

EXAMEN ESTADÍSTICA JUNIO 2005

(I.T. TELEMATICA).

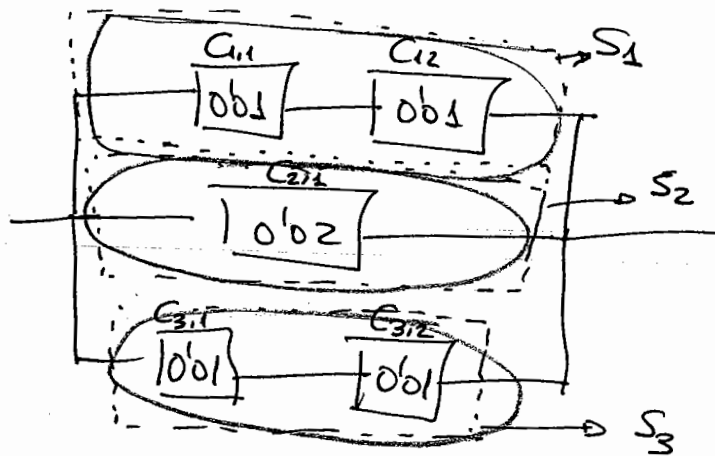
PROB 1

- I ① Las nubes de puntos del problema nos permiten estudiar la relación existente entre la permeabilidad y la resistencia de 4 tipos de material distintos (relación lineal, cuadrática, falta de relación, etc.)
- ② El coeficiente de correlación de Pearson viene dado por $r_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y}$. Es una medida de la asociación lineal entre dos variables y verifica que $r_{xy} \in [-1, 1]$.
- Para el Material 1, se aprecia una relación lineal creciente entre la "permeabilidad" y la "resistencia" así que $r_{xy} \approx 1$ (próximo a uno).
 - Para el Material 2, se aprecia una relación cuadrática (no lineal), de manera que se tendrá que $r_{xy} \approx 0$ debido a la forma parabólica de la nube de pts.

• Para el Material 3, se observa una clara falta de relación entre la "permeabilidad" y la "resistencia", de modo que $r_{xy} \approx 0$.

• Para el Material 4, se observa una relación lineal decreciente bastante buena entre las dos variables en estudio, de modo que $r_{xy} \approx -1$.

II.



Podemos considerar el Sistema total como tres Subsistemas (S_1, S_2 y S_3) situados en paralelo.

$$\otimes P(\text{"Funcione Sistema"}) = 1 - P(\text{"No Funcione Sistema"})$$

$$\otimes P(\text{"No Funcione Sistema"}) = P(\text{"No Funcione } S_1" \cap \text{"No Funcione } S_2" \cap \text{"No Funcione } S_3"}) \xrightarrow{\text{INDEPENDENCIA}} P(\text{"No Func. } S_1") \cdot P(\text{"No Func. } S_2") \cdot$$

$$P(\text{"No Funcione } S_3").$$

$$\textcircled{1} \quad P(X \notin [9'9, 10'1]) = 1 - P(X \in [9'9, 10'1])$$

$$P(X \in [9'9, 10'1]) = P(9'9 \leq X \leq 10'1) \stackrel{\text{TIPIFICAMOS}}{=}$$

$$= P\left(\frac{9'9 - 10}{0'05} \leq \underbrace{\frac{X - 10}{0'05}}_{Z \sim N(0,1)} \leq \frac{10'1 - 10}{0'05}\right) =$$

$$= P(-2 \leq Z \leq 2) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq -2) =$$

$$= 0'9772 - (1 - 0'9772) = 0'9544.$$

$$\Rightarrow P(X \notin [9'9, 10'1]) = 1 - 0'9544 = 0'0456$$

$\Rightarrow$ El 4'56% de las piedras no cumplen las especificaciones de longitud.

$$\textcircled{2} \quad \text{Nos piden } P[(X \in [9'9, 10'1]) \cap (Y \in [4'9, 5'1])]$$

$$P[(9'9 \leq X \leq 10'1) \cap (4'9 \leq Y \leq 5'1)] \stackrel{\text{INDEPENDENCIA}}{=}$$

$$= P(9'9 \leq X \leq 10'1) \cdot P(4'9 \leq Y \leq 5'1)$$

Ya hemos calculado $P(9'9 \leq X \leq 10'1) = 0'9544$ en el apartado anterior.

$$\begin{aligned} P(4'9 \leq Y \leq 5'1) &\stackrel{\text{TIPIFICAMOS}}{=} P\left(\frac{4'9 - 5}{0'05} \leq \underbrace{\frac{Y - 5}{0'05}}_{Z \sim N(0,1)} \leq \frac{5'1 - 5}{0'05}\right) = \\ &= P(-2 \leq Z \leq 2) = 0'9544 \end{aligned}$$

Luego:

