ESTADÍSTICA TELEMÁTICA

(SEPTIEMBRE 2004)

PROBLEMA 4

X_1 = "Tiempo de vida de la bomba B_1" (en miles de horas)
X_2 = "Tiempo de vida de la bomba B_2" (en miles de horas)
X_3 = "Tiempo de vida de la bomba B_3" (" " ")
X_4 = "Tiempo de vida de la bomba B_4" (" " ")
Y = "Tiempo de vida de la depuradora D". (" " ")

$X_1, X_2; X_3, X_4 \sim Exp(\lambda = \frac{1}{30})$

$Y \sim Exp(\lambda = \frac{1}{20})$

a) $P(Y > 20) = 1 - P(Y \leq 20) = 1 - F_Y(20)$

$\cancel{F_Y(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad \text{si } x > 0.}$

$$F_Y(x) = 1 - e^{-\frac{1}{20} \cdot x} \quad \text{si } x > 0.$$

$$P(Y > 20) = 1 - F_Y(20) = e^{-\frac{20}{20}} = e^{-1} = \boxed{0'36}$$

Depuradora

Para cada bomba B_i se tiene que:

$$P(X_i > 20) = 1 - F_{X_i}(20) = e^{-\frac{20}{30}} = \boxed{0'51}$$

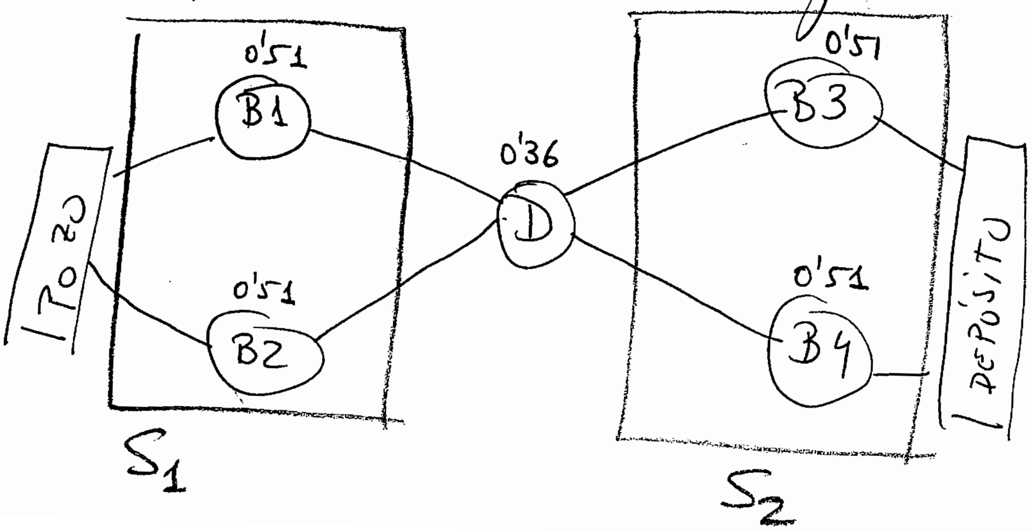
(b) Nos piden $P(Y > 35 / Y > 20)$. Usando la propiedad de "falta de memoria" de la Exponencial, resulta: ¡Cambio!

$$P(Y > 35 / Y > 20) = P(Y > 15) = 1 - F_Y(15) = e^{-\frac{15}{20}} = \boxed{0'47}$$

(c) Como el tiempo de vida de la depuradora es Exponencial, resulta que "no envejece" y por tanto no evitaríamos fallos renovándola, puesto que siempre se comporta como si fuera nueva.

(d) ~~Considerando la planta~~

La probabilidad de que funcionen cada una de las componentes que forman el sistema, después de 20 mil horas, ya ha sido calculada en el apartado (a):



(2)

- Llamemos S_1 al subsistema formado por las bombas B1 y B2 en paralelo y ~~llamemos~~
- Llamemos S_2 al subsistema formado por las bombas B3 y B4 en paralelo

$P(\text{"Llegue agua al depósito"}) =$

$= P(\text{"Funcione } S_1\text{"} \cap \text{"Funcione Depuradora"} \cap \text{"Funcione } S_2\text{"})$

$= P(\text{"Funcione } S_1\text{"}) \cdot P(\text{"Funcione Dep"}) \cdot P(\text{"Funcione } S_2\text{"})$

↳ Independencia.

