

TELEMÁTICA FEBRERO 2007

PROB 1

$X =$ "Duración, en minutos, de las conexiones"

$X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma)$, $\mu \rightarrow$ desconocida
 $\sigma \rightarrow$ desconocida

Sabemos que:

$\bullet P(X < 9) = 0.9772$

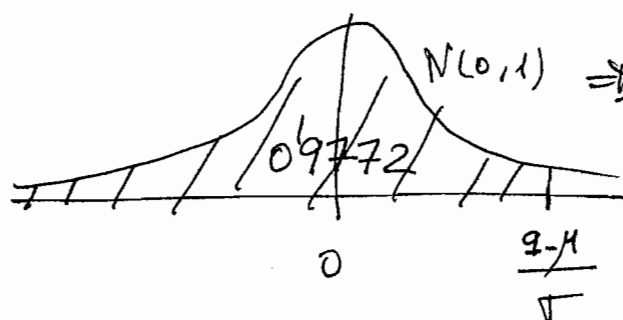
$\bullet P(X < 3) = 0.1587$

a) Calcular μ y σ :

De la relación $P(X < 9) = 0.9772$ se deduce lo siguiente:

Tipificamos
 $P(X < 9) = 0.9772 \Leftrightarrow P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{9 - \mu}{\sigma}\right) = 0.9772$

$\Leftrightarrow P\left(Z < \frac{9 - \mu}{\sigma}\right) = 0.9772$ con $Z \sim N(0, 1)$



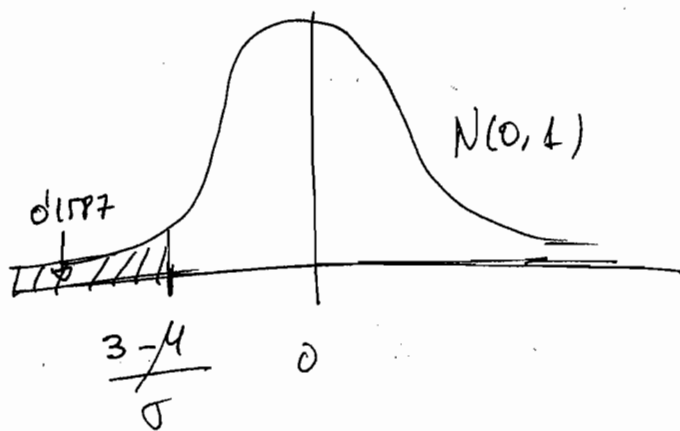
$\Rightarrow \frac{9 - \mu}{\sigma} = Z_{0.9772} = 2$

$\Rightarrow \boxed{\frac{9 - \mu}{\sigma} = 2}$

• Por otra parte, de la relación $P(X < 3) = 0.1587$ deducimos lo siguiente:

$$P(X < 3) = 0.1587 \xrightarrow{\text{Tipificamos}} P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{3 - \mu}{\sigma}\right) = 0.1587$$

$$\Leftrightarrow P\left(Z < \frac{3 - \mu}{\sigma}\right) = 0.1587 \Leftrightarrow \frac{3 - \mu}{\sigma} = Z_{0.1587}$$



$$\Leftrightarrow \frac{3 - \mu}{\sigma} = -Z_{0.8413}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{3 - \mu}{\sigma} = -1}$$

• Por tanto, tenemos 2 ecuaciones con 2 incógnitas:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{9 - \mu}{\sigma} = 2 \\ \frac{3 - \mu}{\sigma} = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \mu = 5 \\ \sigma = 2 \end{array}}$$

