

EXAMEN TEZEMÁTICA

(SEPTIEMBRE 2006)

PROB 1

PARTE I Introducir los sucesos:

CE = "La tarjeta seleccionada cumple las especificaciones"

TA = "La tarjeta es Aceptable según el test"

TD = "La tarjeta es Defectuosa según el test"

TSD = "La tarjeta queda Sin Determinar según el test"

Los datos del enunciado se traducen en las siguientes probabilidades:

$$\left. \begin{aligned} \cdot P(TA | CE) &= \frac{80}{100} = 0.80 \\ \cdot P(TD | CE) &= \frac{5}{100} = 0.05 \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(TSD | CE) = \frac{15}{100} = 0.15$$

$$\left. \begin{aligned} \cdot P(TA | \overline{CE}) &= \frac{7}{100} = 0.07 \\ \cdot P(TD | \overline{CE}) &= \frac{90}{100} = 0.90 \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(TSD | \overline{CE}) = \frac{3}{100} = 0.03$$

① Nos piden $P(TA|CE) = 0'80$

② Nos piden $P(TD|\overline{CE}) = 0'90$

③ Sabemos que $P(CE) = 0'85$, $P(\overline{CE}) = 0'15$
Nos piden $P(TSD)$. Por el Th. Probab. Total:

$$P(TSD) = P(CE) \cdot P(TSD|CE) + P(\overline{CE}) \cdot P(TSD|\overline{CE}) = \\ = 0'85 \cdot 0'15 + 0'15 \cdot 0'03 = 0'132$$

④ Nos piden $P(CE|TSD)$ y $P(\overline{CE}|TSD)$.

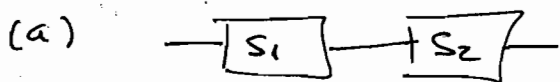
$$P(CE|TSD) = \frac{P(TSD|CE) \cdot P(CE)}{P(TSD)} = \frac{0'15 \cdot 0'85}{0'132} = 0'966$$

Th. Bayes

$$\Rightarrow P(\overline{CE}|TSD) = 1 - 0'966 = 0'034$$

Es mucho más probable que la tarjeta cumpla las especificaciones.

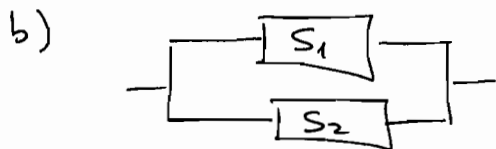
PARTE II $X = \text{"Tiempo de vida de } S_1 \text{"}$ ^{en años} $\sim \text{Exp}(\lambda_x = \frac{1}{4})$
 $Y = \text{"Tiempo de vida de } S_2 \text{"}$ ^{en años} $\sim \text{Exp}(\lambda_y = \frac{1}{5})$



Hallamos $Z = \text{"Tiempo de vida, en años, de la conexión en serie"}$.

Nos piden $P(Z > 5)$.

$$\begin{aligned}
 P(Z > 5) &= P((X > 5) \cap (Y > 5)) \stackrel{\text{Independencia}}{=} \\
 &= P(X > 5) \cdot P(Y > 5) = e^{-\frac{5}{4}} \cdot e^{-\frac{5}{5}} = e^{-\frac{45}{20}} = e^{-\frac{9}{4}}
 \end{aligned}$$



Sea Z = "Tiempo de vida, en años, del sistema en paralelo"

Nos piden $P(Z > 5)$.

$$\begin{aligned}
 P(Z > 5) &= P[(X > 5) \cup (Y > 5)] = P(X > 5) + P(Y > 5) - \\
 &- P[(X > 5) \cap (Y > 5)] = e^{-\frac{5}{4}} + e^{-\frac{5}{5}} - e^{-\frac{9}{4}}
 \end{aligned}$$

PROB. 2

PARTE I

X = "Nº de veces que falla un circuito, al día"

Y = "Nº de veces que se detecta un error, al día".

①

	$X=1$	$X=2$	$X=3$	$f_Y(y)$
$Y=1$	0'15	0'05	0	0'2
$Y=2$	0'05	0'25	0'2	0'5
$Y=3$	0	0'1	0'2	0'3
$f_X(x)$	0'2	0'4	0'4	

a)

Las f.p.p. marginales se obtienen sumando por filas y columnas. X e Y indep $\Leftrightarrow f_{(x,y)}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \forall (x,y)$

Como $f_{(x,y)}(1,1) = 0'15 \neq 0'2 \cdot 0'2 = f_X(1) \cdot f_Y(1) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ No son independientes.

$$\textcircled{2} E(X) = 1 \cdot 0'2 + 2 \cdot 0'4 + 3 \cdot 0'4 = 0'2 + 0'8 + 1'2 = 2'2$$

$$\textcircled{3} P(Y \geq 2 | X=3) = \frac{P((X=3) \cap (Y \geq 2))}{P(X=3)} =$$

