Tema 7. Contrastes de Hipótesis

7.1. Conceptos básicos

Uno de los problemas comunes en inferencia consiste en contrastar una hipótesis estadística.

Ejemplo: El fabricante de un determinado tipo de piezas asegura que la resistencia promedio de sus piezas es de 5 Newton. ¿Podemos desmentir su afirmación?.

La forma de plantear el contraste del ejemplo es la siguiente:

$$\begin{cases} H_0: & \mu = 5 \\ H_1: & \mu \neq 5 \end{cases}$$

donde μ representa la resistencia promedio de las piezas.

Evidentemente, para tomar una decisión al respecto (desmentir o no la afirmación) tendremos que basarnos en los datos de una muestra. Pero, ¿cómo hacerlo?

Parece lógico establecer una regla del siguiente tipo: Si para una muestra de piezas se obtiene una resistencia promedio (media aritmética) que difiere mucho de 5, entonces concluiremos que el fabricante miente; en caso contrario, nos creeremos su afirmación.

Sin embargo, nos encontramos con un problema, ¿cuándo se considera que la media de una muestra "difiere mucho" del valor $\mu = 5$? ¿$\overline{x} = 4.5$ difiere mucho de 5? Para responder a esta cuestión debemos hacer uso de la Teoría de Probabilidades. Veamos cómo formalizar estadísticamente la idea anterior.

Hipótesis nula e hipótesis alternativa

En todo contrastes de hipótesis se plantea una hipótesis nula (H_0) y una hipótesis alternativa (H_1).

Definición: Llamaremos hipótesis nula (H_0) a la hipótesis que se supone cierta de partida, y llamaremos hipótesis alternativa (H_1) a la que reemplazará a la hipótesis nula cuando ésta es rechazada.

Debemos tener en cuenta que, a la hora de plantear un contraste, siempre existe una hipótesis que se supone cierta (hipótesis H_0), bien por experiencias pasadas o bien por interés. En el ejemplo que estamos manejando, se supone que el fabricante está en lo cierto, es decir, que la resistencia promedio de las piezas es $\mu = 5$.

Objetivo: En base a los datos de una muestra, debemos decidir si aceptamos la hipótesis H_0 como verdadera o si por el contrario debe ser rechazada.

Por tanto, la realización de un contraste de hipótesis **no consiste en** dicidir cuál de las dos hipótesis (H_0 ó H_1) es más creible, sino en decidir si la muestra proporciona o no suficiente evidencia para descartar H_0.

Como ejemplo ilustrativo que muestra la correcta intrepretación de un contraste de hipótesis así como la diferencia entre las hipótesis H_0 y H_1, podemos usar el siguiente: En un juicio, "el acusado siempre es inocente salvo que se demuestre lo contrario":

$$\begin{cases} H_0: & \text{El acusado es inocente} \\ H_1: & \text{El acusado es culpable} \end{cases}$$

Mientras no tengamos suficiente evidencia para aceptar H_1 tendremos que creernos que H_0 es cierta.

Ejemplo: Si en el contraste

$$\begin{cases} H_0: & \mu = 5 \\ H_1: & \mu \neq 5 \end{cases}$$

aceptamos H_0, sólo podemos decir que **no tenemos suficiente evidencia para asegurar que el fabricante nos engaña,** así que debemos creer su afirmación $\mu = 5$ (puede que nos engañe o puede que no), mientras que si aceptamos H_1, **estaremos bastante seguros de que el fabricante nos engaña,** $\mu \neq 5$.

Por tanto:

- Se "acepta H_0" si los resultados proporcionados por la muestra no contradicen la suposición de H_0.
- Se "rechaza H_0" si los resultados proporcionados por la muestra son *poco probables* bajo la suposición de H_0.

Decisiones y Tipos de Error

Cuando llevamos a cabo un contraste de hipótesis sólo existen **dos decisiones posibles:**

- Aceptar H_0, (y por tanto rechazar H_1).
- Rechazar H_0, (y por tanto aceptar H_1).