- $P(\text{"Funcione Depuradora"}) = P(Y > 20) = 0'36$ (apartado (a))

- $P(\text{"Funcione } S_1\text{"}) = P(\text{"Funcione B1"} \cup \text{"Funcione B2"}) =$

$= \cancel{P(\text{"Funcione B1"}) + P(\text{"Funcione B2"}) =}$

$= P(\text{"Funcione B1"}) + P(\text{"Funcione B2"}) - P(\text{"Funcione B1"} \cap \text{"Funcione } B_2\text{"})$

$= 0'51 + 0'51 - 0'51 \cdot 0'51 = 0'7599$

- $P(\text{"Funcione } S_2\text{"}) = 0'7599$

Estas dos últimas probabilidades se podían calcular de la siguiente forma:

- $P(\text{"Funcione } S_1\text{"}) = 1 - P(\text{"No Funcione } S_1\text{"}) = 1 -$

$- P(\text{"No Funcione } B_1\text{"} \cap \text{"No Funcione } B_2\text{"}) = 1 - 0'49 \cdot 0'49 = 0'7599$

$P(\text{"Llegue aquí al depósito"}) = 0'7599 \cdot 0'36 \cdot 0'7599 =$

$= \boxed{0'2078}$

(e) D = "La bomba seleccionada no supera la garantía (es defectuosa)"

$P(D) = 0'05$

X = "Nº de bombas devueltas de entre las 1000"

$X \sim B(n=1000,\ p=0'05)$

Nos piden $P(X>40)$.

Observación que $n=1000$ es grande y $n.p.(1-p) = 47'5 > 5$

$\Rightarrow$ podemos aproximar la Binomial(n,p) por una

$V \sim \text{Normal}(\mu = n.p.,\ \sigma^2 = n.p.(1-p)) \equiv N(\mu = 50, \sigma^2 = 47'5)$

→ corrección por continuidad

$P(X>40) \simeq P(V \geq 40'5) = P\left(\frac{V-50}{\sqrt{47'5}} \geq \frac{40'5-50}{\sqrt{47'5}}\right)$

$= P(Z \geq -1'38) = P(Z \leq 1'38) = \boxed{0'9162}$

PROBLEMA 2

D = "La pieza es defectuosa"

T_D = "El test dice que la pieza es defectuosa".

(a) $P(T_D \mid D) = \frac{48}{50}$; $P(T_D \mid \overline{D}) = \frac{1}{50}$

$P(\overline{T_D} \mid D) = \frac{2}{50}$; $P(\overline{T_D} \mid \overline{D}) = \frac{49}{50}$

(b) Sabemos que $P(D) = 0'05$. Nos piden $P(D \mid T_D)$

$$P(D \mid T_D) \overset{\text{Th. Bayes.}}{=} \frac{P(T_D / D) . P(D)}{P(T_D)} = \frac{0'05 . \frac{48}{50}}{0'067} = \boxed{0'71}$$

$$P(T_D) \overset{\text{Th. Probab. Total}}{=} P(D) . P(T_D / D) + P(\overline{D}) . P(T_D / \overline{D}) =$$

$$= 0'05 . \frac{48}{50} + 0'95 . \frac{1}{50} = 0'067$$

PROBLEMA 3

(a) La f.p.p. marginal de X viene dada por:

$$f_X(x) = \sum_{y \in Rg(Y)} f_{X,Y}(x,y) \quad ; \quad \text{Rango}(X) = \{1,2,3\}$$

- $f_X(1) = P(X=1) = f_{X,Y}(1,1) + f_{X,Y}(1,2) + f_{X,Y}(1,3) =$

$= P(X=1, Y=1) + P(X=1, Y=2) + P(X=1, Y=3) =$

$= 0'05 + 0'05 + 0 = 0'1$ ("Sumar 1ª columna tabla).

- $f_X(2) = f_{X,Y}(2,1) + f_{X,Y}(2,2) + f_{X,Y}(2,3) = 0'05 + 0'1 + 0'2 = 0'35$
- $f_X(3) = 0'1 + 0'35 + 0'1 = 0'55$

La f.p.p. marginal de Y es: $f_Y(y) = \sum_{x \in R_g(X)} f_{X,Y}(x,y)$

- $f_Y(1) = f_{(X,Y)}(1,1) + f_{(X,Y)}(2,1) + f_{(X,Y)}(3,1) =$

$= 0'05 + 0'05 + 0'1 = 0'2$ (sumar 1ª fila).

- $f_Y(2) = 0'05 + 0'1 + 0'35 = 0'5$
- $f_Y(3) = 0 + 0'2 + 0'1 = 0'3$

(b) No son independientes porque

$f_{X,Y}(1,1) = 0'05 \neq 0'02 = 0'1 \cdot 0'2 = f_X(1) \cdot f_Y(1)$

(c) $E(X) = \sum_{x_i \in R_g(X)} x_i f_X(x_i) = 1 \cdot f_X(1) + 2 \cdot f_X(2) + 3 \cdot f_X(3)$

$= 1 \cdot 0'1 + 2 \cdot 0'35 + 3 \cdot 0'55 = 2'45$

(d) $P(Y \geq 2 \mid X=3) = P(Y=2 \mid X=3) + P(Y=3 \mid X=3)$

$= \frac{P(X=3, Y=2)}{P(X=3)} + \frac{P(X=3, Y=3)}{P(X=3)} =$

$= \frac{0'35}{0'55} + \frac{0'1}{0'55} = \frac{0'45}{0'55} = \boxed{0'81}$

PROBLEMA 1

X = "Duración de los periodos ON" $\sim Exp(\lambda = \frac{1}{\mu_{ON}})$

1 Consideramos una muestra de 500 periodos ON y

Sí

se tiene una duración media ~~una~~ para la muestra de $\bar{x} = 0'31$ y una desviación típica muestral de $s = 0'35$

Datos $\rightarrow$ $n = 500$, $\bar{x} = 0'31$, $s = 0'35$

(a) Nos piden un I.C. al 95% para μ_{ON}.

