

TELEMÁTICA - DIC 04 -

PROBLEMA 1

$x \rightarrow$ cantidad precipitación
 $y \rightarrow$ contaminación eliminada

Recta ajustada $y = 0.25 + 0.01x$

1) Sabemos que la ecuación de la recta es:

$$y - \bar{y} = \frac{S_{xy}}{S_x^2} (x - \bar{x})$$

Luego $\frac{S_{xy}}{S_x^2} = 0.01 \Rightarrow \frac{S_{xy}}{4} = 0.01 \Rightarrow$

$$S_{xy} = 0.04$$

2) La correlación viene dada por:

$$r_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y}$$

Luego el signo de la correlación será el signo de la covarianza S_{xy} . En este caso signo positivo. Por tanto, la relación lineal existente entre "x" e "y" es de tipo creciente, es decir, a mayor precipitación mayor contaminación eliminada.

3) Nos piden $\bar{y}$. Sabemos que la recta ajustada por mínimos cuadrados pasa por el pto $(\bar{x}, \bar{y})$. Luego:

$$\bar{y} = 0.25 + 0.01 \cdot \bar{x} = 0.25 + 0.01 \cdot 40 = 0.65$$

PROBLEMA 2

I llamemos:

$A =$ "El signo transmitido es un cero" (y se hace 5 veces)"

$B =$ "El signo transmitido es un uno" (y se hace 5 veces)"

$C =$ "El signo ~~se~~ se recibe correctamente".

1) llamemos $X =$ "Nº de veces que se recibe el signo cero al transmitirlo 5 veces". $X \sim B(n=5, p=0.7)$

$Y =$ "Nº de veces que se recibe el signo uno al transmitirlo 5 veces". $Y \sim B(n=5, p=0.3)$.

$$\begin{aligned} \bullet P(C/A) &= P(X \geq 3) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) = \\ &= \binom{5}{3} \cdot (0.7)^3 \cdot (0.3)^2 + \binom{5}{4} \cdot (0.7)^4 \cdot 0.3 + \binom{5}{5} \cdot (0.7)^5 \cdot (0.3)^0 = \\ &= 10 \cdot (0.7)^3 \cdot (0.3)^2 + 5 \cdot (0.7)^4 \cdot 0.3 + (0.7)^5 = 0.837 \end{aligned}$$

$$\bullet P(C/B) = P(Y \geq 3) = 0.837$$

La probabilidad que nos piden es ~~0.837~~

$$\begin{aligned} \blacksquare P(C) &= P(A) \cdot P(C/A) + P(B) \cdot P(C/B) = \\ &= x \cdot 0.837 + (1-x) \cdot 0.837 = \boxed{0.837} \end{aligned}$$

2) Sea $W =$ "Nº de signos, entre los 100, que se interpretan correctamente". $W \sim B(n=100, p=0.837)$.

Nos piden $P(W \geq 75)$.

(2)

Como $n > 30$ y $n \cdot p \cdot (1-p) = 100 \cdot 0.837 \cdot 0.163 = 13.64 > 5$
 $\Rightarrow$ podemos aproximar la Binomial por una Normal,
 $W \simeq V$ con $V \sim N(\mu = n \cdot p = 83.7, \sigma^2 = n p (1-p) = 13.64)$

$$P(W \geq 75) \simeq P(V \geq 74.5) = P\left(Z \geq \frac{74.5 - 83.7}{\sqrt{13.64}}\right) =$$

$$= P(Z \geq -2.5) = \boxed{0.9938}$$

II $p =$ "proporción de piezas defectuosas" $= 0.05$
 ~~$X =$ "número de piezas defectuosas"~~
 $X = \begin{cases} 0 & \text{si pieza defectuosa} \\ 1 & \text{si pieza aceptable} \end{cases}$

$(X_1, X_2, \dots, X_{100})$ m.a.s. de X .

Consideremos $\hat{P} = \frac{X_1 + \dots + X_{100}}{100}$ proporción muestral.

