Dpto. Matemática Aplicada y Estadística

Ingeniero Técnico de Telecomunicaciones (Telemática)
Asignatura: Estadística
Curso 2005/2006
Hoja 4. Variables aleatorias multidimensionales

1. **(Propuesto)** Un sistema electrónico contiene dos componentes que funcionan de manera independiente entre si. Para la componente i (i = 1, 2) definimos la variable X_i de forma que $X_i = 1$ si la componente i-ésima funciona y $X_i = 0$ en caso contrario. Sea p_i la probabilidad de que funcione la componente i-ésima. Calcular:

   (a) La función puntual de probabilidad del vector (X_1, X_2).

   (b) La probabilidad de que el sistema funcione si las componentes son conectadas en serie y la probabilidad de que el sistema funcione si las componentes son conectadas en paralelo.

2. Consideremos dos sistemas S_1 y S_2 susceptibles de fallo y sean X e Y las v.a. que representan el tiempo de vida de los sistemas S_1 y S_2, respectivamente. Sabemos que X e Y siguen distribuciones Exponenciales de media μ_1 y μ_2, respectivamente, y que son independientes.

   (a) Si S_1 y S_2 se conectan en serie, determinar la distribución de la v.a. $Z =$"Tiempo de vida de la conexión en serie"

   (b) Responder a la cuestión anterior si se conectan en paralelo.

   (c) Responder a la custión anterior si S_2 se conecta en Stand by con S_1: El sistema S_1 se pone en funcionamiento en el instante $t = 0$ mientras que S_2 está en espera; S_2 se pone en acción cuando falla S_1; el sistema falla cuando lo hace S_2.

3. Sea X el número de veces que falla un determinado circuito durante un día e Y el número de veces que el sistema de detección de errores detecta la anomalía. La función puntual de probabilidad conjunta de (X, Y) viene dada por la tabla siguiente:

	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$
$Y = 1$	0.05	0.05	0.1
$Y = 2$	0.05	0.1	0.35
$Y = 3$	0.1	0.1	0.1

   (a) Determinar el número medio de fallos diarios del circuito.

   (b) Hallar las funciones puntuales de probabilidad marginal de X y de Y.

   (c) ¿Se puede afirmar que son independientes?. Justifica la respuesta.

   (d) Determinar la probabilidad de que el sistema de detección avise en al menos dos ocasiones si el circuito ha fallado exactamente 3 veces durante el día.

4. **(Propuesto)** Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional discreta, cuya función puntual de probabilidad conjunta, viene dada por la tabla siguiente:

	$X = -1$	$X = 0$	$X = 1$
$Y = -1$	1/10	1/10	1/10
$Y = 0$	1/10	1/5	1/10
$Y = 1$	1/10	1/10	1/10

   (a) Hallar las funciones puntuales de probabilidad marginal de X y de Y.

   (b) ¿Se puede afirmar que son independientes?. Justifica la respuesta.

   (c) Determinar la función de distribución marginal de X.

   (d) Calcular $E(2X - 5Y)$ y $Var(X)$.

   (e) Calcular las siguientes probabilidades:
   $\Pr(Y > -1/X > -1)$ y $\Pr(X = 1/X + Y \leq 0)$.

5. Consideremos dos variables aleatorias X_1 y X_2, que sólo pueden tomar los valores 0 y 1. Sabemos que X_1 toma el valor 1 con probabilidad $\frac{2}{5}$. Además, la distribución de la v.a. X_2 depende de la distribución de X_1 de la manera siguiente:

   - Si X_1 es igual a 0, X_2 toma el valor 0 con probabilidad $\frac{1}{2}$.
   - Si X_1 es igual a 1, X_2 toma el valor 0 con probabilidad $\frac{3}{4}$.

   (a) Escribir la función puntual de probabilidad de X_1, así como la función puntual de probabilidad de X_2 condicionada a $X_1 = 0$ y la función puntual de probabilidad de X_2 condicionada a $X_1 = 1$.

   (b) Deducir la función puntual de probabilidad conjunta de (X_1, X_2).

