacia α más rápidamente que $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, este método permite, así, acelerar la convergencia de métodos con convergencia lineal.

3.5. Sistemas de ecuaciones no lineales

Queremos encontrar ahora raíces de funciones vectoriales, es decir, dada la función vectorial

$$F : K \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

buscamos $x \in K$, tal que

$$F(x) = 0$$

Si $F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, entonces la ecuación anterior vendría dada por

$$\left. \begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

En esta sección se exponen, para la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales, dos métodos numéricos que son generalizaciones de los métodos ya estudiados en el caso de una ecuación no lineal: el método de iteración simple y el de Newton. Como en el caso de funciones de una sola variable, el sistema anterior es equivalentemente a

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= g_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ x_2 &= g_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ &\vdots \\ x_n &= g_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{aligned} \right\}$$

donde

$$g_k(x_1, \dots, x_n) = x_k - f_k(x_1, \dots, x_n)$$

o en notación vectorial

$$G(x) = x - F(x)$$

donde $G = (g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_n(x_1, \dots, x_n))$, $F = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$ y $x = (x_1, \dots, x_n)$.

3.5.1. Método de iteración simple

Partimos de un punto

$$x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in K \subseteq \mathbb{R}^n$$

y construimos la sucesión

$$x^{(n+1)} = G(x^{(n)})$$

como en el caso unidimensional, si la sucesión así construida es convergente, lo hará a un punto fijo de la función G , y por tanto a una raíz de la función F .

Definición 3.3 Sea $G : K \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, diremos que F es lipschitziana si y sólo si $\exists 0 < L < 1 \in \mathbb{R}$, llamada constante de Lipschitz de f , tal que

$$\forall x, y \in K \Rightarrow \|G(x) - G(y)\| \leq L \|x - y\|$$

siendo $\|\cdot\|$ una norma sobre \mathbb{R}^n , por ejemplo, la norma euclídea. La función $G(x)$ se dice que es contractiva.

Teorema 3.11 Sea K el rectángulo cerrado de \mathbb{R}^n , dado por

$$K = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

y supongamos que se cumplen las siguientes hipótesis:

1. $\forall x \in K \Rightarrow G(x) \in K$
2. $\forall x, y \in K \Rightarrow \|g(x) - g(y)\| \leq L \|x - y\|$ para $0 < L < 1$

Entonces $\forall x^{(0)} \in K$ la sucesión $\{x^{(n)}\}$ generada por la expresión

$$x^{(n+1)} = G(x^{(n)})$$

converge a una única solución de la ecuación

$$x = G(x)$$

Ejemplo 3.4 Sea

3.5.2. Método de Newton para sistemas de ecuaciones

Supongamos ahora que las funciones f_k son diferenciables con continuidad y supongamos ahora que la matriz Jacobiana es regular en un entorno de la solución, es decir

$$\det(JF(x)) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} \neq 0$$

El objetivo del método de Newton es generar una sucesión de vectores $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots$ que converja hacia la solución buscada, a partir de un vector inicial $x^{(0)}$ adecuado, construyendo la sucesión de forma recurrente mediante

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - (JF(x^{(k)}))^{-1} f(x^{(k)})$$

que es una generalización a dimensión n del método de Newton para una ecuación en una variable.

Como el cálculo de la inversa del Jacobiano tiene un coste computacional muy alto, el método de Newton acostumbra a formularse de la siguiente manera:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$$

con $\Delta x^{(k)}$ cumpliendo el sistema lineal

$$JF(x^{(k)})\Delta x^{(k)} = -f(x^{(k)})$$

es decir

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1^{(k)} \\ \vdots \\ \Delta x_n^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \\ \vdots \\ -f_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \end{pmatrix}$$

Así en lugar de calcular la inversa de la matriz jacobiana en cada iteración, lo que hay que hacer es resolver un sistema lineal y esto lo podemos hacer usando los métodos adecuados del tema anterior.

Cuando el cálculo de las derivadas parciales de f_k es demasiado complicado, podemos aproximarlas mediante sus cocientes incrementales (ver tema de derivación numérica):

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) \simeq \frac{f_k(x_1, \dots, x_j + h_j, \dots, x_n) - f_k(x_1, \dots, x_j - h_j, \dots, x_n)}{2h_j}$$

Eligiendo los valores de h_j de manera conveniente.

Una variante del método de Newton, que se llama *método de Steffensen*, que consiste en tomar

$$h_j = f_j(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \quad j = 1, \dots, n$$