EXAMEN TELEMÁTICA

DICIEMBRE 2005

PROBLEMA 1

1 (a) Observar que ambas muestras están ordenadas.

Diseño A: El tamaño de la muestra es 11 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ • $Q_2 = Me = x_{(6)} = 25$ (Elemento situado en 6º lugar)

• $Q_1 = x_{(3)} = 23$

• $Q_3 = x_{(9)} = 26$

• $RIC = Q_3 - Q_1 = 26 - 23 = 3 \Rightarrow 1'5 \times RIC = 4'5$

• $Min\{x_i\} = 22$, $Máx\{x_i\} = 29$

• $Q_1 - 1'5 \cdot RIC = 23 - 4'5 = 18'5$; $Q_3 + 1'5 \cdot RIC = 26 + 4'5 = 30'5$

Diseño B: El tamaño de la muestra es 10 $\Rightarrow$

• $Q_2 = Me = \dfrac{x_{(5)} + x_{(6)}}{2} = \dfrac{21 + 25}{2} = 23$

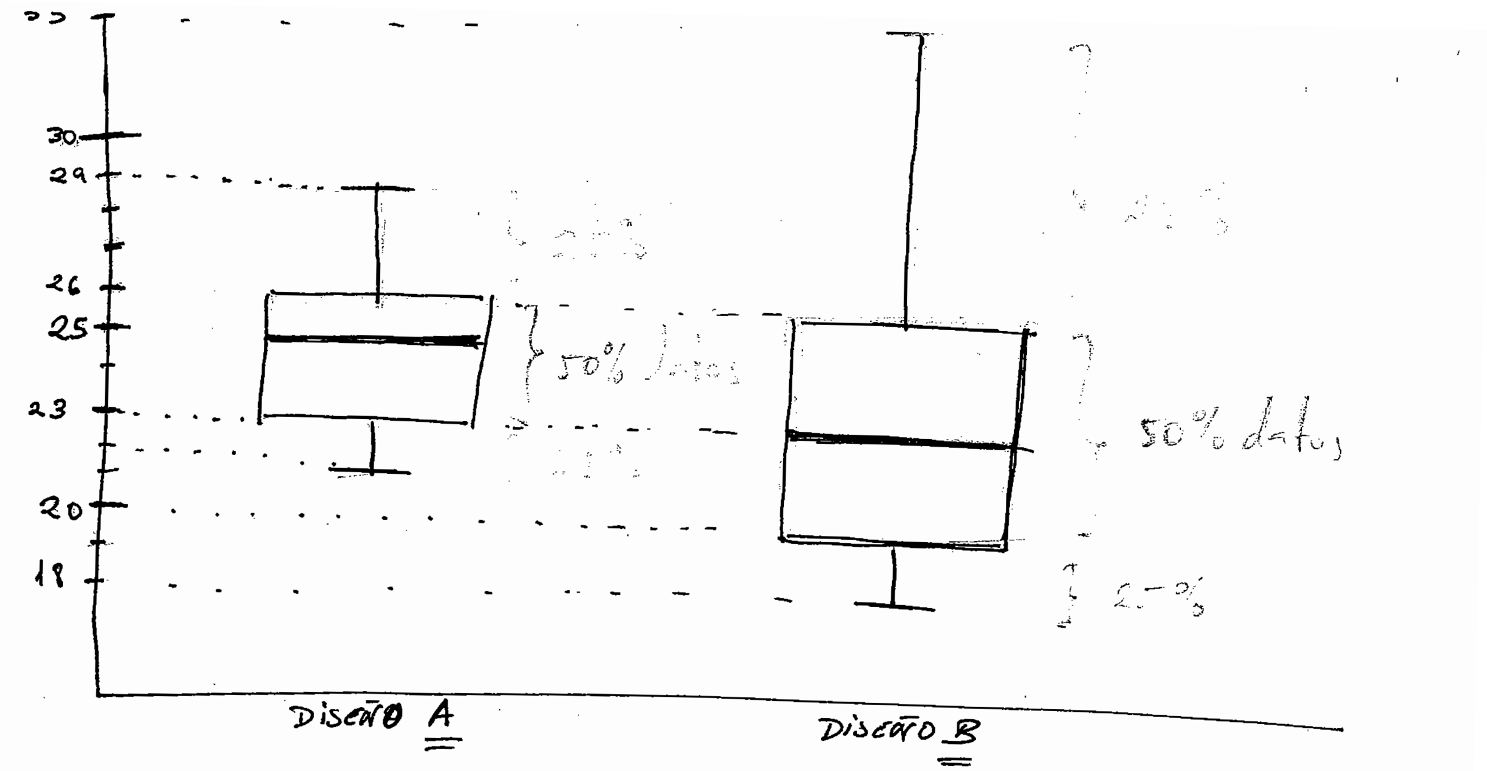
• $Q_1 = x_{(3)} = 20$

• $Q_3 = x_{(8)} = 26$

• $RIC = Q_3 - Q_1 = 26 - 20 = 6 \Rightarrow 1'5 \times RIC = 9$

• $Min\{x_i\} = 18$, $Máx\{x_i\} = 33$

• $Q_1 - 1'5 \cdot RIC = 20 - 9 = 11$; $Q_3 + 1'5 \cdot RIC = 26 + 9 = 34$



Como se observa, la tendencia central (mediana) del Diseño A es superior a la del Diseño B. Además, el Diseño B presenta mayor dispersión que el A (caja mayor longitud). Por último, los datos para el diseño B presentan mayor simetría que los del diseño A.
En ninguna de las dos muestras existen datos atípicos.

(b) Para flujos de corriente altos parece más apropiado el Diseño A puesto que su tendencia central (Mediana) supera a la del Diseño B, ~~y además~~ sus datos están menos dispersos y de hecho el 75% de los datos del Diseño A están por encima de la Mediana de B.