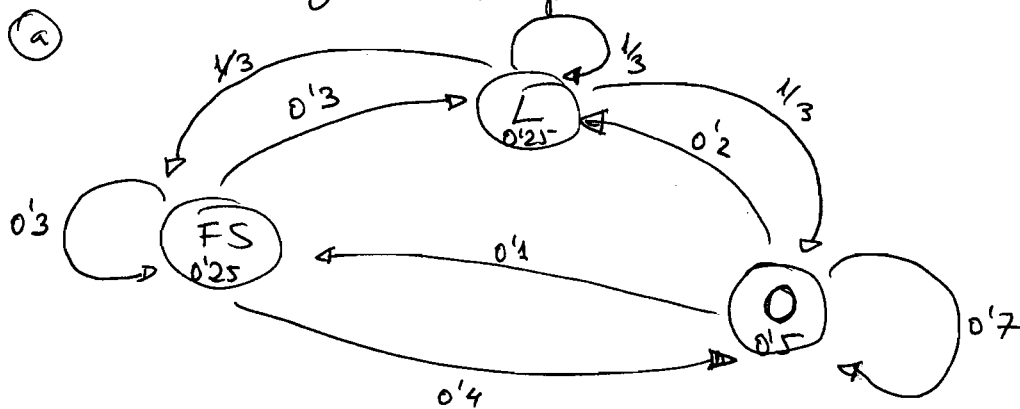
$$= \frac{f(3,2) + f(3,3)}{f_X(3)} = \frac{0'2 + 0'2}{0'4} = 1$$

PARTE II

FS $\rightarrow$ "Fuera de Servicio"

L $\rightarrow$ "Libre"

O $\rightarrow$ "Ocupado"



b) La matriz de transiciones contiene la probabilidad de cada cambio de estado:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} FS & L & O \end{matrix} \\ \begin{matrix} FS \rightarrow \\ L \rightarrow \\ O \rightarrow \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0'3 & 0'3 & 0'4 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0'1 & 0'2 & 0'7 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

c) El vector de probabilidades iniciales es:

$$\pi_0 = (0'25, 0'25, 0'5)$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow$
 FS L O

(3)

Entonces, las probabilidades de cada estado tras dos etapas vienen dadas por:

$$\pi_2 = \pi_0 \cdot P^2$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0'3 & 0'3 & 0'4 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0'1 & 0'2 & 0'7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0'3 & 0'3 & 0'4 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0'1 & 0'2 & 0'7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0'23 & 0'27 & 0'5 \\ 0'24 & 0'28 & 0'48 \\ 0'17 & 0'23 & 0'60 \end{pmatrix}$$

$$\pi_2 = (0'25 \quad 0'25 \quad 0'5) \begin{pmatrix} 0'23 & 0'27 & 0'50 \\ 0'24 & 0'28 & 0'48 \\ 0'17 & 0'23 & 0'60 \end{pmatrix} =$$

$$= (0'20 \quad 0'25 \quad 0'55)$$

El estado más probable es "Ocupado" tras 2 etapas.

PROB 3

$$\left. \begin{array}{l} T_1 \sim N(\mu_1=20, \sigma_1=\sqrt{2}) \\ T_2 \sim N(\mu_2=30, \sigma_2=\sqrt{3}) \end{array} \right\} \text{independientes}$$

$$(a) \quad P(19'5 \leq T_1 \leq 22) \xrightarrow{\text{TIPIFICAMOS}} P\left(\frac{19'5-20}{\sqrt{2}} \leq \frac{T_1-20}{\sqrt{2}} \leq \frac{22-20}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= P(-0'35 \leq Z \leq 1'41) = P(Z \leq 1'41) - P(Z \leq -0'35) =$$

$$= 0'92 - (1 - 0'64) = 0'56$$

$$(b) \quad TS = 2 \cdot (T_1 + T_2)$$

Como T_1 y T_2 son v.c. Normales $\Rightarrow$ TS seguirá también una distribución Normal. Calculamos su media μ_{TS} y su varianza σ_{TS}^2

$$\begin{aligned} \mu_{TS} &= E(TS) = E(2(T_1 + T_2)) = 2 \cdot [E(T_1) + E(T_2)] = \\ &= 2 \cdot (20 + 30) = 2 \cdot 50 = 100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{TS}^2 &= \text{Var}(TS) = \text{Var}(2(T_1 + T_2)) = 2^2 \cdot \text{Var}(T_1 + T_2) \stackrel{\text{INDEPEND.}}{=} \\ &= 2^2 \cdot (\text{Var}(T_1) + \text{Var}(T_2)) = 2^2 \cdot (2 + 3) = 4 \cdot 5 = 20 \end{aligned}$$

$$\text{Luego } TS \sim N(\mu_{TS} = 100, \sigma_{TS} = \sqrt{20})$$

$$\begin{aligned} P(90 \leq TS \leq 110) &= P\left(\frac{90-100}{\sqrt{20}} \leq \frac{TS-100}{\sqrt{20}} \leq \frac{110-100}{\sqrt{20}}\right) \\ &= P(-2.24 \leq Z \leq 2.24) = P(Z \leq 2.24) - P(Z \leq -2.24) \\ &= 0.9875 - (1 - 0.9875) = 0.975 \end{aligned}$$

