

EXAMEN ESTADÍSTICA

(TELEMÁTICA JUNIO 2006)

PROB. 1

PARTE I

- R_1 = "La conexión a internet se realiza con la Red 1"
- R_2 = "La conexión a internet se realiza con la Red 2"
- T_1 = "Tiempo de espera, en segundos, hasta la conexión si se usa la Red 1" $\sim \text{Exp}(\lambda_1 = \frac{1}{5})$
- T_2 = "Tiempo de espera, en segundos, hasta la conexión si se usa la Red 2" $\sim \text{Exp}(\lambda_2 = \frac{1}{6})$
- $P(R_1) = 0.65$, $P(R_2) = 0.35$

① Llamemos T = "Tiempo de espera ^(en segundos) hasta la conexión por un usuario de internet"

- Nos piden ~~$P(T > 6)$~~ $P(T > 6)$

Evidentemente, el tiempo de espera dependerá de la Red elegida para la conexión, de manera que usaremos el Th. Probab. Total:

$$P(T > 6) = P(R_1) \cdot P(T > 6 | R_1) + P(R_2) \cdot P(T > 6 | R_2) \\ = 0'65 \cdot P(T_1 > 6) + 0'35 \cdot P(T_2 > 6)$$

$$\cdot P(T_1 > 6) = 1 - F_{T_1}(6) = e^{-\frac{6}{5}} \approx 0'3$$

$$\cdot P(T_2 > 6) = 1 - F_{T_2}(6) = e^{-\frac{6}{6}} = e^{-1} \approx 0'37$$

$$\Rightarrow P(T > 6) = 0'65 \cdot 0'3 + 0'35 \cdot 0'37 = \boxed{0'32}$$

② Nos piden $P(R_1 | T < 6)$

$$P(R_1 | T < 6) = \frac{P(T < 6 | R_1) \cdot P(R_1)}{P(T < 6)} = \frac{(1 - 0'3) \cdot 0'65}{(1 - 0'32)} \approx \boxed{0'67}$$

Th. Bayes

③ Nos piden $P(T_1 > 6 | T_1 \geq 4)$

$$\cdot P(T_1 > 6 | T_1 \geq 4) = P(T_1 > 2) = 1 - F_{T_1}(2) = e^{-\frac{2}{5}}$$

↳ Propiedad de
Falta de memoria

④ T_3 = "Tiempo de espera hasta la conexión por la Red 3"

$$E(T_3) = \mu = 5 \text{ sg.} \quad \sigma_{T_3} = 0'4 \text{ sg.}$$

No conocemos la distribución de T_3

(2)

Nos piden $P(4 \leq T_3 \leq 6)$

Como sólo conocemos su media y su desviación típica, sólo podremos acotar inferiormente la probabilidad pedida usando la desigualdad de Tchebychev.

$$P(\mu - k \cdot \sigma \leq T_3 \leq \mu + k \cdot \sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

En nuestro caso, $\mu = 5$, $\sigma = 0.4 \Rightarrow$

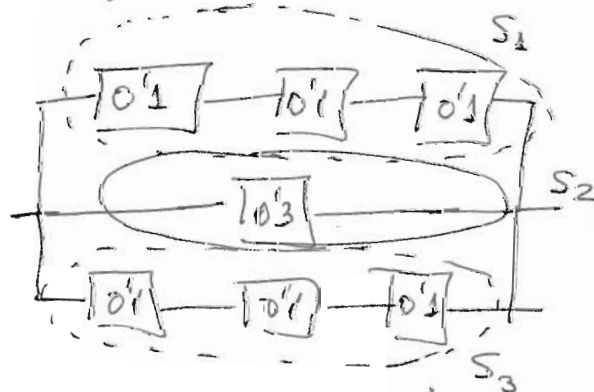
$$P(\underbrace{5 - k \cdot 0.4}_4 \leq T_3 \leq \underbrace{5 + k \cdot 0.4}_6) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

$$\Rightarrow k \cdot 0.4 = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{0.4} = 2.5$$

$$\Rightarrow P(4 \leq T_3 \leq 6) \geq 1 - \frac{1}{(2.5)^2} \Rightarrow \boxed{P(4 \leq T_3 \leq 6) \geq 0.84}$$

Al menos el 84% de conexiones tendrán un tiempo de espera entre 4 y 6 segundos.