2 X = "Flujo de corriente de un microcircuito de Diseño A"
Y = "Flujo " " " " " " B"

$X \sim N(\mu_A, \sigma_A^2)$, $Y \sim N(\mu_B, \sigma_B^2)$ independientes.

$\mu_A, \sigma_A^2 \to$ desconocidos
$\mu_B, \sigma_B^2 \to$ desconocidos

(a) La construcción detallada se hizo en clase. De forma resumida diremos que al tener varianza desconocida, sabemos que el estadístico que interviene en la ~~construccion~~ construcción del I.C. para μ_A es:

$$\frac{\overline{X} - \mu_A}{\frac{S_A}{\sqrt{n_A}}} \sim t_{n_A - 1}$$ (ver formulario de examen)

Por tanto, el I.C. para μ_A es:

$$\left(\overline{X} \pm t_{n_A - 1, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S_A}{\sqrt{n_A}} \right)$$

Para la muestra seleccionada, se tiene que:

$$\overline{x} = \frac{22 + 22 + \cdots + 28}{11} = 24'818$$

$$s_A^2 = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n_A - 1} = \frac{11}{10} \left(\overline{x^2} - (\overline{x})^2 \right) = 4'56$$

$s_A = 2'13$; $n_A = 11$; $\alpha = 0'05$

$t_{10, 0'975} = 2'23$

Luego el I.C. al 95% para μ_A es:

$$\left(24'818 \pm 2'23 \cdot \frac{2'13}{\sqrt{11}}\right) = (24'818 \pm 1'43) =$$
$$= (23'388 \ , \ 26'248)$$

. Del mismo modo, obtenemos el I.C. al 95% para μ_B:

$$\left(\overline{Y} \pm t_{n_B-1, 1-\alpha/2} \cdot \frac{S_B}{\sqrt{n_B}}\right)$$