(2)

b) $Y = \text{"Nº de conexiones, entre las 1000, que duran menos de 9 minutos"}$

$$Y \sim B(n=1000, p) = P(X < 9) = 0.9772$$

Nos piden $P(Y \geq 30)$

Como $n > 30$ y $n p (1-p) = 1000 \cdot 0.9772 \cdot 0.0228 = 22.28$

$\Rightarrow$ Podemos aproximar la Binomial por una Normal ~~(~~de~~)~~
de parámetros $\mu = n \cdot p = 977.2$ y $\sigma = \sqrt{n p (1-p)} = \sqrt{22.28}$

$$P(Y \geq 30) \approx P(W \geq 30.5) = P\left(\frac{W - 977.2}{\sqrt{22.28}} \geq \frac{30.5 - 977.2}{\sqrt{22.28}}\right) \\ = P(Z \geq -200) = 1$$

donde $W \sim N(\mu = 977.2, \sigma = \sqrt{22.28})$

c) $C = \text{"La conexión es CORTA"}$

$L = \text{"La conexión es LARGA"}$

$I = \text{"La conexión es INTERMEDIA"}$

$$P(C) = P(X < 3) = 0.1587$$

$$P(L) = P(X > 9) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

$$P(I) = P(3 < X < 9) = 1 - (0.1587 + 0.0228) = \\ = 1 - 0.1815 = 0.8185$$

d) $F = \text{"el servidor falla"}$

$$P(F/G) = 0.04 \quad P(F/I) = 0.05 \quad P(F/L) = 0.10$$

No piden $P(F)$.

$$P(F) = P(G) \cdot P(F/G) + P(I) \cdot P(F/I) + P(L) \cdot P(F/L)$$

↳ Th. Probab. Total

$$= 0.1587 \cdot 0.04 + 0.8185 \cdot 0.05 + 0.0228 \cdot 0.10 = 0.0448$$

e) No piden $P(I/F)$

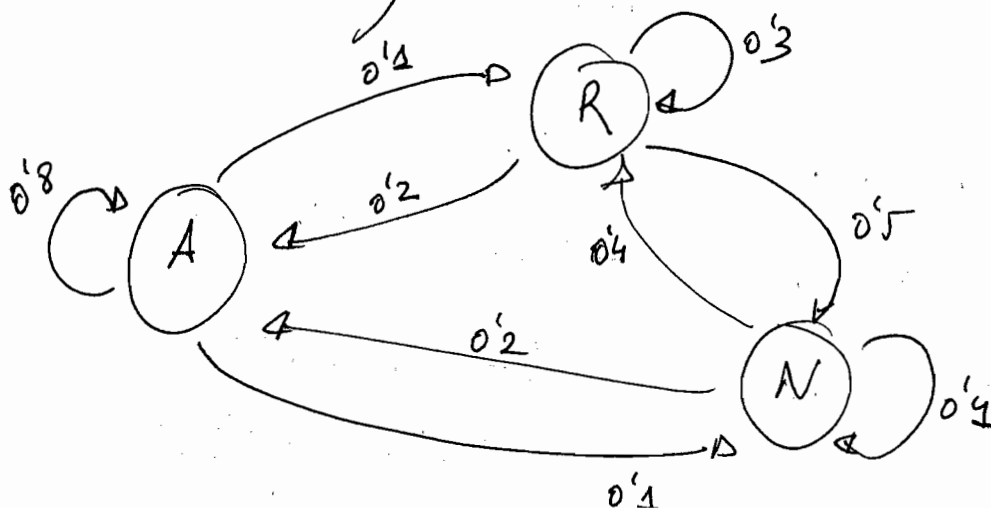
$$P(I/F) = \frac{P(F/I) \cdot P(I)}{P(F)} = \frac{0.05 \cdot 0.8185}{0.0448} = 0.91$$

Th. BAYES

PROB 2

A = "Operador Azul"
R = " " " Rojo"
N = " " " Naranja"

Representan los 3 posibles
Estados del proceso.