Como ya se ha indicado, la decisión a tomar se basa en los datos de una muestra. Ahora bien, cuando tomamos la decisión, **podemos cometer dos errores:**

- Rechazar H_0 cuando realmente es cierta (*Error Tipo I* $\rightarrow$ ¡¡Muy peligroso!!)

$$P\left(\textit{Error Tipo I}\right) = P\left(\text{Rechazar } H_0 \middle|\, H_0 \text{ es cierta}\right) = \alpha$$

- Aceptar H_0 cuando realmente es falsa (*Error Tipo II* $\rightarrow$ No tan peligroso)

$$P\left(\textit{Error Tipo II}\right) = P\left(\text{Aceptar } H_0 \middle|\, H_0 \text{ es falsa}\right) = \beta$$

Evidentemente, lo ideal sería que tanto α como β fuesen nulos (no se comete error), o al menos, que ambos valores fueran muy pequeños. Sin embargo, no se pueden disminuir ambos errores simultáneamente, así que debemos controlar el error más importante, el *Error Tipo I.*

Por tanto, fijaremos de antemano el valor de α (nivel de significación), el cual deberá ser un valor pequeño ($\alpha = 0.1$, $\alpha = 0.05$, $\alpha = 0.01$).

Pasos para la construcción de un contraste

1. Identificar el parámetro de interés ($\mu \rightarrow$ media poblacional)
2. Establecer las hipótesis H_0 y H_1.
3. Fijar un nivel de significación α
4. Determinar el estadístico del contraste (igual que en la construcción del intervalo de confianza)

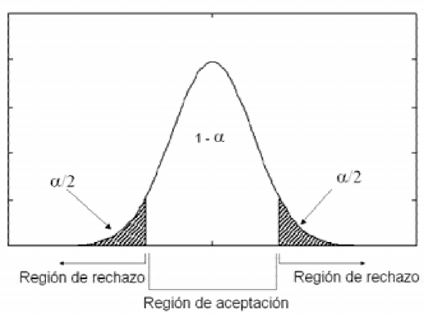
5. Establecer las regiones de aceptación y rechazo
6. Calcular el valor que toma el estadístico del contraste para la muestra seleccionada.
7. Decidir si debe o no rechazarse H_0 e interpretar la decisión tomada.

Nota: Se denomina región de aceptación a la región que conduce a la aceptación de H_0 y región de rechazo a la región que conduce al rechazo de H_0.

La determinación de las regiones de aceptación y rechazo dependen de cómo se establezca la hipótesis alternativa, según lo siguiente:

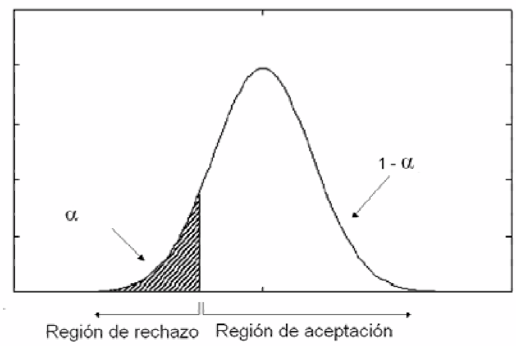
- Test bilateral o de dos colas:

$$\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$



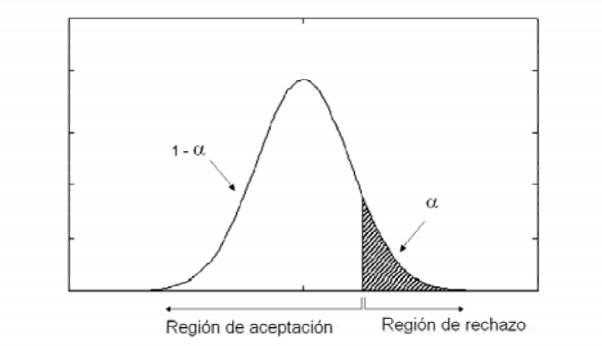
- Test unilateral con cola a la izquierda:

$$\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu < \mu_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0: & \mu \geq \mu_0 \\ H_1: & \mu < \mu_0 \end{cases}$$



- Test unilateral con cola a la derecha:

$$\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu > \mu_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0: & \mu \leq \mu_0 \\ H_1: & \mu > \mu_0 \end{cases}$$



7.2. Contraste bilateral para la media poblacional

Denotemos por X a la variable poblacional en estudio, $\mu = E(X)$, $\sigma^2 = Var(X)$. Veamos cómo llevar a cabo el contraste bilateral:

$$\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

Para ello, distinguiremos dos casos: 1) varianza poblacional σ^2 conocida; 2) varianza poblacional σ^2 desconocida.

