Dpto. Matemática Aplicada y Estadística

Ingeniero Técnico de Telecomunicaciones (Telemática)
Asignatura: Estadística
Curso 2005/2006
Hoja 3A. Variables Aleatorias Unidimensionales

1. Probar si las siguientes funciones pueden definir funciones puntuales de probabilidad asociadas a las variables que se indican.

$$a) f(x) = \frac{x}{15} \; para \; x = 0,1,2,3,4,5. \qquad b) f(x) = \frac{5-x^2}{6} \; para \; x = 0,1,2,3.$$
$$c) f(x) = 0.25 \; para \; x = 3,4,5,6. \qquad d) f(x) = \frac{x-2}{2} \text{ para } x = 1,2,3,4.$$

2. **(Propuesto)** Consideremos el experimento aleatorio de seleccionar 2 bolas al azar, sin reemplazamiento, de una urna que contiene 5 bolas rojas y 2 azules. Definamos la v.a. X como *"Número de bolas rojas extraídas".* Calcular:

   (a) La función puntual de probabilidad y la función de distribución de la v.a. X
   (b) $P(1 \leq X \leq 2)$, $P(1 < X \leq 2)$ y $P(0 \leq X < 2)$.
   (c) Contestar las cuestiones anteriores cuando el experimento se realiza con devolución.

3. Consideremos el juego de la ruleta : pueden salir de manera equiprobable cualquier número del 0 al 36, hay que saber además que la mitad de los números del 1 al 36 son rojos y la otra mitad negros. El cero tiene otro color. Se puede apostar por un número particular, en este caso, si sale el número por el se ha apostado, se recupera 36 veces su apuesta, si no sale, se pierde la apuesta. Por otra parte, se puede también apostar por un color, en este caso, si sale el color elegido, se recupera dos veces la apuesta mientras que si no sale, se pierde la apuesta. Sea X la variable aleatoria "beneficio obtenido al apostar p pesetas a un número cualquiera" y sea Y la variable "beneficio obtenido al apostar p euros al rojo". Calcular la media y la varianza de ambas variables. Comentar los resultados obtenidos.

4. Consideremos un dado que tiene dos caras con el número **uno**, dos caras con el número **dos** y dos caras con el número **tres**, de manera que, con el experimento aleatorio "tirar el dado", la función puntual de probabilidad de la variable aleatoria $X =$"Número obtenido", es

$$f_X(x) = \begin{cases} k - \frac{1}{8}(x-1)^2, & \text{para } x = 1,2,3 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

   (a) Calcular el valor de k.
   (b) ¿Está el dado trucado? Si tienes que apostar por un número, ¿cuál elegirías?
   (c) Se propone el juego siguiente: se apuesta "p" euros, se tira el dado y si sale impar, se recupera la apuesta más 2 euros, mientras que si sale par, se pierde la cantidad apostada. ¿Merece la pena jugar? ¿Cúanto vale la varianza de la ganancia obtenida?

5. **(Propuesto)** La función de distribución de una v.a. discreta X viene dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0.5 \\ 1/6 & \text{si } 0.5 \leq x < 1 \\ 1/2 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 5/6 & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

   (a) Determinar el rango de X y su función puntual de probabilidad.
   (b) Calcular las probabilidades $\Pr(0.5 < X < 3)$, $\Pr(0.5 \leq X \leq 3)$, $\Pr(1 < X < 4)$, $\Pr(1.2 \leq X \leq 4)$.
   (c) Calcular la media y varianza de X.

6. En un proceso de fabricación de copas de cristal, las bases se sellan calentándolas con una llama. La temperatura X de ésta varía de manera aleatoria, siguiendo la distribución de probabilidad siguiente:

Temperatura	540^oC	545^oC	550^oC	555^oC	560^oC
Probabilidad	0.1	0.25	0.3	0.25	?