La población en estudio sigue una distribución NO NORMAL con varianza desconocida. Además disponemos de un tamaño muestral bastante grande ($n = 500$), de manera que el I.C. para μ_{ON} viene dado por:

$$I.C. \equiv \left(\bar{X} \pm z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$$

(La construcción detallada se hizo en clase).

$$\alpha = 0'05 \Rightarrow z_{1-\alpha/2} = z_{0'975} = 1'96$$

$$I.C. = \left(0'31 \pm 1'96 \cdot \frac{0'35}{\sqrt{500}} \right) = (0'31 \pm 0'03) = (0'28, 0'3$$

(b) Se trata de un intervalo aproximado, puesto que la v. poblacional ~~población de partida~~ (v.a. X) no sigue una distribución Normal y por tanto se usa la aproximación:

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \overset{\text{distribución aproximada}}{\cong} N(0,1)$$

A partir de esta aproximación se deduce el intervalo de confianza para la media:

$$\left(\overline{X} \pm z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

(2) Sea $X=$ "Duración de los periodos OFF" ~~[illegible]~~

NO

Sabemos que $\sigma_{OFF} = 0'33$.

(a) Si $X \sim Exp\left(\lambda = \frac{1}{\mu_{OFF}}\right)$, $\sigma_{OFF} = 0'33 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} = (\mu_{OFF})^2 \\ Var(X) = \sigma^2_{OFF} = (0'33)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \mu_{OFF} = 0'33$$

~~Todo lo anterior~~ La deducción anterior sería cierta si X fuese exponencial. Nos piden, sin embargo, que llevemos a cabo el contraste:

$$\cancel{\mu_{OFF} = 0'33} \quad \cancel{\mu_{OFF} = 0'33} \qquad \left\{\begin{array}{l} H_0: \mu_{OFF} = 0'33 \\ H_1: \mu_{OFF} \neq 0'33 \end{array}\right.$$

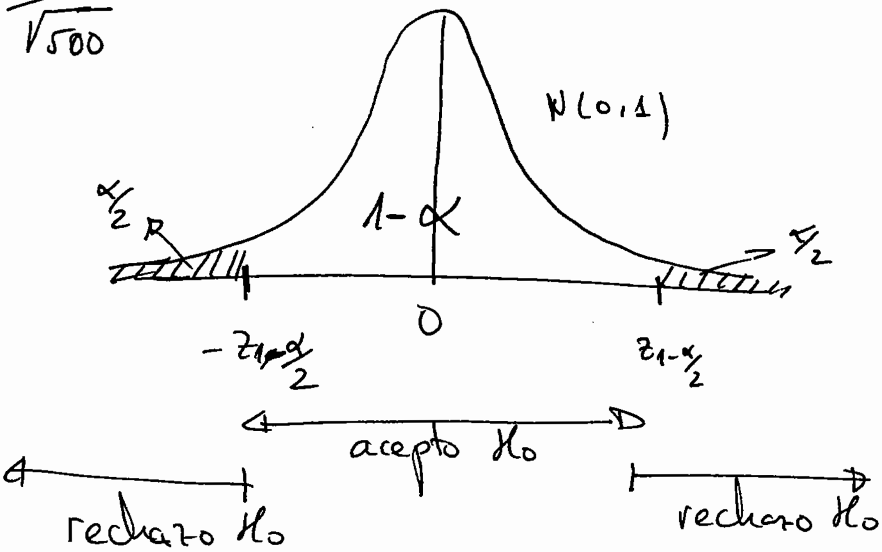
El estadístico del contraste es:

$$z_0 = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

Para nuestra muestra, el estadístico vale:

$$z_0 = \frac{0'31 - 0'33}{\frac{0'33}{\sqrt{500}}} = 1'35$$

$\alpha = 0'05$



$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0'975} = 1'96$.

Como $z_0 = 1'35 \in [-1'96, 1'96] \Rightarrow$ aceptamos $H_0 \Rightarrow$ No podemos decir que la media ~~sea~~ non sea significativamente distinta de $0'33$.

(b) p-valor $= 2 \times P(Z > 1'35) = 2 \times (1 - 0'91) = 2 \times 0'09 = 0'18$