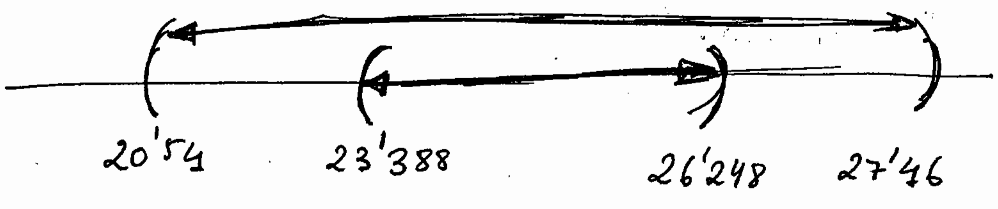
$$\bar{y} = \frac{18+20+\cdots+33}{10} = 24$$

$$S_B^2 = \frac{10}{9}\left(\overline{y^2} - (\bar{y})^2\right) = 23'5$$

$S_B = 4'85$, $n_B = 10$, $\alpha = 0'05$

$t_{9, 0'975} = 2'26$

$$\text{I.C. para } \mu_B = \left(24 \pm 2'26 \cdot \frac{4'85}{\sqrt{10}}\right) = (24 \pm 3'46) =$$
$$= (20'54 \ , \ 27'46).$$



Como ambos intervalos de confianza se cortan; los flujos medios de ambos diseños podrían coincidir, ~~así que no~~ es decir, con los resultados anteriores no podemos afirmar que se cumple $\mu_A \neq \mu_B$.

(b) El error máximo de estimación de la media para el diseño B viene dado por:

$$\cancel{t_{n_A-1,0'975} \cdot \frac{S_A}{\sqrt{n_A}}} \quad t_{n_B-1,0'975} \cdot \frac{S_B}{\sqrt{n_B}}$$

Para la muestra seleccionada el error vale:

$$2'26 \cdot \frac{4'85}{\sqrt{10}} = 3'46.$$

Si queremos reducir el error hasta 0'5 tendremos que usar muchos más microcircuitos en la muestra, así que podremos aproximar la t-Student por una N(0,1):

$$\text{Error\_Estimación} \leq \frac{z_{1-\alpha/2} \cdot S_B}{\sqrt{n_B}} \leq 0'5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_B \geq \left(\frac{1'96 \cdot 4'85}{0'5} \right)^2 = 361'5 \Rightarrow \boxed{n \geq 362}$$

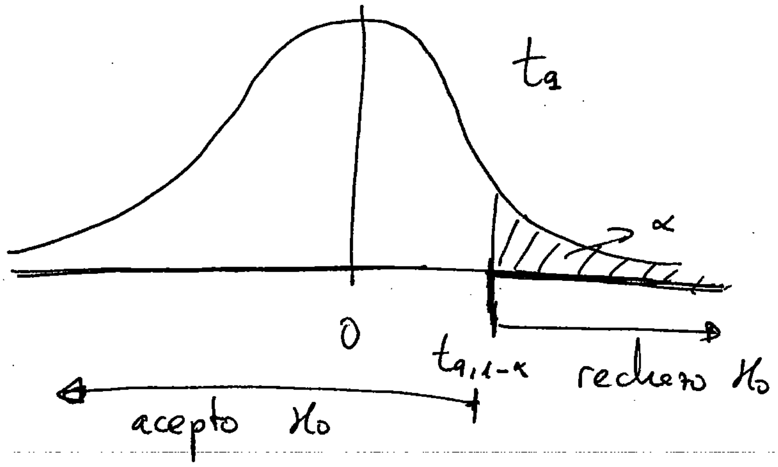
(c) $\begin{cases} H_0: \mu_A = \mu_B \\ H_1: \mu_A > \mu_B \end{cases}$

Como las varianzas de ambos diseños son desconocidas y además distintas (se sospecha por la gran diferencia entre sus estimaciones), el estadístico del contraste será

$$\frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\frac{S_A^2}{n_A} + \frac{S_B^2}{n_B}}} \sim t_k \qquad k = \min\{11-1, 10-1\} = 9$$

Suponiendo H_0 cierta y para la muestra seleccionada se tiene:

$$t_0 = \frac{24'818 - 24}{\sqrt{\frac{4'56}{11} + \frac{23'5}{10}}} = 0'492$$



- Si $\alpha = 0'1$ (90% confianza) $\Rightarrow t_{9,0'9} = 1'38$

Como $t_0 = 0'492 < t_{9,0'9} = 1'38 \Rightarrow$ aceptamos H_0 al 90% y por tanto también al 95% y al 99%.