(3)

a)

La matriz de probabilidades de transición es:

$$I = \begin{matrix} & \begin{matrix} A \downarrow & R \downarrow & N \downarrow \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \rightarrow \\ R \rightarrow \\ N \rightarrow \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0'8 & 0'1 & 0'1 \\ 0'2 & 0'3 & 0'5 \\ 0'2 & 0'4 & 0'4 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

b) Vamos a calcular las probabilidades de los tres estados (A, R y N) inicialmente:

$$P(\text{"Ocupar estado A inicialmente"}) = \frac{4000}{12000} = \frac{1}{3}$$

$$P(\text{"Ocupar estado R inicialmente"}) = \frac{3000}{12000} = \frac{1}{4}$$

$$P(\text{"Ocupar estado N inicialmente"}) = \frac{5000}{12000} = \frac{5}{12}$$

$$\pi_0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{12} \right)$$

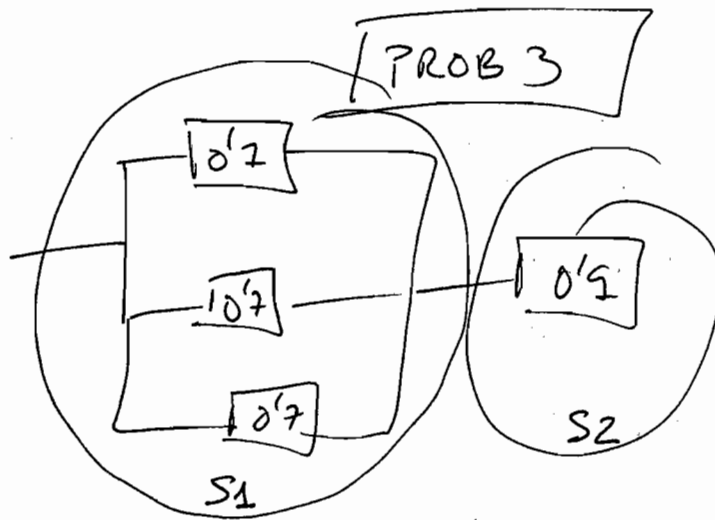
$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 A R N

Como nos piden la situación a los dos años, este vendrá dado por:

$$\pi_2 = \pi_0 \cdot I^2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{12} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0'8 & 0'1 & 0'1 \\ 0'2 & 0'3 & 0'5 \\ 0'2 & 0'4 & 0'4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0'8 & 0'1 & 0'1 \\ 0'2 & 0'3 & 0'5 \\ 0'2 & 0'4 & 0'4 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{12} \right) \begin{pmatrix} 0'68 & 0'15 & 0'17 \\ 0'32 & 0'31 & 0'37 \\ 0'32 & 0'30 & 0'38 \end{pmatrix} = \left(0'44, 0'25, 0'31 \right)$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 Azul Roja Naranja



$$\begin{aligned}
 P(\text{"Funcione Circuito"}) &= P(\text{"Funcione } S_1" \cap \text{"Funcione } S_2") \\
 &= P(\text{"Funcione } S_1") \cdot \underbrace{P(\text{"Funcione } S_2")}_{= 0.9} \\
 &\stackrel{\text{INDEP.}}{\rightarrow}
 \end{aligned}$$

• Nos falta calcular $P(\text{"Funcione } S_1")$

$$\begin{aligned}
 \bullet P(\text{"Func. } S_1") &= 1 - P(\text{"Falle } S_1") = \\
 &= 1 - P(\text{"Falle } C_1" \cap \text{"Falle } C_2" \cap \text{"Falle } C_3") = \\
 &= 1 - (0.3)^3 = 1 - 0.027 = 0.973
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow P(\text{"Funcione Circuito"}) = 0.973 \cdot 0.9 = \boxed{0.8757}$$

PROB 4

$A =$ "El bit presenta distorsión ALTA" $\rightarrow P(A) = 0'01$

$M =$ "El " " " MODERADA" $\rightarrow P(M) = 0'04$

$B =$ "El " " " BAJA" $\rightarrow P(B) = 0'95$

$X =$ "Nº de bits, de los 2 transmitidos, que presentan distorsión ALTA".