PARTE II



Llamemos S_1 , S_2 y S_3 a cada uno de los 3 subsistemas que componen el circuito.

$$\int_{y=0}^{y=2} \int_{x=0}^{x=2} K \cdot x \cdot y \, dx \, dy = 1 \Leftrightarrow K \cdot \int_{y=0}^{y=2} y \cdot 2 \, dy = 1 \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow K \cdot 2 \cdot \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2} = 1 \Leftrightarrow K \cdot 2 \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow K = \frac{1}{4}$$

② X e Y independientes $\Leftrightarrow f_{(x,y)} = f_x(x) \cdot f_y(y) \, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Calculamos las densidades marginales:

• Densidad marginal de X :

$$f_x(x) = \int_{y=0}^{y=2} \frac{1}{4} x \cdot y \, dy = \frac{1}{4} \cdot x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2} = \frac{1}{2} \cdot x, \text{ si } x \in (0,2)$$

$$\Rightarrow f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot x & \text{si } x \in (0,2) \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

• Densidad marginal de Y :

$$f_y(y) = \int_{x=0}^{x=2} \frac{1}{4} x \cdot y \, dx = \frac{1}{4} \cdot y \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=2} = \frac{1}{2} \cdot y, \text{ si } y \in (0,2)$$

$$\Rightarrow f_y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot y & \text{si } y \in (0,2) \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Se ve claramente que $f_{(x,y)} = f_x(x) \cdot f_y(y) \, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{1}{4} \cdot x \cdot y = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{1}{2} \cdot y$$

$\Rightarrow$ Sí son independientes

$$\textcircled{3} \quad E(X) = \int_{x=0}^{x=2} x \cdot \frac{1}{2} \cdot x \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{2^3}{3} \right) = \frac{4}{3}$$

$E(Y) = \frac{4}{3}$ porque X e Y tienen idéntica distribución

$\textcircled{4}$ Nos piden $P[(X < 1) \cap (Y > 1)]$

$$\begin{aligned} \cdot P[(X < 1) \cap (Y > 1)] &\stackrel{\text{Independencia}}{=} P(X < 1) \cdot P(Y > 1) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16} \end{aligned}$$

$$\cdot P(X < 1) = \int_{x=0}^{x=1} \frac{1}{2} x \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

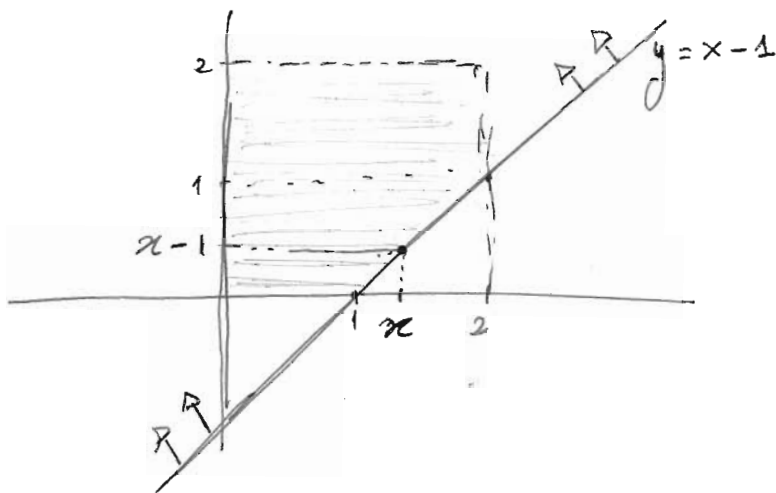
$$\cdot P(Y > 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$\textcircled{5}$ Nos piden $P(X < Y + 1)$

$$\cdot P(X < Y + 1) = P((X, Y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y + 1\})$$

La probabilidad que nos piden será la integral doble de la densidad conjunta en el recinto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y + 1\}$.