No podemos afirmar que μ_A sea mayor que μ_B.

PROBLEMA 2

1 · Marginal de X:

$$f_X(-1) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

$$f_X(0) = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$f_X(1) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

$$f_X(x) = 0 \quad \forall x \notin \{-1, 0, 1\}$$

· Marginal de Y:

$$f_Y(-1) = \frac{3}{10}$$

$$f_Y(0) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$f_Y(1) = \frac{3}{10}$$

$$f_Y(y) = 0 \quad \forall y \notin \{-1, 0, 1\}$$

2 No son independientes porque:

$$f_{(X,Y)}(-1,-1) = \frac{1}{10} \neq f_X(-1) \cdot f_Y(-1) = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10}$$

3 Función de distribución de X:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{3}{10} & \text{si } x \in [-1, 0) \\ \frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{7}{10} & \text{si } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$\boxed{4}$ • $E(2X-5Y) = 2E(X) - 5 \cdot E(Y)$.

$E(X) = -1 \cdot \frac{3}{10} + 0 \cdot \frac{4}{10} + 1 \cdot \frac{3}{10} = 0$

$E(Y) = -1 \cdot \frac{3}{10} + 0 \cdot \frac{4}{10} + 1 \cdot \frac{3}{10} = 0$

Luego, $E(2X-5Y) = 2 \cdot 0 - 5 \cdot 0 = 0$.

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$,

$$E(X^2) = (-1)^2 \cdot \frac{3}{10} + 0^2 \cdot \frac{4}{10} + 1^2 \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10} = \boxed{\frac{3}{5}}$$

$\boxed{5}$ • $P(Y>-1 / X>-1) = \frac{P((Y>-1) \cap (X>-1))}{P(X>-1)} =$

$$= \frac{f_{(X,Y)}(0,0) + f_{(X,Y)}(0,1) + f_{(X,Y)}(1,0) + f_{(X,Y)}(1,1)}{f_X(0) + f_X(1)} = \frac{1/5 + 1/10 + 1/10 + 1/10}{4/10 + 3/10} =$$

$$= \frac{5/10}{7/10} = \boxed{\frac{5}{7}}$$

• $P(X=1 / X+Y \leq 0) = \frac{P((X=1) \cap (X+Y \leq 0))}{P(X+Y \leq 0)} =$

$$= \frac{f_{(X,Y)}(1,-1)}{f_{(X,Y)}(-1,-1) + f_{(X,Y)}(-1,0) + f_{(X,Y)}(-1,1) + f(0,-1) + f(0,0) + f(1,-1)} =$$

$$= \frac{1/10}{1/10 + 1/10 + 1/10 + 1/10 + 1/5 + 1/10} = \frac{1/10}{7/10} = \boxed{\frac{1}{7}}$$

PROBLEMA 3

$\boxed{1}$ • A = "La memoria RAM seleccionada proviene de A"
• B = "La " " " " B"

$P(B) = 2 \cdot P(A)$;

$P(A) + P(B) = 1 \iff P(A) + 2P(A) = 1 \Rightarrow P(A) = 1/3$

Luego: $P(A) = 1/3$; $P(B) = 2/3$

• X_A = "Tiempo de vida, en años, de una memoria RAM del fabricante A" $\sim Exp(\lambda_A = 1/3)$

• X_B = "Tiempo de vida, en años, de una memoria RAM del fabricante B" $\sim Exp(\lambda_B = 1/3'5)$

• F = "La memoria RAM seleccionada falla antes del periodo de garantía".

(a) Nos piden $P(F)$

$$P(F) \overset{\text{Th. Probab. Total.}}{=} P(A) \cdot P(F/A) + P(B) \cdot P(F/B)$$

Observar que:

• $P(F/A) = P(X_A \leq 2)$ y $P(F/B) = P(X_B \leq 2)$

• $P(F/A) = P(X_A \leq 2) = F_{X_A}(2) = 1 - e^{-\frac{1}{3} \cdot 2} = 1 - e^{-2/3} = \boxed{0'4866}$

• $P(F/B) = P(X_B \leq 2) = 1 - e^{-\frac{1}{3'5} \cdot 2} = 1 - e^{-\frac{2}{3'5}} = \boxed{0'435}$

Luego:

$$P(F) = \frac{1}{3} \cdot 0'486 + \frac{2}{3} \cdot 0'435 = \boxed{0'452}$$

(b) Nos piden $P(A/F)$.

