

①

EXAMEN JUNIO 2004

TELEMÁTICA (ESTADÍSTICA)

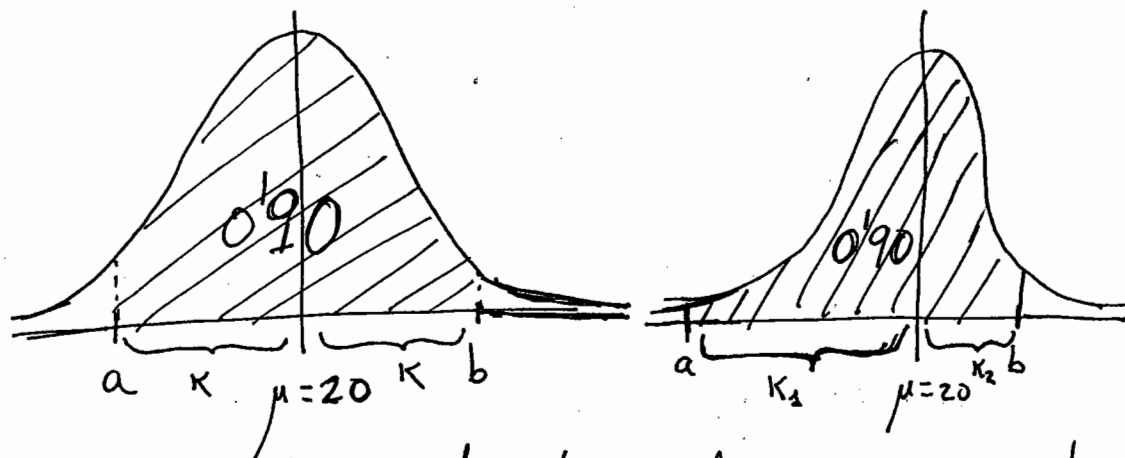
PROBLEMA 3

[1] X = "Longitud de una pieza seleccionada al azar fabricada por Máquina 1".

$$X \sim N(\mu=20, \sigma^2=4)$$

[a] Buscamos un ~~el~~ intervalo de la forma (a, b) de manera que:

$$P(a \leq X \leq b) = 0.90.$$



Evidentemente, existen infinitas soluciones a nuestro problema, sin embargo consideraremos sólo el intervalo centrado en probabilidad, es decir, la única solución de la forma $a = \mu - K$, $b = \mu + K$

Por tanto, nuestro problema se reduce a buscar "K" de modo que:

$$P(\mu - K \leq X \leq \mu + K) = 0.90 \quad \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ \downarrow \\ \Leftrightarrow \end{array}$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{-K}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{K}{\sigma}\right) = 0.90 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{-K}{2} \leq Z \leq \frac{K}{2}\right) = 0.90$$

$$\text{con } Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 20}{2} \sim N(0, 1)$$

$\Rightarrow \frac{K}{2}$ es el pto que deja a su izquierda un área de $0.9 + 0.05 = 0.95 \Rightarrow \frac{K}{2} = Z_{0.95} = 1.64$

$$\Rightarrow K = 2 \times 1.64 = 3.28$$

El intervalo pedido es:

$$(20 - 3.28, 20 + 3.28) = (16.72, 23.28)$$

OTRA FORMA: Sabemos que:

$$P(-1.64 \leq Z \leq 1.64) = 0.90 \quad \text{con } Z \sim N(0, 1)$$

Considerando $Z = \frac{X - 20}{2} \sim N(0, 1)$ resulta:

$$P(-1'64 \leq \frac{X-20}{2} \leq 1'64) = 0'90 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(20 - 1'64 \times 2 \leq X \leq 20 + 1'64 \times 2) = 0'90 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(16'72 \leq X \leq 23'28) = 0'90.$$

(b) Nos piden $P(X \notin [16, 24])$

$$P(X \notin [16, 24]) = 1 - P(X \in [16, 24])$$

$$P(X \in [16, 24]) = P(16 \leq X \leq 24) = \text{Tipificamos}$$

$$= P\left(\frac{16-20}{2} \leq \frac{X-20}{2} \leq \frac{24-20}{2}\right) =$$

$$= P(-2 \leq Z \leq 2) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq -2) =$$

$$= 0'9772 - (1 - 0'9772) = 0'9545$$

Proporci3n de defectuosas = $1 - 0'9545 = 0'0455$.

