



Duración: 3 horas. Empezar cada problema en un folio nuevo. Indicar nombre y apellidos en todas las hojas.

Problema 1

Para dimensionar routers y switchers de alta velocidad, es crucial disponer de modelos matemáticos que describan las características del tráfico internet. Un primer paso en la construcción de estos modelos consiste en considerar que el tráfico entre un determinado cliente y un determinado servidor, llamado tráfico fuente-destinatario, está constituido por periodos ON (en los que se realiza transferencias de paquetes) y periodos OFF (en los que no hay transferencia). Las duraciones de los periodos ON y OFF, en **segundos**, son independientes y siguen una distribución exponencial de media $\mu_{ON} = \frac{1}{3}$ y $\mu_{OFF} = \frac{1}{2}$, respectivamente.

- (a) ¿Cuál es la probabilidad de que un periodo ON dure más de 250 ms? ¿Cuál es la probabilidad de que un periodo OFF dure menos de 1 segundo? **(0.5 ptos)**
- (b) ¿Cuál es la probabilidad de que un periodo ON dure más de 250 ms y que el periodo OFF que le sigue, menos de 1s? **(0.25 ptos)**
- (c) ¿Cuál es la probabilidad de que, si un periodo ON ha durado más de 300 ms, el siguiente periodo OFF dure más de 500 ms? **(0.5 ptos)**
- (d) Si examinamos la traza de tráfico entre este cliente y el servidor durante 5 minutos, observamos que ha habido 1500 periodos ON, ¿cuál es la probabilidad de que haya más de 700 periodos con una duración mayor de 250 ms? **(0.75 ptos)**

Problema 2

1. Sea X una variable continua cuya función de distribución está dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{4}{x^2} & \text{si } x > 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Obtener la función de densidad asociada a esta variable así como su media. **(0.75 ptos)**

2. Consideremos una nueva variable aleatoria Y de manera que la función de densidad conjunta de ambas variables es:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{3(4y-2y^2)}{x^3} & \text{si } x > 2, 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

- (a) ¿Son X e Y variables aleatorias independientes? Razona tu respuesta. **(0.75 ptos)**
- (b) Calcular la siguiente probabilidad: $P(Y \geq 1/X < 4)$. **(0.5 ptos)**

Problema 3

1. Una máquina M_1 (cuya producción es del 85%), fabrica piezas cuya longitud viene dada por una distribución Normal de media 20 (cm) y varianza 4 (cm^2).
 - (a) Obtener un intervalo que contenga al 90% de las longitudes de las piezas fabricadas por M_1 . (0.4 ptos)
 - (b) Se consideran aceptables las piezas con longitud en el intervalo [16, 24]. Determinar la proporción de piezas defectuosas. (0.4 ptos)
 - (c) Si queremos que el porcentaje de defectuosas sea sólo del 1%, determinar a qué varianza deberíamos ajustar la máquina. (0.4 ptos)
2. Decidimos ajustar la máquina M_1 según indica el apartado anterior. Otra máquina M_2 (cuya producción es del 15%), fabrica piezas del mismo tipo con un porcentaje de defectuosas del 5%. Si seleccionamos al azar una pieza de la producción total y resulta defectuosa, ¿en qué máquina es más probable que se fabricara y con qué probabilidad? (0.8 ptos)

Problema 4

Un estudio demostró que la resistencia a la compresión de un nuevo tipo de acero se distribuye normalmente. Se escogieron al azar 15 probetas de dicho tipo de acero, obteniéndose una resistencia media de 45.75 y una desviación típica de 14.2 para la muestra seleccionada.

- (a) Construir de manera **detallada** un intervalo de confianza al 99% para la resistencia media a la compresión del acero. (0.75 ptos)
- (b) Según los resultados del apartado anterior, ¿cuál es la estimación puntual de la resistencia media a la compresión? ¿Cuánto vale, a lo sumo, el error cometido en dicha estimación? (0.25 ptos)
- (c) ¿Cuáles son los factores que afectan a la longitud de un intervalo de confianza?. Justifica tu respuesta. (0.3 ptos)
- (d) Se desea probar si este tipo de acero es más resistente que el usado tradicionalmente, el cual posee una resistencia media a la compresión de 40. Plantear un contraste para el estudio anterior y tomar una decisión al 95% de confianza. ¿Qué interpretación tiene la decisión tomada? (0.7 ptos)
- (e) Determinar una cota inferior y una cota superior para el p-valor del contraste anterior y discutir la conclusión que se obtiene para los niveles de confianza 90%, 95% y 99%. (0.5 ptos)