

1. Dados los números complejos $z_1 = 2 + i$ y $z_2 = 3 - 2i$, calcula:

a) $z_1 + z_2$ b) $3z_1 - 2z_2$ c) $z_1 z_2$ d) $(z_2)^{-1}$ e) $\frac{z_1}{z_2}$

2. Determina los valores de x e y para que se cumpla la igualdad $(1 + i)(x + iy) = i$.

3. Calcula el módulo de los números complejos:

a) $3 + 4i$ b) $\frac{1+i}{1-i}$ c) $i^7 + i^{10}$ d) $1 + i + i^2$

4. Expresa en forma polar o exponencial los siguientes números complejos:

a) $2i$ b) $-3i$ c) -1 d) 3 e) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

f) $-3 + i\sqrt{3}$ g) $\frac{1+i}{1-i}$ h) $i^7 + i^{10}$ i) $3 + 3i$ j) $1 + i + i^2$

5. Expresa los siguientes números complejos en forma binómica:

a) $(1 + i)^3$ b) $\frac{2+3i}{3-4i}$ c) $i^5 + i^{16}$ d) $1 + i + i^2 + i^3$

e) $\frac{1}{i}$ f) $(1 + i\sqrt{3})^3$ g) $2_{\pi/2}$ h) $1_{\pi/4}$

i) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$ j) $(2 + 2i)^2$ k) $(2 - 2i)^2$ l) $(2 + 2i)(2 - 2i)$

m) $e^{-i\pi/2}$ n) $2e^{-i\pi}$ ñ) $3e^{-i\pi/2}$ o) $2e^{-i\pi/4}$

p) $i + 3e^{i2\pi}$ q) $e^{i\pi/4} - 2e^{-i\pi/4}$ r) $\frac{1}{e^{-i\pi/4}}$ s) $\sqrt{2}e^{i\pi/3}$

6. Representa gráficamente los conjuntos dados por las expresiones siguientes:

- a) $|z| = 1$ b) $|z| \leq 1$ c) $z + \bar{z} \leq 1$
- d) $z - \bar{z} = i$ e) $\text{Im}(z) < 0$ f) $|\text{Re}(z)| < 1$
- g) $\text{Re}(z) + \text{Im}(z) = z\bar{z}$ h) $|z|^{-1} \geq 1, (z \neq 0)$ i) $|z - 5i| = 8$
- j) $\text{Im}(z^2) > 2$ k) $\text{Re}\left(\frac{1}{z-1}\right) = 1$ l) $\text{Re}(z^2 - z) = 0$
- m) $|z - 2| = |1 - 2\bar{z}|$ n) $2 < |z| < 3$ ñ) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \leq 1$
- o) $\text{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 1$ p) $z + \bar{z} \geq |z|^2$

7. Comprueba que para cada par $z, w \in \mathbb{C}$ se verifican las relaciones siguientes:

- a) $|z - w| \geq ||z| - |w||$
 b) $|z - w|^2 + |z + w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$
 c) $|1 - \bar{z} \cdot w|^2 - |z - w|^2 = (1 - |z|^2)(1 - |w|^2)$

8. Calcula las siguientes potencias de números complejos:

- a) $(1 + i)^{100}$ b) $(-1 + \sqrt{3}i)^{30}$ c) $(\sqrt{1-i})^{10}$ d) $\frac{1}{(1-i)^5}$

9. Deduce una fórmula para calcular cualquier potencia de i^n con $n \in \mathbb{N}$.

10. Calcula las siguientes raíces:

- a) $\sqrt[3]{1}$ b) $\sqrt[3]{i}$ c) $\sqrt[6]{-8}$ d) $\sqrt[4]{-1}$
- e) $\sqrt[8]{1}$ f) $\sqrt{1-i}$ g) $\sqrt{3+3i}$ h) $\sqrt[3]{-2+2i}$
- i) $\sqrt[3]{-1+i}$ j) $\sqrt[4]{-8(1-\sqrt{3}i)}$ k) $\sqrt[4]{-81}$ l) $\sqrt[4]{1}$