Nos piden $P(\hat{P} > 0.1)$

Sabemos que $\hat{P} \simeq N(\mu = p, \sigma^2 = \frac{p(1-p)}{n}) = N(0.05, 0.000475)$

$$P(\hat{P} > 0.1) \simeq P\left(\frac{\hat{P} - 0.05}{\sqrt{0.000475}} > \frac{0.1 - 0.05}{\sqrt{0.000475}}\right) =$$

$$= P(Z > 2.38) = 1 - 0.9913 = \boxed{0.0087}$$

Nota: Este problema se puede resolver usando la distribución Binomial.

2) Como acabamos de ver en el apartado anterior, es MUY IMPROBABLE que en un día se fabriquen más de 10 piezas defectuosas, así que si un día resultan 11 defectuosas podemos sospechar que la máquina se ha DESAJUSTADO.

PROBLEMA 3

(I) $f(x) = \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{4}}$ si $x > 0$

$X =$ "Duración de un dispositivo" $\sim \text{Exp}(\lambda = \frac{1}{4})$.

1) $P(3 < X < 5) = P(X < 5) - P(X < 3) = F_X(5) - F_X(3) = (1 - e^{-\frac{1}{4} \cdot 5}) - (1 - e^{-\frac{1}{4} \cdot 3}) = 0.72 - 0.53 = \underline{0.19}$

2) $P(X < 5 / X > 2) = P(X < 3) = F_X(3) = 1 - e^{-\frac{1}{4} \cdot 3} = 0.53$
 $\hookrightarrow$ FACTA MEMORIA

(II) ~~P~~ rango $(X_1) = \text{rango}(X_2) = \{0, 1\}$

$P(X_1 = 1) = \frac{2}{5} \Rightarrow P(X_1 = 0) = \frac{3}{5}$

$P(X_2 = 0 / X_1 = 0) = \frac{1}{2} \Rightarrow P(X_2 = 1 / X_1 = 0) = \frac{1}{2}$

$P(X_2 = 0 / X_1 = 1) = \frac{3}{4} \Rightarrow P(X_2 = 1 / X_1 = 1) = \frac{1}{4}$

1) f. p. p. de X_1 :

$$\begin{cases} f_{X_1}(0) = P(X_1 = 0) = \frac{3}{5} \\ f_{X_1}(1) = P(X_1 = 1) = \frac{2}{5} \\ f_{X_1}(x) = 0 \quad \forall x \notin \{0, 1\} \end{cases}$$

(3)

• f.p.p. de $(X_2 / X_1 = 0)$:

$$\begin{cases} f_{X_2/X_1=0}(0) = P(X_2=0/X_1=0) = \frac{1}{2} \\ f_{X_2/X_1=0}(1) = P(X_2=1/X_1=0) = \frac{1}{2} \\ f_{X_2/X_1=0}(x) = 0 \quad \forall x \notin \{0,1\} \end{cases}$$

• f.p.p. de $(X_2 / X_1 = 1)$:

$$\begin{cases} f_{X_2/X_1=1}(0) = P(X_2=0/X_1=1) = \frac{3}{4} \\ f_{X_2/X_1=1}(1) = P(X_2=1/X_1=1) = \frac{1}{4} \\ f_{X_2/X_1=1}(x) = P(X_2=x/X_1=1) = 0 \quad \forall x \notin \{0,1\} \end{cases}$$

2) f.p.p. de (X_1, X_2) :

$$\begin{cases} f_{(X_1, X_2)}(0,0) = P(X_1=0, X_2=0) = P(X_1=0) \cdot P(X_2=0/X_1=0) = \\ \quad = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10} \\ f_{(X_1, X_2)}(0,1) = P(X_1=0, X_2=1) = P(X_1=0) \cdot P(X_2=1/X_1=0) = \\ \quad = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10} \\ f_{(X_1, X_2)}(1,0) = P(X_1=1, X_2=0) = P(X_1=1) \cdot P(X_2=0/X_1=1) = \\ \quad = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10} \\ f_{(X_1, X_2)}(1,1) = P(X_1=1, X_2=1) = P(X_1=1) \cdot P(X_2=1/X_1=1) = \\ \quad = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10} \\ f_{(X_1, X_2)}(x,y) = 0 \text{ en el resto} \end{cases}$$