Th. Bayes

$$P(A/F) = \frac{P(F/A) \cdot P(A)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0'486}{0'452} = \boxed{0'358}$$

(c) Y = "Nº de memorias RAM que superan el periodo de garantía" $\sim B(n = 100,\ p = P(\bar{F}) = 0'548)$

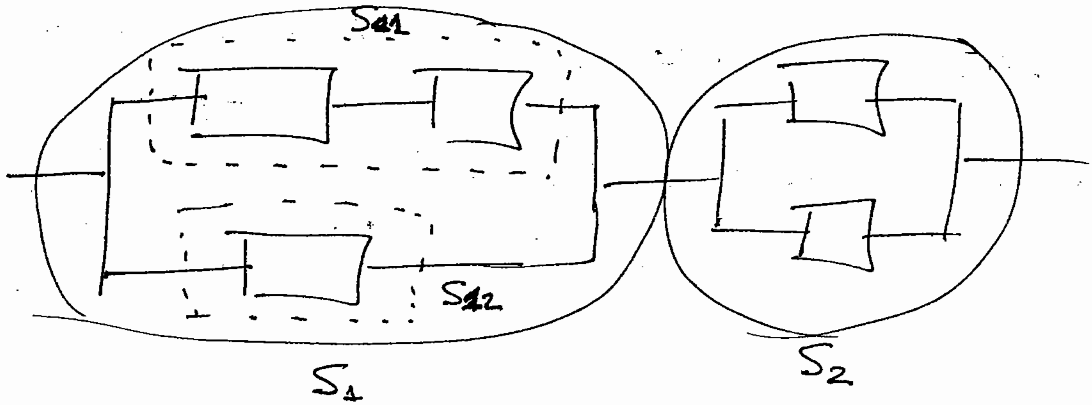
Nos piden $P(Y \geq 90)$

$$\left.\begin{array}{l} n = 100 > 30 \\ np(1-p) = 100 \cdot 0'548 \cdot 0'452 = 24'77 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ Podemos aproximar la Binomial por una Normal, $W \sim N(54'8, 24'7$

$$\bullet\ P(Y \geq 90) \simeq P(W \geq 89'5) = P\left(\frac{W - 54'8}{\sqrt{24'77}} \geq \frac{89'5 - 54'8}{\sqrt{24'77}}\right)$$

$$= P(Z \geq 6'97) \simeq 0$$

$\boxed{2}$ ~~P("Funcione el Circuito") = P["Funcione S1" ∩ "Funcione S2"~~



P("Funcione el Circuito") = P("Funcione S_1" $\cap$ "Funcione S_2") =

= P("Funcione S_1") . P("Funcione S_2") ;

↳ INDEP.

- P("Funcione S_2") = 1 − P("Falle S_2") = 1 − ("Falle C_4" $\cap$ "Falle C_5")