Varianza poblacional conocida

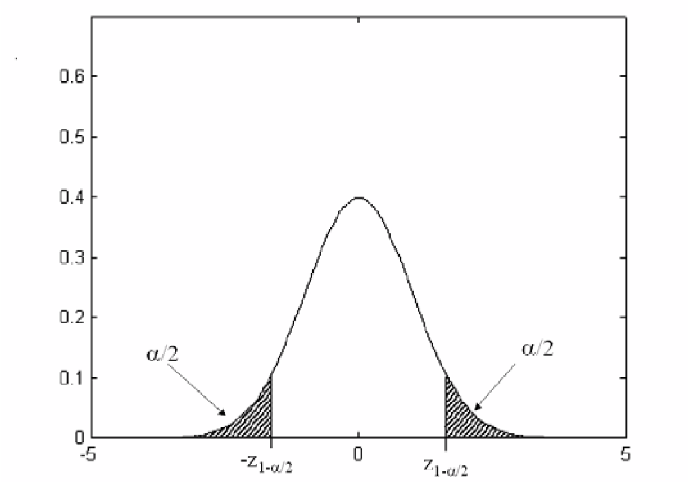
En este caso, como σ^2 es conocida, sabemos que el estadístico usado en los intervalos de confianza es:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \begin{cases} \text{Exacta si } X \sim N(\mu, \sigma) \\ \\ \text{Aproximada si } X \text{ no Normal y } n \geq 30 \end{cases}$$

Si suponemos que H_0 es cierta ($\mu = \mu_0$), el **estadístico del contraste** es:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Por tanto, las **regiones de aceptación y rechazo** son las siguientes:



Criterio de decisión:

- Si $z_0 = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \in [-z_{1-\frac{\alpha}{2}}, z_{1-\frac{\alpha}{2}}] \Rightarrow$ Se acepta H_0.
- Si $z_0 = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \notin [-z_{1-\frac{\alpha}{2}}, z_{1-\frac{\alpha}{2}}] \Rightarrow$ Se rechaza H_0.

Varianza poblacional desconocida

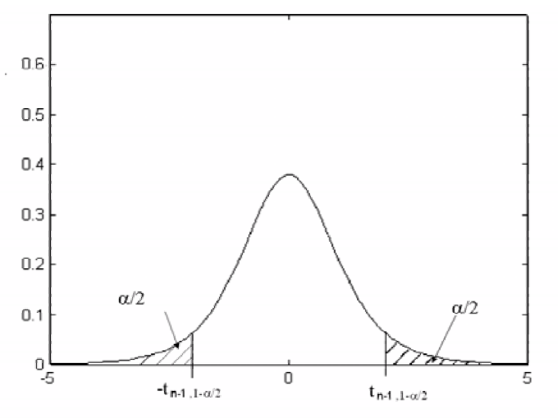
En este caso, como σ^2 es desconocida, sabemos que el estadístico usado en los intervalos de confianza es:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim \begin{cases} \bullet\ t_{n-1} \text{ si } X \sim N(\mu, \sigma) \\ \bullet\ t_{n-1} \text{ (aprox.) si } X \text{ no difiere mucho de la Normal} \\ \bullet\ t_{n-1} \text{ (aprox.) si } X \text{ no Normal y } n \geq 30 \end{cases}$$

Si suponemos que H_0 es cierta ($\mu = \mu_0$), el **estadístico del contraste** es:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim \begin{cases} \bullet\ t_{n-1} \text{ si } X \sim N(\mu, \sigma) \\ \bullet\ t_{n-1} \text{ (aprox.) si } X \text{ no difiere mucho de la Normal} \\ \bullet\ t_{n-1} \text{ (aprox.) si } X \text{ no Normal y } n \geq 30 \end{cases}$$

Por tanto, las **regiones de aceptación y rechazo** son las siguientes:



Criterio de decisión:

- Si $t_0 = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \in [-t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}, t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}] \Rightarrow$ Se acepta H_0.
- Si $t_0 = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \notin [-t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}, t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}] \Rightarrow$ Se rechaza H_0.

7.3. Contrastes unilateral con cola a la izquierda para la media poblacional

Denotemos por X a la variable poblacional en estudio, $\mu = E(X)$, $\sigma^2 = Var(X)$. Veamos cómo llevar a cabo el contraste bilateral:

$$\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu < \mu_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0: & \mu \geq \mu_0 \\ H_1: & \mu < \mu_0 \end{cases}$$

Para ello, distinguiremos dos casos: 1) varianza poblacional σ^2 conocida; 2) varianza poblacional σ^2 desconocida.