   (a) Encontrar el valor que falta en la tabla
   (b) Calcular la media y la desviación típica de X.
   (c) La temperatura óptima es de 550^oC. ¿Cuál es la media y la desviación típica de la diferencia entre X y la temperatura óptima?
   (d) Para un informe, imagina que debes pasar los resultados de grados Centígrados a grados Farenheit, siendo la relación

$$Y = \frac{9}{5}X + 32$$

   ¿Cuál es la media y la desviación típica de la temperatura expresada en grados Farenheit?

7. Estudiar si las siguientes funciones pueden ser funciones de densidad y calcular las funciones de distribución asociadas.

   (a) $f(x) = k(3x+1)$ si $x \in (1,3)$ (cero en el resto).

   (b) $f(x) = kx^{-3}$ si $x > 1$ (cero en el resto).

   (c) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 2-x & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$ (cero en el resto).

8. **(Propuesto)** La resistencia de un tipo de acero en gr/mm^2 es una variable aleatoria con densidad:

$$f(x) = \begin{cases} k(x^2+2x) & 1 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   (a) Determinar el valor de la constante k para que sea función de densidad.

   (b) Calcular su función de distribución.

   (c) Determinar la resistencia esperada.

   (d) Determinar la probabilidad de que el acero aguante más de 3 gr/mm^2.

   (e) Determinar la probabilidad de que el acero aguante más de 3 gr/mm^2 si para 2 gr/mm^2 aún resiste.

9. Con objeto de establecer un plan de producción, una empresa ha estimado que la demanda semanal es una variable aleatoria X cuya función de densidad viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} k(4x-2x^2) & si\ 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

   donde "x" viene expresada en millones de unidades. Calcular:

   (a) El valor de la constante k.

   (b) La demanda esperada en una semana, así como la varianza de la demanda semanal.

   (c) El coste de producir x millones de unidades viene dada por $C = 5X + 40$ unidades monetarias, ¿cuál será el coste semanal esperado? ¿y la varianza?

   (d) La probabilidad de que la demanda semanal supere el millón y medio de unidades.

10. El porcentaje de contaminante presente en una muestra de aire es una variable aleatoria con función de densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} a+bx^2 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   Si $E(X) = 3/5$. Calcular el valor de a y b para que f sea función de densidad.

11. Suponiendo que el tiempo de espera (en minutos) del metro tiene la siguiente función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x}{2} & 0 < x < 1 \\ 1/2 & 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{x}{4} & 2 < x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

   (a) Hallar la función de densidad.

   (b) Calcular la probabilidad de que el tiempo de espera esté entre 1 y 3 minutos.

   (c) Si ya hemos esperado 1 minuto a que llegue el metro, ¿cuál es la probabilidad de tener que esperar al menos dos minutos más?

12. **(Propuesto)** Sea X una variable continua cuya función de distribución está dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{16}{x^4} & \text{si } x > 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

   (a) Obtener la función de densidad asociada a esta variable, así como su media y varianza.

   (b) Calcular las siguientes probabilidades: $\Pr(X > 3)$, $\Pr(1 \leq X < 3)$, $\Pr(4 \leq X \leq 7)$, $\Pr(4 \leq X \leq 7 | X < 5)$.

   (c) Calcular $E(7X-3)$ y $Var(7X-3)$.

13. Se sabe que el tiempo de vida de un componente electrónico es una variable aleatoria de media 350h. y desviación típica 35h.

   (a) Obtener un intervalo centrado en la media que contenga al menos el 80% de los tiempos de vida de los componentes producidos.

   (b) ¿Es muy probable observar un componente con vida mayor que 455h. o menor que 245h.?

14. **(Propuesto)** Una máquina fabrica teclas cuadradas estándar de teclados de PCs, siguiendo la longitud de los lados una distribución con media 12.5 mm y desviación típica 0.0025 mm. Si alguna de las piezas difiere en más de 0.005 mm de la media es rechazada, ya que provocaría un fallo en la cadena de montaje del teclado.

   (a) ¿Cuál es, como máximo, el porcentaje de piezas defectuosas que fabrica la máquina?

   (b) Obtener un intervalo centrado en la media que contenga al menos el 90% de las longitudes de los lados.