11. Resuelve en \mathbb{C} las siguientes ecuaciones con coeficientes en \mathbb{R} :

- a) $z^2 + 1 = 0$ b) $z^3 + 2 = 0$ c) $z^5 + 64 = 0$ d) $(z^2 + 4)(z - 1)^2 = 0$

12. Resuelve en \mathbb{C} las siguientes ecuaciones con coeficientes en \mathbb{C} :

- a) $z^2 - (6 + i)z + (7 + 9i) = 0$ b) $z^2 - 2(2 - i)z + 3(1 - 2i) = 0$ c) $z^4 + 64 = 0$

13. Demuestra que si $z \in \mathbb{C}$ y $\operatorname{Re}(z) \neq 0$, entonces $|z| = 1 \iff \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z^{-1})$.

14. Sea $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ un polinomio con coeficientes reales ($a_j \in \mathbb{R}$).

a) Comprueba que para cada $z \in \mathbb{C}$, se cumple la igualdad $p(\bar{z}) = \overline{p(z)}$.

b) Usando el apartado anterior, prueba que si z_0 es solución compleja de $p(z) = 0$, entonces su conjugado \bar{z}_0 también es solución.

c) Sabiendo que $z = i$ es una raíz del polinomio $p(z) = z^4 - 2z^3 - z^2 - 2z - 2$, calcula todas sus raíces.

d) Calcula todas las raíces del polinomio, $q(z) = z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1$.

15. Expresa en forma binómica los siguientes números complejos:

a) $(1 + i)^{2/3}$ b) $(1 + \sqrt{3}i)^{3/4}$

16. ¿En qué vector se transformará el complejo $-\sqrt{3} + 3i$ al girarlo un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ radianes? ¿Qué ángulo se necesita para que el resultado sea $2\sqrt{3}i$?

17. Expresa en forma trigonométrica los números complejos siguientes

a) $-\frac{1}{2}i$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ c) $\sqrt{3}$ d) $-i$ e) $-\frac{1}{2}$

18. Utiliza la fórmula de Moivre para obtener $\cos(3x)$ y $\sin(3x)$ en función de $\cos(x)$ y $\sin(x)$. ¿Cuál será la relación para $\cos(4x)$ y $\sin(4x)$?

19. Halla las cuatro raíces de $z^4 + 4 = 0$ y úsalas para factorizar $z^4 + 4$ como producto de dos polinomios de segundo grado con coeficientes reales.

20. Siendo z, w dos números complejos distintos y $\frac{(z+w)i}{(z-w)} \in \mathbb{R}$. Encuentra la relación entre $|z|$ y $|w|$.

21. Encuentra los números complejos z tales que su cuadrado es igual a su conjugado.

22. Resuelve: $\bar{z} = z^{n-1}$, siendo $n \in \mathbb{N} - \{2\}$.

23. Demuestra la identidad de Lagrange, para se verifica

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R} \Rightarrow (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

24. (*) Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Demuestra que todo número complejo z distinto de 1, pero con módulo 1, se puede expresar como:

$$z = \frac{\alpha + i}{\alpha - i}, \text{ para algún } \alpha \in \mathbb{R}$$

b) Sean z_1, z_2 y z_3 tres complejos con $|z_j| = 1$, tales que $z_1 + z_2 + z_3 = 1$. Prueba que al menos uno debe ser igual a 1.

c) Encuentra 3 complejos z_1, z_2 y z_3 de módulo 1 que verifiquen:

$$z_1 + z_2 + z_3 = z_1 z_2 z_3 = 1$$

25. (*) Prueba que si z_1, z_2 y z_3 son tres complejos que verifican

$$|z_1| = |z_2| = |z_3|$$

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0$$

entonces forman en el plano un triángulo equilátero.

(*) Ejercicios con dificultad especial.

©Silvestre Paredes Hernández[®]