Dibujemos el recinto junto con la región donde la densidad $f(x, y)$ es no nula:



La probabi

4

La probabilidad que nos piden es la integral de la densidad conjunta en el recinto rayado. Sin embargo resulta más sencillo calcular la probabilidad contraria, $P(X > Y + 1)$, pues integraremos en el triángulo que queda en la esquina inferior derecha.

$$\begin{aligned}
 P(X > Y + 1) &= \int_{x=1}^{x=2} \int_{y=0}^{y=x-1} \frac{1}{4} x \cdot y \, dy \, dx = \\
 &= \frac{1}{4} \int_{x=1}^{x=2} x \cdot \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x-1} dx = \frac{1}{4} \int_{x=1}^{x=2} x \cdot \frac{(x-1)^2}{2} dx = \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \int_{x=1}^{x=2} (x^3 - 2x^2 + x) dx = \frac{1}{8} \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_{x=1}^{x=2} = \\
 &= \frac{1}{8} \left[\left(\frac{2^4}{4} - \frac{2 \cdot 2^3}{3} + \frac{2^2}{2} \right) - \left(\frac{1^4}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) \right] = \\
 &= \frac{1}{8} \left[\left(\frac{3 \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2}{12} \right) - \left(\frac{3 - 8 + 6}{12} \right) \right] = \\
 &= \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{8}{12} - \frac{1}{12} \right) = \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{96}
 \end{aligned}$$

Por tanto, la probabilidad pedida es:

$$P(X < Y+1) = 1 - P(X > Y+1) = 1 - \frac{7}{96} = \frac{89}{96} \approx \boxed{0.927}$$

PROB 3

p = "Probabilidad de que una llamada sea atendida" = 0.6

① X = "N° de llamadas, entre las 40, que son atendidas"
 $X \sim B(n=40, p=0.6)$

$E(X) = n \cdot p = 40 \cdot 0.6 = 24 \rightarrow$ n° medio de llamadas atendidas diariamente.

También nos piden $P(X \geq 20)$

Como $n > 30$

$$n p (1-p) = 40 \cdot 0.6 \cdot 0.4 = 9.6 > 5$$

Podemos aproximar
 $\Rightarrow$ la Binomial por
una Normal.

Sea $U \sim N(\mu = np = 24, \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{9.6})$

$$\begin{aligned} P(X \geq 20) &\approx P(U \geq 19.5) = P\left(\frac{U-24}{\sqrt{9.6}} \geq \frac{19.5-24}{\sqrt{9.6}}\right) \\ &= P(Z \geq -1.45) = P(Z \leq 1.45) = \boxed{0.9264} \end{aligned}$$

② $X(n)$ = "Nº de individuos, entre los 2 iniciales, que han sido atendidos hasta la hora n ".

(a) Los posibles estados del proceso $\{X(n) : n=0,1,2,\dots\}$ son :

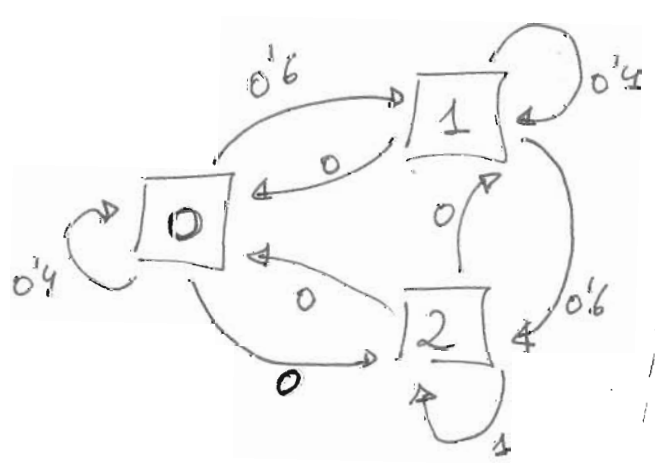
$$X(n) = \begin{cases} 0 & \rightarrow \text{(ningún individuo atendido)} \\ 1 & \rightarrow \text{(un individuo atendido)} \\ 2 & \rightarrow \text{(los dos individuos atendidos)} \end{cases}$$

Se trata de una cadena de Markov porque el estado que ocupa el proceso en el instante n , $X(n)$, sólo depende del estado que ocupó en el instante anterior, $X(n-1)$, es decir, el nº de individuos atendidos ^{hasta} una hora " n " sólo depende del nº de individuos atendidos hasta la hora anterior.

b)

$$I = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \rightarrow \\ 1 \rightarrow \\ 2 \rightarrow \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Matriz de probab. de transición.