  = $1 - 0'2 . 0'2 = \boxed{0'96}$

- P("Funcione S_1") = 1 − P("Falle S_1") = $1 - 0'038 = \boxed{0'962}$

- P("Falle S_1") = P("Falle S_{11}" $\cap$ "Falle S_{12}") =

  = P("Falle S_{11}") . $0'2$ = $(1 - 0'9 . 0'9) . 0'2 = 0'19 . 0'2$

  = $0'038$

. P("Funcione Circuito") = $0'962 . 0'96 = \boxed{0'92352}$

PROBLEMA 4

X = "Longitud de una pieza selec. al azar" $\sim N(\mu_L = 20, \sigma_L = 0'05)$

Y = "Anchura " " " " " $\sim N(\mu_A = ?, \sigma_A = ?)$

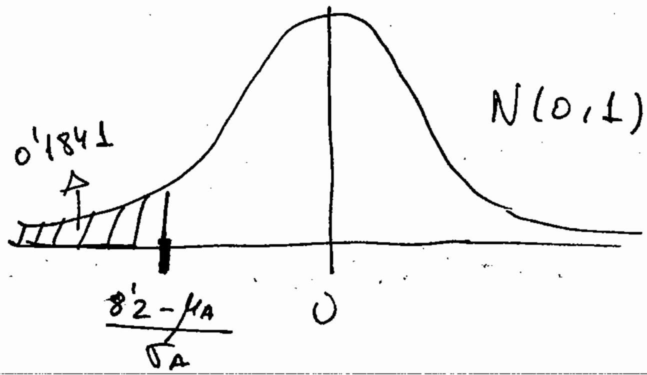
Se sabe que:

- $P(Y < 8'2) = 0'1841$
- $P(Y > 13) = 0'068$

$\boxed{3}$ Determinar μ_A y σ_A: Para ello tipificaremos en las dos expresiones anteriores:

- $P(Y < 8'2) = 0'1841 \Leftrightarrow P\left(\frac{Y-\mu_A}{\sigma_A} < \frac{8'2-\mu_A}{\sigma_A}\right) = 0'1841$

$\Leftrightarrow P\left(Z < \frac{8'2-\mu_A}{\sigma_A}\right) = 0'1841.$



luego "$\frac{8'2-\mu_A}{\sigma_A}$" es el pto que deja a su izquierda un área de 0'1841 para una $N(0,1) \Rightarrow \boxed{\frac{8'2-\mu_A}{\sigma_A} = -0'90}$

- $P(Y>13) = 0'0668 \Leftrightarrow P\left(\underbrace{\frac{Y-\mu_A}{\sigma_A}}_{Z \sim N(0,1)} > \frac{13-\mu_A}{\sigma_A}\right) = 0'0668$

$\Rightarrow$ "$\frac{13-\mu_A}{\sigma_A}$" es el pto que deja a su derecha un área de 0'0668 $\Rightarrow \boxed{\frac{13-\mu_A}{\sigma_A} = 1'5}$

Resolviendo el sistema:
$$\left\{\begin{array}{l} \frac{8'2-\mu_A}{\sigma_A} = -0'90 \\ \frac{13-\mu_A}{\sigma_A} = 1'5 \end{array}\right.$$

obtenemos que $\boxed{\mu_A = 10, \ \sigma_A = 2}$

$\boxed{A}$ $P(X \notin [19'9, 20'1]) = 1 - P(19'9 \leq X \leq 20'1)$.

$$P(19'9 \leq X \leq 20'1) = P\left(\frac{19'9-20}{0'05} \leq Z \leq \frac{20'1-20}{0'05}\right) =$$

$$= P(-2 \leq Z \leq 2) = 0'9772 - (1 - 0'9772) = 0'9544$$

$\boxed{B}$ Luego el % de piezas que no cumplen las especificaciones de longitud es de $(1-0'9544) \times 100\% =$

$= (0'0456) \times 100\% = 4'56\%$

$\boxed{2}$ Supongamos que X no es Normal.
Usaremos la desigualdad de Tchebychev:

$$P(|X-\mu_X| > K.\sigma_X) \leq 1/K^2 \iff$$

$$\iff P(|X-\mu_X| < K.\sigma_X) > 1 - 1/K^2 \iff$$

$$\iff P(\underbrace{\mu_X - K.\sigma_X}_{19'9} \leq X < \underbrace{\mu_X + K\sigma_X}_{20'1}) > 1 - 1/K^2$$

- $\mu_X - K.\sigma_X = 19'9 \Rightarrow 20 - K.0'05 = 19'9 \Rightarrow \boxed{K=2}$
- $\mu_X + K.\sigma_X = 20'1 \Rightarrow 20 + K.0'05 = 20'1 \Rightarrow K = 2$

Luego, $P(X \notin [19'9, 20'1]) = P(|X-20| > 2.0'05) \leq \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

El % de defectuosos será a lo sumo del 25%.

La gran diferencia con respecto al apartado anterior se debe a que en este segundo caso <u>no</u> conocemos la distribución de X, así que la cota obtenida debe valer para <u>todas</u> las distribuciones.