Varianza poblacional conocida

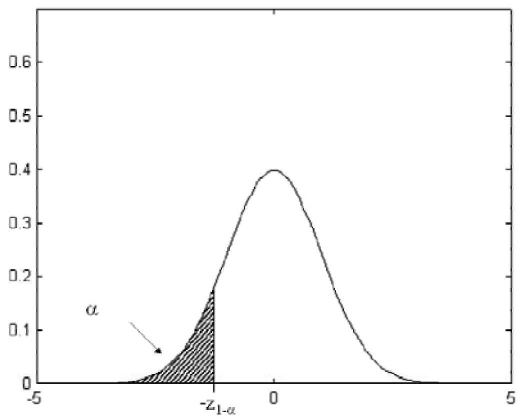
En este caso, como σ^2 es conocida, sabemos que el estadístico usado en los intervalos de confianza es:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \begin{cases} \text{Exacta si } X \sim N(\mu, \sigma) \\ \\ \text{Aproximada si } X \text{ no Normal y } n \geq 30 \end{cases}$$

Si suponemos que H_0 es cierta ($\mu = \mu_0$), el **estadístico del contraste** es:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Por tanto, las **regiones de aceptación y rechazo** son las siguientes:



Criterio de decisión:

- Si $z_0 = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq -z_{1-\alpha} \Rightarrow$ Se acepta H_0.
- Si $z_0 = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_{1-\alpha} \Rightarrow$ Se rechaza H_0.

Varianza poblacional desconocida

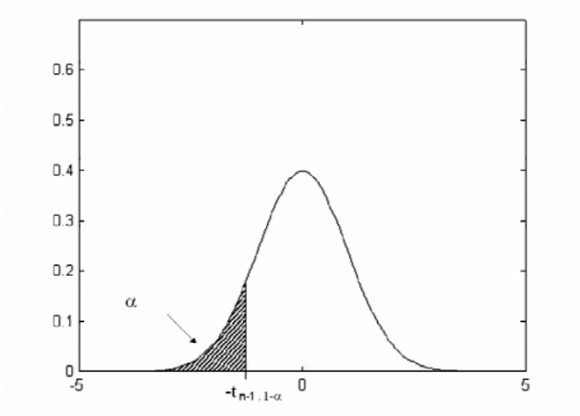
En este caso, como σ^2 es desconocida, sabemos que el estadístico usado en los intervalos de confianza es:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim \begin{cases} \bullet\ t_{n-1} \text{ si } X \sim N(\mu, \sigma) \\ \bullet\ t_{n-1} \text{ (aprox.) si } X \text{ no difiere mucho de la Normal} \\ \bullet\ t_{n-1} \text{ (aprox.) si } X \text{ no Normal y } n \geq 30 \end{cases}$$

Si suponemos que H_0 es cierta ($\mu = \mu_0$), el **estadístico del contraste** es:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim \begin{cases} \bullet\ t_{n-1} \text{ si } X \sim N(\mu, \sigma) \\ \bullet\ t_{n-1} \text{ (aprox.) si } X \text{ no difiere mucho de la Normal} \\ \bullet\ t_{n-1} \text{ (aprox.) si } X \text{ no Normal y } n \geq 30 \end{cases}$$

Por tanto, las **regiones de aceptación y rechazo** son las siguientes:



Criterio de decisión:

- Si $t_0 = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \geq -t_{n-1,1-\alpha} \Rightarrow$ Se acepta H_0.
- Si $t_0 = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} < -t_{n-1,1-\alpha} \Rightarrow$ Se rechaza H_0.

7.4.Contrastes unilateral con cola a la derecha para la media poblacional

Denotemos por X a la variable poblacional en estudio, $\mu = E(X)$, $\sigma^2 = Var(X)$. Veamos cómo llevar a cabo el contraste bilateral:

$$\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu > \mu_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0: & \mu \leq \mu_0 \\ H_1: & \mu > \mu_0 \end{cases}$$

Para ello, distinguiremos dos casos: 1) varianza poblacional σ^2 conocida; 2) varianza poblacional σ^2 desconocida.

Varianza poblacional conocida

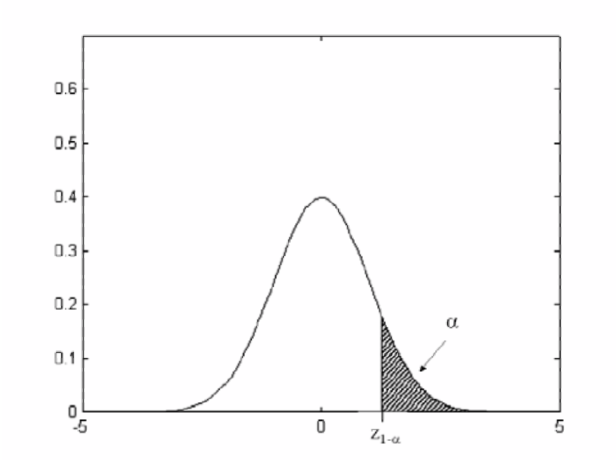
En este caso, como σ^2 es conocida, sabemos que el estadístico usado en los intervalos de confianza es:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \begin{cases} \text{Exacta si } X \sim N(\mu, \sigma) \\ \\ \text{Aproximada si } X \text{ no Normal y } n \geq 30 \end{cases}$$

Si suponemos que H_0 es cierta ($\mu = \mu_0$), el **estadístico del contraste** es:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Por tanto, las **regiones de aceptación y rechazo** son las siguientes:



Criterio de decisión:

- Si $z_0 = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{1-\alpha} \Rightarrow$ Se acepta H_0.
- Si $z_0 = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{1-\alpha} \Rightarrow$ Se rechaza H_0.