(c) Nos piden la f.p.p. de $D = \begin{cases} 1 & \text{si } TS \in [90, 110] \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$

$$f_D(1) = P(D=1) = P(TS \in [90, 110]) = 0.975$$

$$f_D(0) = P(D=0) = 1 - P(D=1) = 1 - 0.975 = 0.025$$

PROB. 4

X_1 = "Flujo de corriente del 1^{er} diseño" $\sim$ Normal(μ_1, σ_1)

X_2 = "Flujo de corriente del 2^o diseño" $\sim$ Normal(μ_2, σ_2)

$X_1, X_2 \rightarrow$ Independientes.

$$n_1 = 15, \bar{x}_1 = 242, s_1^2 = 30$$

$$n_2 = 10, \bar{x}_2 = 238, s_2^2 = 20$$

① I.C. para μ_1 al 95% = $(\bar{x}_1 \pm t_{n_1-1, 1-\alpha/2} \cdot \frac{s_1}{\sqrt{n_1}})$

$$\text{I.C. al 95\% para } \mu_1 = (242 \pm 2.14 \cdot \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{15}}) = (242 \pm 3.03) = (238.97, 245.03)$$

$$t_{n_1-1, 1-\alpha/2} = t_{14, 0.975} = 2.14$$

$$\text{I.C. al 95\% para } \mu_2 = (238 \pm 2.26 \cdot \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{10}}) = (238 \pm 3.2) = (234.8, 241.2)$$

$$t_{n_2-1, 1-\alpha/2} = t_{9, 0.975} = 2.26$$

¿Se cortan ambos intervalos? Como ambos intervalos de confianza sí se cortan podemos sospechar que ambos flujos promedio son equivalentes.

② El error de estimación para el diseño 1 viene

dado por: $t_{n_1-1, 0.975} \cdot \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{n_1}} < 0.5$

Evidentemente el tamaño muestral de $n_1 = 15$ no es suficiente porque el error cometido es de 3.03, así que deberemos aumentar el tamaño muestral considerablemente.

Por este motivo, podemos usar la distribución $N(0,1)$ en lugar de la t -Student para calcular el tamaño muestral:

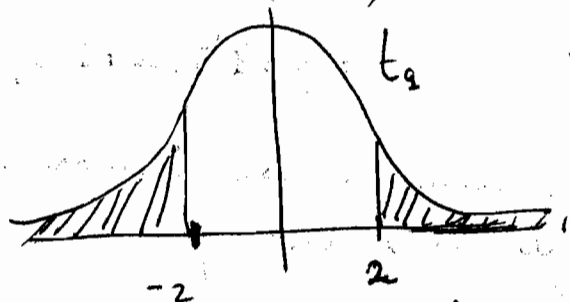
$$t_{n-1, 0.975} \cdot \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{n_1}} \approx Z_{0.975} \cdot \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{n_1}} < 0.5$$

$$\Rightarrow \sqrt{n_1} > \frac{1.96 \cdot \sqrt{30}}{0.5} \Rightarrow n_1 > \frac{(1.96)^2 \cdot 30}{(0.5)^2} = 460.99$$

$$\Rightarrow \boxed{n_1 \geq 461}$$

③ $\left. \begin{array}{l} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \end{array} \right\}$

Supuesto No cierto, el estadístico del contraste vale:



$$t_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{242 - 238}{\sqrt{\frac{30}{15} + \frac{20}{10}}} = \frac{4}{2} = 2$$

Como se trata de un contraste bilateral,

$$p\text{-valor} = 2 \cdot P(t_0 > 2) \in (0.05, 0.1)$$

$$P(t_0 > 2) \in (0.025, 0.05)$$

- Al 90% $\Rightarrow \alpha = 0.1 > p\text{-valor} \Rightarrow$ Rechazo H_0 al 90%.
- Al 95% $\Rightarrow \alpha = 0.05 < p\text{-valor} \Rightarrow$ Acepto H_0 al 95%
- Al 99% $\Rightarrow \alpha = 0.01 < p\text{-valor} \Rightarrow$ Acepto H_0 al 99%