   (c) ¿Cuál es la función puntual de probabilidad de X_2?

6. **(Propuesto)** Consideremos una variable aleatoria bidimensional (X, Y) con función de densidad conjunta:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \frac{k(2x-x^2)}{y^3} & \text{si } y > 2,\ 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

   (a) Determinar el valor de la constante k para que $f_{(X,Y)}(x, y)$ sea una función de densidad.

(b) Calcular la función de densidad marginal de X y de Y. ¿Son X e Y independientes?

(c) Calcular la siguiente probabilidad: $P(X \geq 1/Y < 4)$.

7. **(Propuesto)** Una señal aleatoria, X, sólo puede observarse en presencia de ruido aditivo R, independiente de la señal. Por tanto, la señal observada por el receptor es $Y = X + R$. Se sabe que la densidad conjunta de X e Y es:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} k \cdot (x^2 + y)y & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \text{ y si } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) Obtener el valor medio del ruido.

(b) Obtener el valor medio de la señal emitida X cuando el valor observado por el receptor es $Y = 0.5$.

(c) Determinar la probabilidad de obtener un ruido positivo, $P(R > 0)$.

8. Dos señales S_1 y S_2 llegan a un receptor. Sea X el instante en el que llega la primera señal (S_1) e Y el instante en el que llega la segunda señal (S_2). La función de densidad conjunta de (X, Y) viene dada por:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } 0 < x < 1 \text{ y si } 0 < y < 2 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) Calcular la probabilidad de que la primera señal llegue antes que la segunda al receptor.

(b) En el receptor se producirán interferencias si la diferencia de tiempo en la recepción de las dos señales es menor que 1. Calcular la probabilidad de que se produzcan interferencias.

(c) Suponiendo que se han producido interferencias, calcular la probabilidad e que la primera señal llegue antes que la segunda.

9. La función de densidad de la variable aleatoria bidimensional (X, Y) viene dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} k^2 e^{-ky} \text{ si } 0 < x < y \\ 0 \text{ en el resto} \end{cases}$$

(a) Calcular el valor de k.

(b) ¿Son independientes X e Y? Razona tu respuesta.

(c) Calcular la probabilidad $P((X, Y) \in [0, 1] \times [0, 1])$.

(d) Calcular la función de densidad de la variable $Y/X = x$.

10. Supongamos que X e Y son dos variables aleatorias con $Var(X) = 9$, $Var(Y) = 4$ y $\rho(X, Y) = -1/6$. Calcular:

(a) $Var(X + Y)$.

(b) $Var(X - 3Y + 4)$.

11. Una barra se forma conectando tres secciones A, B y C, cada una fabricada con una máquina distinta. La longitud de la sección A, en pulgadas, tiene una distribución normal con media 20 y varianza 0.04. La longitud de la sección B, en pulgadas, tiene una distribución normal de media 14 y varianza 0.01. La longitud de la sección C, en pulgadas, tiene una distribución normal con media 26 y varianza 0.04. Las tres secciones se unen de forma que se superponen dos pulgadas en cada conexión. Supóngase que la barra se puede utilizar en la construcción de una pieza de precisión si su longitud total en pulgadas está entre 55.7 y 56.3. ¿Cuál es la probabilidad de que la barra pueda ser utilizada?

12. **(Propuesto)** A la entrada de un circuito se aplican dos tensiones independientes:

$$\begin{aligned} X &\sim N(0, \sigma_1 = \sqrt{2}) \\ Y &\sim N(1, \sigma_2 = \sqrt{3}) \end{aligned}$$

El circuito está constituido por un amplificador sumador de ganancia 10, es decir, la tensión a la salida del circuito es

$$V = 10(X + Y)$$

seguido de un discriminador que proporciona dos posibles salidas:

· salida 1 si su entrada está comprendida entre -2 y 8
· salida 0 si su entrada está fuera del margen anterior

(a) Calcular la probabilidad de que la tensión a la salida del circuito esté comprendida entre -2 y 8.

(b) Determinar la función puntual de probabilidad de la tensión a la salida del discriminador.