Ejemplo: La probab. de pasar del Estado "0" al Estado "1" es la probabilidad de ser atendido por el servicio, $p=0.6$.

② Estado inicial del proceso $\rightarrow$ 0 individuos atendidos
 $\Rightarrow \pi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Nos piden $\pi_2 = \pi_0 \cdot P^2$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.16 & 0.48 & 0.36 \\ 0 & 0.16 & 0.84 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \pi_2 = (1, 0, 0) \begin{pmatrix} 0.16 & 0.48 & 0.36 \\ 0 & 0.16 & 0.84 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0.16, 0.48, 0.36)$$

$\uparrow$

El estado más probable es "1" individuo atendido, con probabilidad de 0.48.

PROB 4

$X =$ "Flujo de corriente para el nuevo diseño" $\sim$ Normal(μ, σ)
 $\mu \rightarrow$ desconocida
 $\sigma \rightarrow$ desconocida

Seleccionamos una muestra: $n=16, \bar{x}=25.5, s=1$

① Como σ es desconocida, el I.C. para μ viene dado por: $(\bar{X} \pm t_{n-1, 1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}})$

(La construcción se realizó en clase)

En nuestro caso:

(6)

$$95\% \rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} = t_{15, 0.975} = 2.13$$

$$\begin{aligned} \text{I.C. para } \mu &= \left(25.5 \pm 2.13 \cdot \frac{1}{\sqrt{16}} \right) = (25.5 \pm 0.5325) = \\ &= (24.9675, 26.0325) \end{aligned}$$

• El flujo medio para el diseño antiguo era $\mu_{ant} = 25$.

Como $25 \in (24.9675, 26.0325)$, en principio no podemos descartar que sean equivalentes al 95%.

② Queremos que el error de estimación, que viene dado por $t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$, sea menor de 0.2.

Como el error que teníamos para la muestra de tamaño 16 era de 0.5325, para reducir el error hasta 0.2 necesitaremos un tamaño muestral considerablemente mayor, de modo que:

$$t_{n-1, 0.975} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < 0.2 \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{hemos usado que } t_n \approx N(0,1), n \text{ grande} \end{array} \Leftrightarrow z_{0.975} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < 0.2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1.96 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} < 0.2 \Leftrightarrow n > \left(\frac{1.96}{0.2} \right)^2 \Leftrightarrow n > 96.04$$

$$\Rightarrow \boxed{n \geq 97}$$

$$\textcircled{3} \quad \begin{cases} H_0: \mu = 25 \\ H_1: \mu \neq 25 \end{cases}$$

Como σ es desconocida, el estadístico del contraste suponiendo H_0 cierta es:

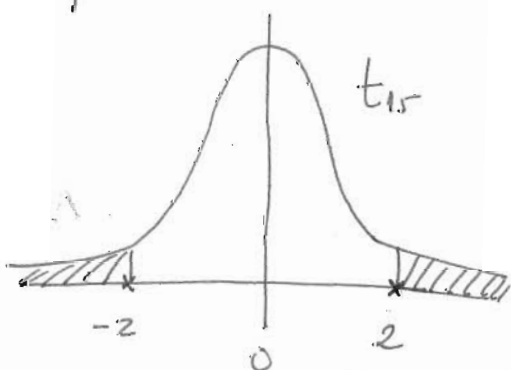
$$T = \frac{\bar{X} - 25}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{15}$$

Para la muestra seleccionada tenemos:

$$t_0 = \frac{25.5 - 25}{\frac{1}{\sqrt{16}}} = \frac{0.5}{\frac{1}{4}} = 2$$

Como se trata de un contraste bilateral: ~~se~~

$$p\text{-valor} = 2 \cdot P(t_{15} > 2)$$



Mirando la tabla de la t-Student se observa que:

$$P(t_{15} > 2) \in (0.025, 0.05) \Rightarrow$$

- $p\text{-valor} = 2 \cdot P(t_{15} > 2) \in (0.05, 0.1) \Rightarrow$
- Rechazamos H_0 al 90%
 - Aceptamos H_0 al 95% y al 99%