



**Duración: 3 horas. Empezar cada problema en un folio nuevo. Indicar nombre y apellidos en todas las hojas.**

### Problema 1

Con el fin de determinar la cantidad de contaminación eliminada del aire, a partir de la cantidad de precipitación pluvial, se realizaron las correspondientes mediciones en 15 días de lluvia. La media y la varianza de las precipitaciones recogidas durante los 15 días de lluvia son 40 y 4, respectivamente, y la recta ajustada por mínimos cuadrados para los datos es:

$$y = 0.25 + 0.01x$$

1. Calcular la covarianza entre la cantidad de lluvia y la cantidad de contaminación eliminada **(0.5 ptos)**
2. ¿Cuál es el signo de la correlación entre la cantidad de lluvia y la cantidad de contaminación eliminada? Justifica tu respuesta. ¿Qué interpretación tiene dicho signo? **(0.25 ptos)**
3. ¿Cuánto vale la media aritmética de las cantidades de contaminación eliminadas durante los 15 días de lluvia observados? **(0.25 ptos)**

### Problema 2

**I.-** Por un canal de comunicación se transmiten mensajes compuestos por dos signos: *cero* y *uno*. Debido a las perturbaciones en la transmisión, cada signo se recibe correctamente con probabilidad 0.7. Para aumentar la probabilidad de una recepción correcta, cada signo se transmite cinco veces, interpretándose, por parte del receptor, que el signo transmitido es el más frecuente entre los cinco signos recibidos.

1. Hallar la probabilidad de que un signo transmitido por este método sea interpretado correctamente por el receptor. **(0.75 ptos)**
2. Si se transmite un mensaje compuesto por 100 signos por este método. Hallar la probabilidad de que al menos el 75% de los signos sean interpretados correctamente. **(0.75 ptos)**

**II.-** En condiciones idóneas, una máquina produce piezas con una tasa de defectuosas del 5%. Para controlar que la máquina sigue bien ajustada, se escogen al azar cada día 100 piezas de la producción y se determina si la pieza es aceptable o defectuosa.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que, si la máquina está bien ajustada, haya más del 10% de piezas defectuosas en una de esas muestras? **(0.75 ptos)**
2. Si un día 11 piezas resultan defectuosas, ¿qué conclusiones sacarías sobre el funcionamiento de la máquina? **(0.25 ptos)**

### Problema 3

I.- La vida útil (en años) de un determinado dispositivo electrónico viene dada por la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{4}} \text{ si } x > 0$$

1. ¿Cuál es la probabilidad de que un dispositivo dure entre 3 y 5 años? **(0.5 ptos)**
2. ¿Y de que dure menos de cinco años si a los dos años aún funcionaba? **(0.5 ptos)**

II.- Consideremos dos variables aleatorias  $X_1$  y  $X_2$ , que sólo pueden tomar los valores 0 y 1. Sabemos que  $X_1$  toma el valor 1 con probabilidad  $\frac{2}{5}$ . Además, la distribución de la v.a.  $X_2$  depende de la distribución de  $X_1$  de la manera siguiente:

- Si  $X_1$  es igual a 0,  $X_2$  toma el valor 0 con probabilidad  $\frac{1}{2}$ .
- Si  $X_1$  es igual a 1,  $X_2$  toma el valor 0 con probabilidad  $\frac{3}{4}$ .

1. Escribir la función puntual de probabilidad de  $X_1$ , así como la función puntual de probabilidad de  $X_2$  condicionada a  $X_1 = 0$  y la función puntual de probabilidad de  $X_2$  condicionada a  $X_1 = 1$ . **(0.5 ptos)**
2. Deducir la función puntual de probabilidad conjunta de  $(X_1, X_2)$ . **(0.5 ptos)**
3. ¿Cuál es la función puntual de probabilidad de  $X_2$ ? **(0.5 ptos)**

### Problema 4

En un laboratorio se investiga la cantidad (en partes por millón, ppm.) de impurezas que hay en el aire líquido. La distribución de los valores obtenidos es aproximadamente normal de media desconocida. Por un estudio preliminar, la desviación típica poblacional puede fijarse en 0.09 ppm.

1. Se decide tomar 5 mediciones y obtenemos una media muestral de 1.04 ppm. Construir de manera detallada un intervalo de confianza para la media poblacional al 95% de confianza. Interpretar el resultado obtenido. **(0.75 ptos)**
2. Calcular el tamaño muestral para conseguir, con una confianza del 95%, reducir a la mitad el margen de error del intervalo obtenido en el apartado anterior. **(0.5 ptos)**
3. Supongamos que el investigador responsable del experimento desconfía del estudio preliminar por lo que decide estimar la desviación típica poblacional a partir de la muestra. Los resultados obtenidos para las 5 mediciones de la cantidad de contaminación son:

0.95 0.98 1.12 1.0 1.15

- (a) Determinar un intervalo de confianza al 95% para la cantidad promedio de contaminación del aire líquido. Comentar las conclusiones que se obtienen al comparar este intervalo con el obtenido en el apartado (2) anterior. **(0.5 ptos)**
- (b) ¿Podemos considerar que la cantidad promedio de contaminación es significativamente mayor de 1 ppm? Plantear y llevar a cabo el contraste correspondiente usando un nivel de confianza del 95%. **(0.75 ptos)**