(3)

$$P(\text{"Piera aprovechable"}) = 0.9544 \cdot 0.9544 = \boxed{0.91088}$$

③ Nos piden $P(X \in [9.9, 10.1] / (\text{"Piera no aprovechable"}))$

$$\begin{aligned} &P(\text{"Cumple Longitud"} / \text{"Piera No aprovechable"}) = \\ &= \frac{P((\text{"Cumple Longitud"}) \cap (\text{"Piera No aprovechable"}))}{P(\text{"Piera No aprov."})} \end{aligned}$$

$$= \frac{P((\text{"Cumple Longitud"}) \cap (\text{"No cumple Anchura"}))}{P(\text{"Piera No aprov."})} \stackrel{\text{INDEP}}{=} \frac{P(\text{"Cumple Longitud"}) \cdot P(\text{"No cumple Anchura"})}{P(\text{"Piera No aprov."})}$$

$$= \frac{0.9544 \cdot 0.0456}{1 - 0.91088} = \boxed{0.4883} \rightarrow \text{un } 48.83\%$$

④ $W = \text{"Nº de piezas aprovechables de entre las 200"}$

$$W \sim B(n=200, p=0.91088)$$

$$\text{Me piden } P(W \geq 1) = 1 - P(W=0) \approx 1$$

$$P(W=0) = \binom{200}{0} \cdot (0.91088)^0 \cdot (1-0.91088)^{200} \approx 0$$

Sea ahora $W =$ "Nº piedras no aprovechadas entre las 200".

$$W \sim B(n=200, p=0.08912)$$

Nos piden $P(W > 30)$.

Observar que $\begin{cases} n = 200 > 30 \\ n p(1-p) = 200 \cdot 0.08912 \cdot 0.91088 = 16.23 > 5 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Podemos aproximar la Binomial por una Normal,

$$W \underset{\text{Lo aprox.}}{\approx} V \quad \text{donde} \quad V \sim N(\mu = np = 17.824, \sigma^2 = 16.23)$$

Por tanto, $P(W > 30) \underset{\text{Lo aprox. usando corrección por continuidad}}{\approx} P(V \geq 30.5) =$

$$= P\left(\frac{V - 17.824}{\sqrt{16.23}} \geq \frac{30.5 - 17.824}{\sqrt{16.23}}\right) = P(Z \geq 3.146) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 3.146) = 1 - 0.99931 \approx 0.00069$$

⑤. Supongamos ahora que X no es Normal,
 $X =$ "Longitud piedras".

Nos piden una cota superior para $P(X \notin [9.9, 10.1])$

Usando la desigualdad de Tchebychev, tenemos que:

$$P(|X - \mu_X| \geq k \cdot \sigma_X) \leq \frac{1}{k^2} \quad [\text{Ver Formulario}]$$

Por tanto, se tiene:

(9)

$$P(X \notin [9'9, 10'1]) = P(|X - 10| > \underbrace{0'1}_{K \cdot \sigma_x}) \leq \frac{1}{K^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$K \cdot \sigma_x = 0'1 \Rightarrow K \cdot 0'05 = 0'1 \Rightarrow \boxed{K = 2}$$

Como máximo habrá un 25% de piezas que no cumplan las especificaciones de longitud.

- ⑩ En el apartado ① hemos obtenido que el porcentaje de piezas que no cumplen la longitud adecuada es del 4'56% en el caso Normal. Al tener una distribución desconocida, la cota que se obtiene será "muy conservadora" pues ha de valer para TODAS las distribuciones, de ahí la gran diferencia entre 4'56% y 25%.

PROB. 3

X = "Tiempo de vida, en miles de horas, de la componente A".

Y = "Tiempo " " , " " " " , " " " " - B".

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 \cdot e^{-x-2y} & \text{si } x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

- ① Para que sea función de densidad ha de cumplir:

1º) $f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

2º) $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy = 1.$

④ Nos piden $P(Y > 1 / X < 0.5) \stackrel{\rightarrow \text{Independencia}}{=}$

$$= P(Y > 1) = 1 - P(Y \leq 1) = 1 - F_Y(1) = \boxed{e^{-2}}$$

Otra forma: $P(Y > 1) = \int_{y=1}^{y=+\infty} 2 \cdot e^{-2y} dy = \left[-e^{-2y} \right]_1^{+\infty} = e^{-2}$

⑤ ~~El X es~~ Nos piden $P(X < 1.5 / X > 0.7)$

$\stackrel{\rightarrow \text{Propiedad Falta Memoria de la Exponencial}}{P(X < 1.5 / X > 0.7)} = P(X < 0.8) = F_X(0.8) =$
 $= \boxed{1 - e^{-0.8}}$

* Como los tiempos de vida de ambas componentes siguen distribuciones exponenciales, no tiene sentido renovar las componentes si todavía funcionan, puesto que la exponencial tiene la propiedad de no envejecimiento, es decir, las piezas usadas son tan fiables como las nuevas (esto sólo ocurre con la exponencial).