$Y =$ "Nº bits, de los 2 transmitidos, que presentan distorsión MODERADA".

a) Nos piden la f.p.p. de (X, Y) .

Los valores del rango de (X, Y) son:

$$\text{rg}(X, Y) = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (2,0)\}$$

$$\cdot \int_{(X,Y)} (0,0) = P(B_1 \cap B_2) = (0'95) \cdot (0'95) = \boxed{0'9025}$$

$$\cdot \int_{(X,Y)} (0,1) = P(B_1 \cap M_2) + P(M_1 \cap B_2) = (0'95 \cdot 0'04) \times 2 = \boxed{0'078}$$

$$\cdot \int_{(X,Y)} (0,2) = P(M_1 \cap M_2) = (0'04) \cdot (0'04) = \boxed{0'0016}$$

$$\cdot \int_{(X,Y)} (1,0) = P(A_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap A_2) = 2 \times (0'01 \cdot 0'95) = \boxed{0'038}$$

$$\cdot \int_{(X,Y)} (1,1) = P(A_1 \cap M_1) \times 2 = (0'01 \cdot 0'04) \times 2 = \boxed{0'0008}$$

$$\cdot \int_{(X,Y)} (2,0) = P(A_1 \cap A_2) = 0'01 \cdot 0'01 = \boxed{0'0001}$$

• $f_X(x) \rightarrow$ Marginal de X .

$$\text{rg}(X) = \{0, 1, 2\}.$$

$$f_X(0) = f(0,0) + f(0,1) + f(0,2) = 0'9025 + 0'076 + 0'0016 = 0'9801$$

$$f_X(1) = f(1,0) + f(1,1) = 0'019 + 0'0008 = 0'0198$$

$$f_X(2) = f(2,0) = 0'0001$$

• Marginal de Y : $\text{rg}(Y) = \{0, 1, 2\}$

$$f_Y(0) = f(0,0) + f(1,0) + f(2,0) = 0'9025 + 0'019 + 0'0004 = 0'9216$$

$$f_Y(1) = f(0,1) + f(1,1) = 0'076 + 0'0008 = 0'0768$$

$$f_Y(2) = f(0,2) = 0'0016$$

• Son independientes? Evidentemente NO porque

$$f(2,2) = 0 \neq f_X(2) \cdot f_Y(2)$$

$$\begin{aligned} c). E(X) &= 0 \cdot f_X(0) + 1 \cdot f_X(1) + 2 \cdot f_X(2) = 1 \cdot 0'0198 + 2 \cdot 0'0001 = \\ &= 0'0198 + 0'0002 = \boxed{0'02} \end{aligned}$$

$$\cdot \text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 0'0202 - (0'02)^2 = \boxed{0'0198}$$

$$\begin{aligned} \cdot E(X^2) &= 0^2 \cdot f_X(0) + 1^2 \cdot f_X(1) + 2^2 \cdot f_X(2) = 1 \cdot 0'0198 + 4 \cdot 0'0001 = \\ &= \boxed{0'0202} \end{aligned}$$

(5)

d) Calcular:

$P(X=2, Y=1) = f_{X,Y}(2,1) = 0$ porque el punto $(X=2, Y=1)$ no es un punto del $rg(X,Y)$, es decir, es un valor imposible.

$$P(Y=1/X=1) = \frac{P(X=1, Y=1)}{P(X=1)} = \frac{f_{X,Y}(1,1)}{f_X(1)} =$$

$$= \frac{0'0008}{0'0198} = \boxed{0'04}$$

PROB 5

X = "Tiempo de impresión, en segundos, de un fichero Postscript de 3 Mg"

$X \sim \text{Normal}(\mu \rightarrow \text{desconocido}, \sigma \rightarrow \text{desconocido})$.