3) f.p.p. de X_2 :

$$\begin{aligned} \cdot f_{X_2}(0) &= P(X_2=0) = \sum_{(x_1, x_2)} f_{(x_1, x_2)}(0,0) + \sum_{(x_1, x_2)} f_{(x_1, x_2)}(1,0) = \\ &= \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \left[\frac{3}{5} \right] \end{aligned}$$

$$\cdot f_{X_2}(1) = P(X_2=1) = \sum_{(x_1, x_2)} f_{(x_1, x_2)}(0,1) + \sum_{(x_1, x_2)} f_{(x_1, x_2)}(1,1) = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \left[\frac{2}{5} \right]$$

PROBLEMA 4

X = "Cantidad de impurezas en el aire"

$$X \sim N(\mu, \sigma^2 = (0.09)^2)$$

1) $n=5$, $\bar{x} = 1.04$.

$$\text{I.C. para } \mu = \left(\bar{x} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.975} = 1.96$$

$$\text{I.C.} = \left(1.04 \pm 1.96 \cdot \frac{0.09}{\sqrt{5}} \right) = (1.04 \pm 0.079) = (0.961, 1.119)$$

Interpretación: La cantidad media de impurezas (μ) muy probablemente sea un valor en el intervalo $(0.961, 1.119)$.

2) El margen de error del apartado anterior es de 0.079.

Si queremos reducirlo a la mitad, 0.0395, se tiene:

$$1.96 \cdot \frac{0.09}{\sqrt{n}} \leq 0.0395 \Leftrightarrow n \geq \left(\frac{1.96 \cdot 0.09}{0.0395} \right)^2 = 19.94$$

$$\Rightarrow \boxed{n \geq 20}$$

(4)

$$3) \quad \bar{x} = 1'04, \quad S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{(0'09)^2 + (0'06)^2 + (0'08)^2 + (0'04)^2 + (0'11)^2}{4} = 0'00795$$

$$S = \sqrt{0'00795} = 0'089$$

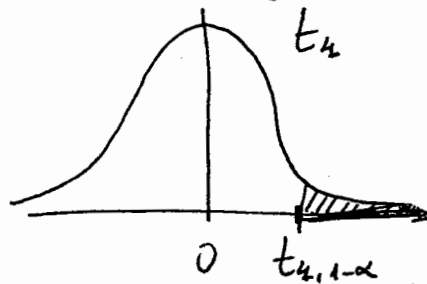
$$(a) \quad I.C. = \left(\bar{x} \pm t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$$

$$t_{4, 0'975} = 2'78$$

$$I.C. = \left(1'04 \pm 2'78 \cdot \frac{0'089}{\sqrt{5}} \right) = (1'04 \pm 0'11) = (0'93, 1'15)$$

Se obtiene un I.C. $\frac{1}{2}$ más amplio al disponer de ~~la~~ la desviación típica muestral en lugar de la poblacional.

$$(b) \quad \begin{cases} H_0: \mu = 1 \\ H_1: \mu > 1 \end{cases}$$



Bajo $H_0: \mu = 1$, el estadístico del contraste es:

$$t_0 = \frac{1'04 - 1}{\frac{0'089}{\sqrt{5}}} = 1'005$$

$$\alpha = 0'05 \Rightarrow t_{4, 1-\alpha} = t_{4, 0'95} = 2'13$$

Como $t_0 = 1'005 < t_{4, 0'95} \Rightarrow$ aceptamos $H_0 \Rightarrow$ La cantidad promedio de impurezas no es significativamente mayor de 1.