Varianza poblacional desconocida

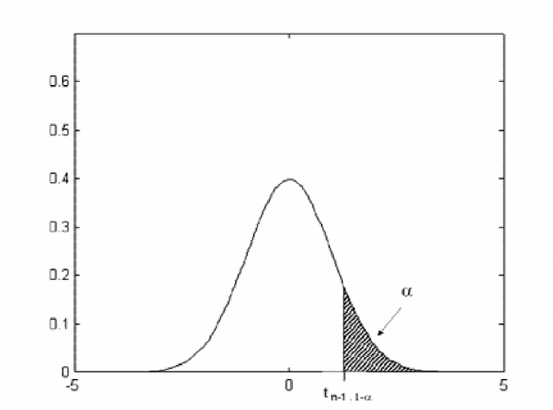
En este caso, como σ^2 es desconocida, sabemos que el estadístico usado en los intervalos de confianza es:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim \begin{cases} \bullet\ t_{n-1} \text{ si } X \sim N(\mu, \sigma) \\ \bullet\ t_{n-1} \text{ (aprox.) si } X \text{ no difiere mucho de la Normal} \\ \bullet\ t_{n-1} \text{ (aprox.) si } X \text{ no Normal y } n \geq 30 \end{cases}$$

Si suponemos que H_0 es cierta ($\mu = \mu_0$), el **estadístico del contraste** es:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim \begin{cases} \bullet\ t_{n-1} \text{ si } X \sim N(\mu, \sigma) \\ \bullet\ t_{n-1} \text{ (aprox.) si } X \text{ no difiere mucho de la Normal} \\ \bullet\ t_{n-1} \text{ (aprox.) si } X \text{ no Normal y } n \geq 30 \end{cases}$$

Por tanto, las **regiones de aceptación y rechazo** son las siguientes:



Criterio de decisión:

- Si $t_0 = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \leq t_{n-1,1-\alpha} \Rightarrow$ Se acepta H_0.
- Si $t_0 = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} > t_{n-1,1-\alpha} \Rightarrow$ Se rechaza H_0.

7.5. Concepto de P-valor

Cuando tomamos una decisión en un contraste de hipótesis, se fija previamente el nivel de confianza (o nivel de significación). ¿Qué sucede si modificamos el nivel de confianza? En tal caso deberíamos recalcular las regiones de aceptación y rechazo y tomar una nueva decisión.

Sin embargo, hay una forma de determinar la decisión en un contraste para distintos niveles de confianza, usando lo que se conoce como **p-valor.** Los programas informáticos usan el p-valor para tomar la decisión en un contraste.

Definición: El p-valor es el nivel de significación más pequeño que conduce al rechazo de H_0.

Criterio de decisión: Sea α el nivel de significación. Entonces:

- Si $p - valor < \alpha \Rightarrow$ Se rechaza H_0
- Si $p - valor \geq \alpha \Rightarrow$ Se acepta H_0

¿Cómo se cálcula el p-valor? Depende del tipo de contraste (bilateral, unilateral cola izquierda, unilateral cola derecha) y del estadístico del contraste.

- Test unilateral con cola a la derecha:

$$\left\{ \begin{array}{ll} H_0: & \mu \leq \mu_0 \\ H_1: & \mu > \mu_0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} p - valor = P(Z > z_0) & Z \sim N(0,1) \\ \\ p - valor = P(t_{n-1} > t_0) & \end{array} \right.$$

- Test unilateral con cola a la izquierda:

$$\left\{ \begin{array}{ll} H_0: & \mu \geq \mu_0 \\ H_1: & \mu < \mu_0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} p - valor = P(Z < z_0) & Z \sim N(0,1) \\ \\ p - valor = P(t_{n-1} < t_0) & \end{array} \right.$$

- Test bilateral o de dos colas:

$$\left\{ \begin{array}{ll} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu \neq \mu_0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} p - valor = 2 \cdot P(Z > |z_0|) & Z \sim N(0,1) \\ \\ p - valor = 2 \cdot P(t_{n-1} > |t_0|) & \end{array} \right.$$