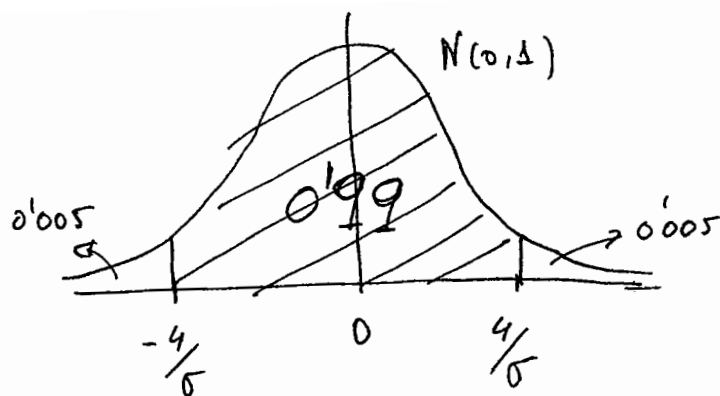
(c) Nos piden que calculemos σ^2 de modo que:

$$P(16 \leq X \leq 24) = 0'99 \quad (\text{proporci3n aceptables}).$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{16-20}{\sigma} \leq \frac{X-20}{\sigma} \leq \frac{24-20}{\sigma}\right) = 0'99 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(-\frac{4}{\sigma} \leq Z \leq \frac{4}{\sigma}\right) = 0'99$$

↓
Tipificamos.

$\Leftrightarrow$ 

" $\frac{4}{5}$ " es el pto que deja a su izquierda un

área de $0.99 + 0.005 = 0.995 \Leftrightarrow$

$$\frac{4}{5} = Z_{0.995} = 2.56 \Leftrightarrow \sigma = \frac{4}{2.56} \approx 1.55$$

$$\Leftrightarrow \sigma^2 \approx 2.42$$

12 M_1 = "La piedra seleccionada se fabricó en Mg. 1"
 M_2 = "La " " " " " " Mg. 2"
 D = "La piedra " resulte defectuosa".

$$P(M_1) = 0.85 ; P(D/M_1) = 0.01$$

$$P(M_2) = 0.15 ; P(D/M_2) = 0.05$$

Observar que los sucesos $\{M_1, M_2\}$ forman una partición de Ω .

Nos piden $P(M_1/D)$ y $P(M_2/D)$.

$$P(M_1/D) = \frac{P(D/M_1) \cdot P(M_1)}{P(D/M_1) \cdot P(M_1) + P(D/M_2) \cdot P(M_2)} =$$

↓
Th. Bayes

(b) Estimación puntual $= \bar{x} = 45'75$.

Error máximo cometido $= 10'89$.

36

- (c) 1.) Tamaño muestral
2.) Varianza poblacional (Ver apuntes teoría).
3.) Nivel de confianza

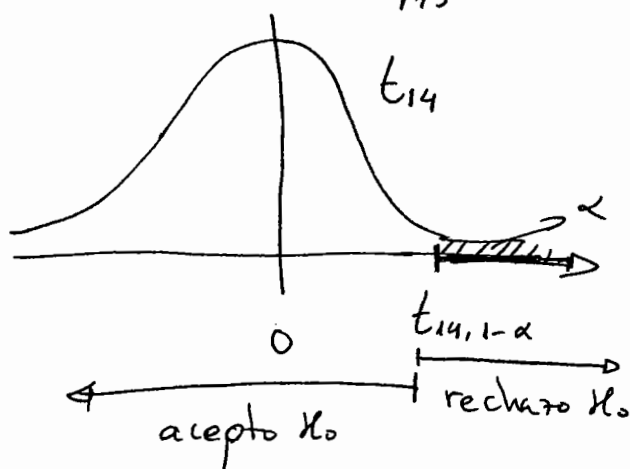
(d) $\begin{cases} H_0: \mu = 40 \\ H_1: \mu > 40 \end{cases}$

Bajo $H_0: \mu = 40$, el estadístico del contraste es:

$$t_0 = \frac{\bar{X} - 40}{\frac{S}{\sqrt{15}}} \sim t_{14}$$

Para nuestra muestra, el valor del estadístico es:

$$t_0 = \frac{\bar{x} - 40}{\frac{S}{\sqrt{15}}} = \frac{45'75 - 40}{\frac{14'20}{\sqrt{15}}} = 1'568$$



$$\alpha = 0'05 \Rightarrow t_{14, 0'95} = 1'76$$

Como $t_0 = 1'568 < t_{14, 0'95} = 1'76 \Rightarrow$ aceptamos H_0 .

Interpretación: Al 95% de confianza no tenemos suficiente evidencia para ~~decir~~ que la ~~media~~ resistencia media es superior a 40.

$$(e) \quad p\text{-valor} = P(t_{14} > t_0) = P(t_{14} > 1'568) \quad (4)$$

Buscando en la ~~tbla~~ ~~de~~ la t-Student observamos

que: $p\text{-valor} \in (0'05, 0'1)$

* Al 90% de confianza $\rightarrow p\text{-valor} < \alpha \Rightarrow$ se rechaza H_0 .

* Al 95% " " $\rightarrow p\text{-valor} > \alpha \Rightarrow$ se acepta H_0 .

* Al 99% " " $\rightarrow p\text{-valor} > \alpha \Rightarrow$ se acepta H_0 .