Extraemos una muestra y obtenemos:

$$n=10, \quad \bar{x}=270, \quad s_x=7$$

④ Nos piden un I.C. al 95% para μ :
Como σ es desconocido, el I.C. viene dado por:

$$\left(\bar{X} \pm t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$$

Nota: La construcción de la tabla se realizó en clase.

En nuestro caso:

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} = t_{9, 0.975} = 2.26$$

$$I.C = (270 \pm 2.26 \cdot \frac{7}{\sqrt{10}}) = (270 \pm 5) = (265, 275)$$

b) Suponemos que $\sigma = 7 \Rightarrow$ el error de estimación viene dado por:

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1.96 \cdot 7}{\sqrt{n}} < 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} > \frac{1.96 \cdot 7}{2} \Rightarrow n > \left(\frac{1.96 \cdot 7}{2} \right)^2 = 47.06$$

$$\Rightarrow \boxed{n \geq 48}$$

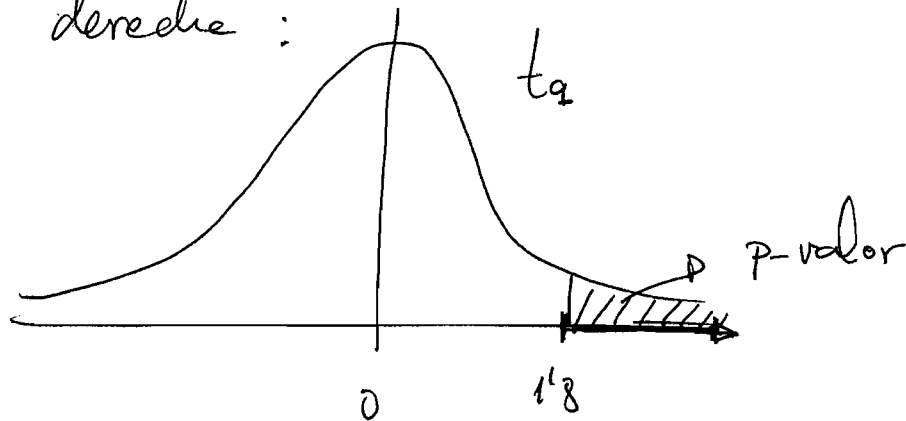
c) En función de los datos muestrales obtenidos y de la afirmación del fabricante, proponemos el siguiente contraste:

$$\begin{cases} H_0: \mu = 266 \\ H_1: \mu > 266 \end{cases}$$

Como σ es desconocida, el estadístico del contraste viene dado por:

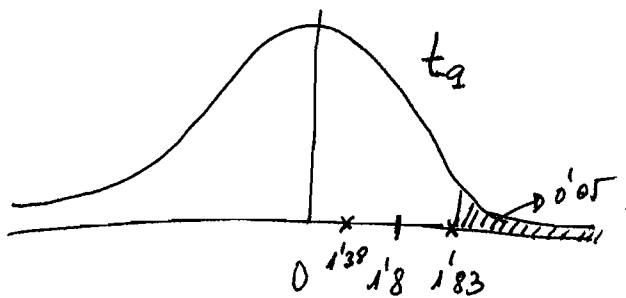
$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{270 - 266}{\frac{7}{\sqrt{10}}} = 1.8$$

Se trata de un contraste con cola a la derecha:



El p-valor en este caso vale:

$$p\text{-valor} = P(t_q > t_0) = P(t_q > 1'8) \in (0'05, 0'10)$$



- Al 90% de confianza $\Rightarrow$ Rechazamos H_0 .
- Al 95% y al 99% de confianza $\Rightarrow$ Aceptamos H_0 .

CONCLUSIÓN: Existen evidencias de que el tiempo promedio de impresión es superior al indicado por el fabricante, ya que el p-valor es muy próximo a 0'05 (aunque ligeramente superior).

[Illegible text]

[Illegible text]

[Illegible text]